

УДК 532.51.013.4: 537.21

© 2006 г. С. О. ШИРЯЕВА

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ, ПОДВЕШЕННОЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

Аналитическими асимптотическими методами найдено решение задачи о нелинейных осцилляциях заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, неподвижно висящей в гравитационном и однородном электростатическом полях, в квадратичном приближении по двум малым параметрам: амплитуде начальной деформации формы капли и по величине стационарного эксцентриситета равновесной формы капли в электростатическом поле. Сами расчеты проводятся по дробным степеням амплитуды нелинейных осцилляций. Нелинейные поправки к частотам осцилляций всегда отрицательны, появляются уже во втором порядке малости и обусловлены не нелинейным взаимодействием мод, а стационарной деформацией капли во внешних полях. В отличие от нелинейных осцилляций свободной заряженной капли в рассматриваемом случае в выражении для образующей формы нелинейно-осциллирующей капли появляются слабые, пропорциональные амплитуде осцилляций в степени $3/2$.

Ключевые слова: капля, нелинейные осцилляции, электрический заряд, электростатическое поле, гравитационное поле.

Исследование нелинейных осцилляций заряженной капли, начатое два десятилетия назад и продолжающееся до настоящего времени [1–5], позволило выявить много физически значимых особенностей реализации осцилляций и неустойчивости капель по отношению к собственному заряду. К сожалению, того же нельзя сказать об исследовании нелинейных осцилляций заряженной капли во внешнем электростатическом поле. На сегодняшний день выполнено лишь два нелинейных аналитических асимптотических исследования осцилляций и устойчивости незаряженной капли в однородном внешнем электростатическом поле: в квадратичном приближении по амплитуде осцилляций [6] и в приближении $\sim 5/2$ [7]. За исключением [6, 7], все работы по расчету осцилляций сфероидальных незаряженных капель и заряженных капель в однородном внешнем электростатическом поле выполнены лишь в линейном приближении по амплитуде осцилляций [8–11]. Это связано с тем, что аналитическое асимптотическое исследование данного объекта существенно более громоздко по сравнению с просто заряженной каплей ввиду наличия нескольких малых параметров. Эксцентриситет e равновесной в однородном внешнем электростатическом поле сфероидальной формы электропроводной капли, характеризующий отклонение от равновеликой по объему сферы, может рассматриваться в качестве первого малого безразмерного параметра. Отношение амплитуды начальной деформации равновесной сфероидальной формы к радиусу равновеликой сферы образует второй малый параметр ϵ .

В настоящей работе проводится рассмотрение нелинейных осцилляций заряженной капли, неподвижно висящей в суперпозиции коллинеарных гравитационного поля и внешнего однородного электростатического поля (именно такие подвесы используются в экспериментах по проверке критерия устойчивости капли по отношению к собственному заряду [10]), с сохранением слагаемых $\sim \epsilon e^2$ и $\sim e^2$ в предположении, что малые параметры e^2 и ϵ имеют один порядок малости.

1. Пусть в вакууме капля идеально электропроводной несжимаемой идеальной жидкости, имеющая заряд Q (который для определенности примем положительным), в поле сил тяжести \mathbf{g} подвешена в однородном внешнем электростатическом поле напряженностью \mathbf{E}_0 так, что ее центр масс неподвижен ($\mathbf{g} \parallel -\mathbf{E}_0$: сила тяжести $m\mathbf{g}$ уравновешивается противоположно направленной силой QE_0). Система отсчета, связанная с центром масс, является инерциальной. Примем, что жидкость имеет плотность ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ . В отсутствие электростатического и гравитационного полей капля имеет сферическую форму с радиусом R . Согласно [12] в коллинеарных гравитационном и однородном электростатическом полях равновесная форма заряженной капли близка к вытянутому по полю сфероиду. Причем в квадратичном по эксцентриситету e приближении (такое приближение обеспечивает необходимую строгость асимптотических расчетов нелинейных осцилляций капли в приближении $\sim \epsilon e^2$ и $\sim \epsilon^2$) форма капли совпадает со сфероидальной поверхностью $r(\theta) = 1 + e^2 P_2(\mu)/3$ с эксцентриситетом

$$e^2 \equiv \frac{36w}{(4-W)}, \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}, \quad w \equiv \frac{E_0^2 R}{16\pi\sigma} \quad (1.1)$$

Здесь W – параметр Рэлея, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду; w – параметр Тейлора, характеризующий устойчивость электропроводной капли по отношению к внешнему электростатическому полю (по отношению к индуцированному заряду).

В нижеследующем изложении будут использованы безразмерные переменные, в которых $\rho = \sigma = R = 1$. Условие неподвижности центра масс заряженной капли в коллинеарных электрическом и гравитационном полях в безразмерной форме записывается в виде

$$3QE_0 = 4\pi g = \text{const} \quad (1.2)$$

Поскольку давление электрического поля $p_E \sim E_0^2$ приводит к сфероидальному искажению равновесной сферической формы капли, то, следовательно, оно должно иметь тот же порядок малости, что и вызванное им искажение. Но так как малые параметры e^2 и ϵ имеют один порядок малости, то сказанное означает, что $p_E \sim E_0^2 \sim e^2 \sim \epsilon$, или $E_0 \sim \epsilon^{1/2}$ (такой же порядок малости должен иметь и потенциал электростатического поля поляризационного заряда капли). Электрический заряд не нарушает сферичности равновесной формы капли, поэтому можно принять: $Q \sim \epsilon^0$. Порядок малости гравитационного поля определится согласно (1.2): $g \sim QE_0 \sim \epsilon^{1/2}$.

Потенциал $\Phi^{(eq)}$ электростатического поля в окрестности равновесной заряженной капли, находящейся во внешнем однородном электростатическом поле, в линейном по квадрату эксцентриситета приближении представляет собой суперпозицию потенциала заряженного сфероида в отсутствие внешнего электростатического поля и потенциала незаряженного электропроводного сфероида в электростатическом поле

$$\begin{aligned} \Phi^{(eq)}(r, \theta) = & \frac{Q}{r} \left[1 - e^2 \frac{1}{6r^2} (1 - 3\mu^2) \right] - \\ & - E_0 r \mu \left[1 - \frac{1}{r^3} - e^2 \frac{2}{5r^3} \left(1 - \frac{3}{4r^2} (3 - 5\mu^2) \right) \right] + O(e^4), \quad \mu \equiv \cos(\theta) \end{aligned} \quad (1.3)$$

2. Для того чтобы исследовать нелинейные осцилляции поверхности капли, примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная слабо сфероидальная форма капли с

эксцентриситетом e претерпевает осесимметричное возмущение $\xi(\theta, t)$ фиксированной конечной амплитуды ε , много меньшей, однако, радиуса капли ($\varepsilon \ll 1$). Зададимся целью найти форму капли при $t > 0$ и спектр возникающих ее капиллярных осцилляций, полагая, что форма капли – осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Уравнение свободной поверхности капли запишем в виде

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t) = 1 + 1/3e^2P_2(\mu) + \xi(\theta, t) \equiv 1 + e^2h(\theta) + \xi(\theta, t) \quad (2.1)$$

Движение жидкости в капле, вызванное начальной виртуальной деформацией равновесной слабо сфероидальной поверхности, будем полагать потенциальным с потенциалом поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$. Естественно принять, что потенциал ψ и поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}(\psi(\mathbf{r}, t))$ являются величинами того же порядка малости, что и возмущение $\xi(\theta, t)$, т.е. $\psi, V \sim \varepsilon$. Поскольку скорости гидродинамических движений жидкости в капле много меньше скорости распространения электромагнитных взаимодействий, будем считать электрическое поле в окрестности капли электростатическим, описываемым потенциалом $\Phi(\mathbf{r}, t)$, и для напряженности поля будем иметь $\mathbf{E} = -\text{grad}(\Phi)$.

Математическая формулировка решаемой задачи имеет вид

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$r \rightarrow 0: \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -E_0r\mu \quad (2.3)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\xi}{\partial\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (2.4)$$

$$\Delta p - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + p_{EQ} + p_g = p_\sigma, \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t) \quad (2.5)$$

$$\int_V r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3}, \quad V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (2.6)$$

$$\int_V e_r r^3 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 0 \quad (2.7)$$

$$\oint_S (\mathbf{n}\nabla\Phi) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -4\pi Q, \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$t = 0: \xi(\theta, t) = \xi_0^\circ P_0(\mu) + \xi_1^\circ P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\mu), \quad \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

$$\sum_{i \in \Xi} h_i = 1, \quad p_{EQ} = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi}, \quad p_\sigma = \text{div}_S \mathbf{n}$$

$$p_g = g[(r(\theta) + \xi(\theta, t))|_{\theta=0} - (r(\theta) + \xi(\theta, t))\mu]$$

Здесь Δp – перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; p_{EQ} – давление электрического поля на свободной поверхности капли; p_g – давление гравитационного поля; p_σ – давление сил поверхностного натяжения (div_S – поверхностная дивергенция); \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности (2.1); $\Phi_S(t)$ – постоянное вдоль поверхности капли значение электрического потенциала; h_i – коэффициенты, определяющие парциальный вклад i -й колебательной моды в суммарное начальное возму-

чение; Ξ – множество значений номеров мод, определяющих начальную деформацию; ξ_0° и ξ_1° – константы, определяемые из условий (2.6) и (2.7) в начальный момент времени, зависящие от вида начальной деформации и с точностью до слагаемых порядка малости $\sim \varepsilon^2$ и $\sim \varepsilon^2$, равные

$$\xi_0^\circ \equiv \varepsilon^2 \xi_0 \approx - \sum_{i \in \Xi} \left[\varepsilon^2 \frac{h_i^2}{(2i+1)} + \varepsilon e^2 \frac{2}{15} h_i \delta_{i,2} \right] + O(\varepsilon^3)$$

$$\xi_1^\circ \equiv \varepsilon^2 \xi_1 \approx - \sum_{i \in \Xi} \left[\varepsilon^2 \frac{9ih_{i-1}h_i}{(2i-1)(2i+1)} + \varepsilon e^2 \frac{9}{35} h_i \delta_{i,3} \right] + O(\varepsilon^3)$$

Задача (2.1)–(2.8) содержит два малых параметра: e – эксцентриситет равновесной слабо сфероидальной формы капли и ε – амплитуду начальной деформации ξ равновесной формы. Анализ нелинейного взаимодействия возбужденных колебательных мод как между собой, так и со стационарным отклонением равновесной формы капли от сферы как минимум требует учета в разложениях слагаемых, имеющих порядок малости $\sim \xi^2$ и $\sim e^2 \xi$. В соответствии со сказанным выше $e^2 \sim \varepsilon$. Кроме того, будем полагать (см. разд. 1), что $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$ и $g \sim \varepsilon^{1/2}$.

3. Будем решать сформулированную задачу в рамках теории возмущений методом многих масштабов [1–5]. Искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представим в виде разложений по степеням малого параметра ε . Однако в отличие от ранее рассматривавшихся задач о нелинейных осцилляциях заряженных капель в отсутствии внешних силовых полей теперь разложение необходимо проводить не только по целым, но и по полуцелым степеням параметра ε . Это позволит учесть влияние на осцилляции капли гравитационного давления (так как $g \sim \varepsilon^{1/2}$) и перекрестных слагаемых электрического давления ($\sim QE_0 \sim \varepsilon^{1/2}$). В рамках расчетов указанного порядка малости будем в соответствии с основной идеей метода многих временных масштабов считать все искомые величины зависящими не просто от времени t , а от трех его масштабов, определенных через малый параметр ε : $T_m \equiv \varepsilon^m t$ ($m = 0; 1/2; 1$). В итоге получим

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_{1/2}, T_1) + \varepsilon^{3/2} \xi^{(3/2)}(\theta, T_0, T_{1/2}) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0) + O(\varepsilon^{5/2}) \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}, T_1) + \varepsilon^{3/2} \psi^{(3/2)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}) + \varepsilon^2 \psi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0) + O(\varepsilon^{5/2}) \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \Phi^{(eq)}(\mathbf{r}) + \varepsilon \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}, T_1) + \varepsilon^{3/2} \Phi^{(3/2)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0) + O(\varepsilon^{5/2}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\Phi^{(eq)}$ определяется (1.3).

Для входящих в динамическое граничное условие (2.5) давлений электрического p_{EQ} и гравитационного p_g полей, а также сил поверхностного натяжения p_σ примем следующие разложения:

$$\begin{aligned} p_{EQ} &= p_{EQ}^{(eq)} + \varepsilon p_{EQ}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^{3/2} p_{EQ}^{(3/2)}(\xi) + \varepsilon^2 p_{EQ}^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^{5/2}) \\ p_g &= p_g^{(eq)} + \varepsilon p_g^{(1)}(\xi) + \varepsilon^{3/2} p_g^{(3/2)}(\xi) + \varepsilon^2 p_g^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^{5/2}) \\ p_\sigma &= p_\sigma^{(eq)} + \varepsilon p_\sigma^{(1)}(\xi) + \varepsilon^{3/2} p_\sigma^{(3/2)}(\xi) + \varepsilon^2 p_\sigma^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где компоненты $p_{EQ}^{(eq)}$, $p_g^{(eq)}$, $p_\sigma^{(eq)}$ являются давлениями на равновесной слабо сфероидальной поверхности капли и определяют ее равновесную форму.

Используя разложения (3.1), (3.2), из системы (2.2)–(2.8) можно получить набор краевых задач разных порядков малости для определения функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$ и $\Phi^{(m)}$ ($m = 1; 3/2; 2$).

Каждая из функций $\psi^{(m)}$ и $\Phi^{(m)}$ является решением соответствующего уравнения Лапласа (2.2) с граничными условиями (2.3) в силу линейности (2.2), (2.3). Поправки $\Phi^{(m)}$ к равновесному потенциалу $\Phi^{(eq)}$, связанные с осцилляциями поверхности капли, должны стремиться к нулю по мере удаления от поверхности. Поэтому необходимые решения, удовлетворяющие нулевым условиям либо в центре капли, либо на бесконечности для функций различных порядков малости при ($m = 1; 3/2; 2$) запишем в виде

$$\psi^{(m)}(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(m)}(t) r^n P_n(\mu), \quad \Phi^{(m)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu) \quad (3.3)$$

В виде аналогичных разложений по полиномам Лежандра представим и последовательные поправки к форме образующей поверхности капли

$$\xi^{(m)}(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(t) P_n(\mu), \quad (m = 1; 3/2; 2) \quad (3.4)$$

4. Коэффициенты $D_n^{(1)}(t)$, $F_n^{(1)}(t)$, $M_n^{(1)}(t)$, определяющие временную эволюцию решений первого порядка малости для искажения формы поверхности капли $\xi^{(1)}(\theta, t)$, гидродинамического $\psi^{(1)}(r, \theta, t)$ и электростатического $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$ потенциалов, находятся из системы уравнений, получающейся из (2.4)–(2.8) группировкой слагаемых, содержащих первую степень параметра ϵ и связанных с искажением равновесной формы капли. Подставим в эту систему решения (3.3), (3.4) для случая $m = 1$ и выразим $D_n^{(1)}(t)$ и $F_n^{(1)}(t)$ через эволюционные коэффициенты $M_n^{(1)}(t)$

$$(\forall n \geq 1): D_n^{(1)}(t) = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0}, \quad F_n^{(1)}(t) = Q M_n^{(1)}(t) \quad (4.1)$$

$$D_0^{(1)}(t) = 0, \quad F_0^{(1)}(t) = 0, \quad M_0^{(1)}(t) = 0, \quad M_1^{(1)}(t) = 0$$

Для определения $M_n^{(1)}(t)$ при $n \geq 2$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(t) = 0, \quad \omega_n^2 = n(n-1)(n+2-W) \quad (4.2)$$

где ω_n – частоты собственных осцилляций поверхности заряженной капли. Решениями уравнения (4.2) являются функции, гармонически зависящие от времени T_0 , при этом амплитуда и фаза этих колебаний могут зависеть от других временных масштабов $T_{1/2}$ и T_1 :

$$M_n^{(1)}(t) = A_n^{(1)}(T_{1/2}, T_1) \exp(i\omega_n T_0) + (\text{к.с.}) \quad (4.3)$$

$$A_n^{(1)}(T_{1/2}, T_1) = a_n^{(1)}(T_{1/2}, T_1) \exp(ib_n^{(1)}(T_{1/2}, T_1))$$

Здесь и далее аббревиатура “(к.с.)” обозначает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Зависимость вещественных функций $a_n^{(1)}(T_{1/2}, T_1)$ и $b_n^{(1)}(T_{1/2}, T_1)$ от вре-

мен $T_{1/2}$ и T_1 может быть определена только при рассмотрении задач следующего порядка малости.

Система уравнений порядка малости $3/2$ для определения функций $D_n^{(3/2)}(t)$, $F_n^{(3/2)}(t)$, $M_n^{(3/2)}(t)$, получающаяся из (2.4)–(2.8) группировкой слагаемых при $\epsilon^{3/2}$ после подстановки туда решений (3.3), (3.4), будет содержать слагаемые, учитывающие взаимодействие возмущения $\xi(\theta, t)$ с гравитационным и электростатическим полями. Учитывая решения первого порядка (4.1), (4.3), получим выражения для $D_n^{(3/2)}(t)$, $F_n^{(3/2)}(t)$ в виде

$$(\forall n \geq 1) \quad D_n^{(3/2)}(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial M_n^{(3/2)}(t)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_{1/2}} \right)$$

$$F_n^{(3/2)}(t) = Q M_n^{(3/2)}(t) + 3\beta_E \left(\frac{n}{(2n-1)} M_{n-1}^{(1)}(t) + \frac{n+1}{(2n+3)} M_{n+1}^{(1)}(t) \right) \quad (4.4)$$

$$D_0^{(3/2)}(t) = 0, \quad F_0^{(3/2)}(t) = 0, \quad M_0^{(3/2)}(t) = 0, \quad M_1^{(3/2)}(t) = 0$$

Зависимость эволюционных коэффициентов $M_n^{(3/2)}(t)$ при $n \geq 2$ от времени T_0 определяется из решения неоднородного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 M_n^{(3/2)}(t)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(3/2)}(t) = -2i\omega_n \frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial T_{1/2}} \exp(i\omega_n T_0) +$$

$$+ \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-3) - \beta_g \right) \frac{n^2}{(2n-1)} A_{n-1}^{(1)}(t) \exp(i\omega_{n-1} T_0) + \quad (4.5)$$

$$+ \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-1) - \beta_g \right) \frac{n(n+1)}{(2n+3)} A_{n+1}^{(1)}(t) \exp(i\omega_{n+1} T_0) + (\text{к.с.})$$

Чтобы решение этого уравнения не содержало секулярных членов, необходимо потребовать обращения в ноль слагаемых в функции неоднородности, пропорциональных $\exp(i\omega_n T_0)$, описывающих внешнее воздействие с частотой ω_n , равной частоте собственных колебаний n -й моды. Записывая необходимое условие: $(dA_n^{(1)}/dT_{1/2}) = 0$, получаем, что решения первого порядка малости (4.1), (4.3) не зависят от временного масштаба $T_{1/2}$, а общее решение уравнения (4.5) может быть представлено в виде

$$M_n^{(3/2)}(t) = A_n^{(3/2)}(T_{1/2}) \exp(i\omega_n T_0) +$$

$$+ \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_{n+1}^2)} \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-3) - \beta_g \right) \frac{n^2}{(2n-1)} A_{n-1}^{(1)} \exp(i\omega_{n-1} T_0) +$$

$$+ \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_{n+1}^2)} \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-1) - \beta_g \right) \frac{n(n+1)}{(2n+3)} A_{n+1}^{(1)} \exp(i\omega_{n+1} T_0) + (\text{к.с.}) \quad (4.6)$$

$$A_n^{(3/2)}(T_{1/2}) = a_n^{(3/2)}(T_{1/2}) \exp(ib_n^{(3/2)}(T_{1/2}))$$

Здесь $a_n^{(3/2)}(T_{1/2})$, $b_n^{(3/2)}(T_{1/2})$ – действительные функции, зависимость которых от $T_{1/2}$ может быть определена лишь при решении задачи второго порядка малости. Параметры $\beta_E, \beta_g, \beta_e \sim O(1)$ вводятся в соответствии с равенствами $E_0 = \beta_E \epsilon^{1/2}$, $g = \beta_g \epsilon^{1/2}$, $e^2 = \beta_e \epsilon$ для того, чтобы была возможность различать в полученных решениях вклады, порожденные действием внешних электрического и гравитационного полей и происходящих из-за стационарной деформации равновесной формы капли. Так, из (4.6) видно, что в приближении $\sim \epsilon^{3/2}$ стационарная сфероидальная деформация $\sim \beta_e$ на форме поверхности капли и согласно (4.4) на поправках к полю скоростей и электрическому полю не сказывается.

5. Подставим в (2.4)–(2.8) решения (3.3), (3.4) с индексом $m = 2$ и, группируя слагаемые при ϵ^2 , получим систему уравнений второго порядка малости для отыскания функций $D_n^{(2)}(t)$, $F_n^{(2)}(t)$, $M_n^{(2)}(t)$. Из получившейся системы, используя решения более низких порядков малости (4.1), (4.3), (4.4), (4.6), выразим коэффициенты $D_n^{(2)}(t)$ и $F_n^{(2)}(t)$ через эволюционные коэффициенты $M_n^{(m)}(t)$ ($m = 1; 3/2; 2$)

$$\begin{aligned}
 (\forall n \geq 1) D_n^{(2)}(t) = & \frac{1}{n} \left[\frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(3/2)}(t)}{\partial T_{1/2}} + \frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_1} - \right. \\
 & - \beta_e \left(\frac{(n+1)^2(n+2)}{2(2n+3)(2n+5)} \frac{\partial M_{n+2}^{(1)}(t)}{\partial T_0} + \frac{(n-1)n(n+1)}{3(2n-1)(2n+3)} \frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0} \right) - \\
 & - \beta_e \left(\frac{(n-3)(n-1)n}{2(2n-1)(2n-3)} \frac{\partial M_{n-2}^{(1)}(t)}{\partial T_0} \right) - \\
 & \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m} ((m-1)mK_{k,m,n} - \alpha_{k,m,n}) M_k^{(1)}(t) \frac{\partial M_m^{(1)}(t)}{\partial T_0} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_n^{(2)}(t) = & \left\{ Q M_n^{(3/2)}(t) + 3\beta_E \left(\frac{n}{(2n-1)} M_{n-1}^{(3/2)}(t) + \frac{n+1}{(2n+3)} M_{n+1}^{(3/2)}(t) \right) + \right. \\
 & + Q\beta_e \left(\frac{n^2(n-1)}{2(2n-3)(2n-1)} M_{n-2}^{(1)}(t) + \frac{n(n+1)(n+2)}{3(2n-1)(2n+3)} M_n^{(1)}(t) \right) + \\
 & \left. + Q\beta_e \frac{(n+1)(n+2)(n+4)}{2(2n+3)(2n+5)} M_{n+2}^{(1)}(t) + Q \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} mK_{k,m,n} M_k^{(1)}(t) M_m^{(1)}(t) \right\}
 \end{aligned}$$

$$D_0^{(2)}(t) = 0, \quad F_0^{(2)}(t) = 0, \quad M_0^{(2)}(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} (M_k^{(1)}(t))^2 - \beta_e \frac{2}{15} M_2^{(1)}(t)$$

$$M_1^{(2)}(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{9k}{(2k-1)(2k+1)} M_{k-1}^{(1)}(t) M_k^{(1)}(t) - \beta_e \frac{9}{35} M_3^{(1)}(t)$$

Для отыскания эволюционных коэффициентов второго порядка малости $M_n^{(2)}(t)$ получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0) = \\
& = \left[-2i\omega_n \frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1} + G_1(n)A_n^{(1)}(T_1) - 2i\omega_n \frac{dA_n^{(3/2)}(T_{1/2})}{dT_{1/2}} \right] \exp(i\omega_n T_0) + \\
& + G_2(n)A_{n+2}^{(1)} \exp(i\omega_{n+2} T_0) + G_3(n)A_{n-2}^{(1)} \exp(i\omega_{n-2} T_0) + \\
& + G_4(n)A_{n+1}^{(3/2)} \exp(i\omega_{n+1} T_0) + G_5(n)A_{n-1}^{(3/2)} \exp(i\omega_{n-1} T_0) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \{ [(\gamma_{kmn} + \gamma_{mkn}) + \omega_k \omega_m (\eta_{kmn} + \eta_{mkn})] A_k^{(1)} A_m^{(1)} \exp(i[\omega_k + \omega_m] T_0) + \\
& + [(\gamma_{kmn} + \gamma_{mkn}) - \omega_k \omega_m (\eta_{kmn} + \eta_{mkn})] A_k^{(1)} \bar{A}_m^{(1)} \exp(i[\omega_k - \omega_m] T_0) \} + (\text{к.с.}) \\
& G_1 \equiv \left[\frac{n^2}{(2n-1)(2n+3)} \left(\beta_e (n+1) \left(n^2 + \frac{\omega_n^2}{(n-1)n} \right) + \frac{9\beta_E^2 (2(n-1)n(2n+3) - 1)}{4\pi(2n+1)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{(\omega_{n-1}^2 - \omega_n^2)} \frac{(n-1)n^3}{(2n-1)(2n+1)} \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-3) - \beta_g \right)^2 + \\
& \left. + \frac{1}{(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)} \frac{(n+1)^3 n}{(2n+1)(2n+3)} \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-1) - \beta_g \right)^2 \right] \\
& G_2(n) \equiv \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} \left[\beta_E \frac{9n}{4\pi} - \beta_e \left(\frac{(8-7n-3n^2)}{2} + \frac{(n-1)^2}{n} (n+4-W) \right) - \right. \\
& \left. - \frac{(n+1)}{(\omega_{n+1}^2 - \omega_{n+2}^2)} \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-1) - \beta_g \right) \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n+1) - \beta_g \right) \right] \\
& G_3(n) \equiv \frac{n^2(n-1)}{(2n-3)(2n-1)} \times \\
& \times \left[\beta_E \frac{9}{4\pi} (n-2) - \beta_e \left(\frac{1}{2} (-12 + 11n - 3n^2) - \frac{1}{n} (9 - 5n + n^2) (n-W) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{(n-1)}{(\omega_{n-1}^2 - \omega_{n-2}^2)} \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-3) - \beta_g \right) \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-5) - \beta_g \right) \right] \\
& G_4(n) \equiv \frac{n(n+1)}{(2n+3)} \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-1) - \beta_g \right); \quad G_5 \equiv \frac{n^2}{(2n-1)} \left(\beta_E \frac{3Q}{4\pi} (2n-3) - \beta_g \right) \\
& \gamma_{kmn} = K_{kmn} \left[\omega_k^2 (n-k+1) + 2n(k^2 + k-1) + W \frac{n}{2} (3+m(k+1) - k(2k-2n+7)) \right] +
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$+ \alpha_{kmn} \left(\frac{1}{k} \omega_k^2 + W \frac{n}{2} \right); \quad \eta_{kmn} = K_{kmn} \left(\frac{n}{2} - k + 1 \right) + \alpha_{kmn} \frac{1}{k} \left(1 + \frac{n}{2m} \right)$$

$$K_{kmn} = [C_{k0m0}^{n0}]^2, \quad \alpha_{kmn} = -\sqrt{k(k+1)m(m+1)} C_{k0m0}^{n0} C_{k(-1)m1}^{n0}$$

где C_{k0m0}^{n0} , $C_{k(-1)m1}^{n0}$ – коэффициенты Клебша – Гордана.

Необходимость исключения из решений уравнения (5.1) секулярных слагаемых приводит к требованию, чтобы первая квадратная скобка в функции неоднородности (правой части (5.1)) обращалась в ноль. Этого можно добиться, если положить

$$-2i\omega_n \frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1} + G_1(n)A_n^{(1)}(T_1) = 0, \quad \frac{dA_n^{(3/2)}(T_{1/2})}{dT_{1/2}} = 0 \quad (5.2)$$

Согласно второму из этих уравнений амплитуды порядка малости 3/2 от временного масштаба $T_{1/2}$ не зависят, следовательно, в (4.6) $a_n^{(3/2)}$ и $b_n^{(3/2)}$ константы, для определения которых необходимо учесть начальные условия. Первое из уравнений (5.2) позволяет определить зависимость амплитуд первого порядка малости от медленного временного масштаба T_1 . Выражая в нем $A_n^{(1)}(T_1)$ через действительные функции $a_n^{(1)}(T_1)$, $b_n^{(1)}(T_1)$ и требуя обращения в ноль действительной и мнимой частей уравнения, несложно получить

$$a_n^{(1)}(T_1) = a_n^{(0)}, \quad b_n^{(1)}(T_1) = -\frac{G_1(n)}{2\omega_n} T_1 + b_n^{(0)} \quad (5.3)$$

$a_n^{(0)}$ и $b_n^{(0)}$ – константы, определяемые из начальных условий.

Величины $b_n^{(1)}(T_1)$ определяют поправки к частотам собственных колебаний поверхности капли, связанные с отклонением ее равновесной формы от сферической и наличием в окружающем пространстве электростатического и гравитационного полей. С учетом (5.3) амплитуды колебательных мод первого порядка малости $M_n^{(1)}(t)$ вместо (4.3) запишутся в виде

$$M_n^{(1)}(t) = 2a_n^{(0)} \cos \left[\left(\omega_n - \varepsilon \frac{G_1(n)}{2\omega_n} \right) t + b_n^{(0)} \right] \quad (5.4)$$

Выражения для амплитуд второго порядка малости $M_n^{(2)}(T_0)$ ($n \geq 2$) получим, решая уравнение (5.1) с учетом соотношений (5.2)

$$M_n^{(2)}(t) = A_n^{(2)} \exp(i\omega_n T_0) + \chi_{n+2} A_{n+2}^{(1)} \exp(i\omega_{n+2} T_0) + \chi_{n-2} A_{n-2}^{(1)} \exp(i\omega_{n-2} T_0) + \\ + \chi_{n+1} A_{n+1}^{(3/2)} \exp(i\omega_{n+1} T_0) + \chi_{n-1} A_{n-1}^{(3/2)} \exp(i\omega_{n-1} T_0) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \lambda_{kmn}^{(+)} A_k^{(1)} A_m^{(1)} \exp(i[\omega_k + \omega_n] T_0) + \lambda_{kmn}^{(-)} A_k^{(1)} \overline{A_m^{(1)}} \exp(i[\omega_k - \omega_n] T_0) \right\} + (\text{к.с.}) \quad (5.5)$$

$$\chi_{n+2} = \frac{G_2(n)}{(\omega_n^2 - \omega_{n+2}^2)}, \quad \chi_{n-2} = \frac{G_3(n)}{(\omega_n^2 - \omega_{n-2}^2)}, \quad \chi_{n+1} = \frac{G_4(n)}{(\omega_n^2 - \omega_{n+1}^2)}$$

$$\chi_{n-1} = \frac{G_5(n)}{(\omega_n^2 - \omega_{n-1}^2)}, \quad \lambda_{kmn}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \frac{((\gamma_{kmn} + \gamma_{mkn}) \pm \omega_k \omega_m (\eta_{kmn} + \eta_{mkn}))}{[\omega_n^2 - (\omega_k \pm \omega_m)^2]}$$

Принятое ограничение точности данного рассмотрения вторым порядком малости позволяет определить зависимость коэффициентов $M_n^{(2)}$ лишь от временного масштаба T_0 . В связи с этим в (5.5) следует принять $A_n^{(2)} = a_n^{(2)} \exp(ib_n^{(2)})$, $A_n^{(1)} = a_n^{(0)} \exp(ib_n^{(0)})$, а действительные константы $a_n^{(2)}$ и $b_n^{(2)}$ так же, как и $a_n^{(0)}$, $b_n^{(0)}$, $a_n^{(3/2)}$, $b_n^{(3/2)}$ определяются из начальных условий.

6. Начальные условия (2.8) подстановкой в них разложения (3.1) для возмущения $\xi(\theta, t)$ превращаются в систему начальных условий для функций разных порядков малости:

$$t = 0: \xi^{(1)} = \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\mu), \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0, \quad \xi^{(3/2)} = 0, \quad \frac{\partial \xi^{(3/2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_{1/2}} = 0$$

$$\xi^{(2)} = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu), \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(3/2)}}{\partial T_{1/2}} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = 0$$

Учет (3.4) и полученных в ходе решения соотношений $dM_n^{(1)}/dT_{1/2} = 0$ и $dM_n^{(3/2)}/dT_{1/2} = 0$ позволяет привести данную систему к виду

$$t = 0: M_n^{(1)}(t) = h_i \delta_{i,n}, \quad \frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0} = 0, \quad M_n^{(3/2)}(t) = 0, \quad \frac{\partial M_n^{(3/2)}(t)}{\partial T_0} = 0$$

$$M_n^{(2)}(t) = \xi_0 \delta_{n,0} + \xi_1 \delta_{n,1}, \quad \frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_1} = 0$$

где $i \in \Xi$, $\delta_{i,j}$ – дельта-символ Кронекера.

Подставим в систему начальных условий решения (4.6), (5.4), (5.5) и после определения действительных констант $a_n^{(0)}$, $b_n^{(0)}$, $a_n^{(3/2)}$, $b_n^{(3/2)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$ получим в окончательном виде

$$\begin{aligned} (n \geq 2): M_n^{(1)}(t) &= h_i \delta_{i,n} \cos[(\omega_n - \varepsilon \delta_n)t], \quad \delta_n \equiv \frac{G_1(n)}{2\omega_n} \\ M_n^{(3/2)}(t) &= -(h_{n-1} \chi_{n-1} + h_{n+1} \chi_{n+1}) \cos(\omega_n t) + h_{n-1} \chi_{n-1} \cos(\omega_{n-1} t) + h_{n+1} \chi_{n+1} \cos(\omega_{n+1} t) \\ M_n^{(2)}(t) &= - \left[\frac{h_n}{n(2n+1)} ((2n+3)(n+1)(\chi_{n+1})^2 + (2n-1)(n-1)(\chi_{n-1})^2) + \right. \\ &+ h_{n+2} \left(\chi_{n+2} - \chi_{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{(\omega_{n+1}^2 - \omega_{n+2}^2)(2n+5)} (\beta_E Q_1(2n+1) - \beta_g) \right) + \\ &+ h_{n-2} \left(\chi_{n-2} - \chi_{n-1} \frac{(n-1)^2}{(\omega_{n-1}^2 - \omega_{n-2}^2)(2n-3)} (\beta_E Q_1(2n-5) - \beta_g) \right) \left. \right] \cos(\omega_n t) + \\ &+ h_{n+2} \chi_{n+2} \cos(\omega_{n+2} t) + h_{n-2} \chi_{n-2} \cos(\omega_{n-2} t) + \\ &+ \chi_{n+1} (n+1) \left(\frac{(2n+3)h_n \chi_{n+1}}{n(2n+1)} - \frac{h_{n+2}(n+2)(Q_1 \beta_E(2n+1) - \beta_g)}{(\omega_{n+1}^2 - \omega_{n+2}^2)(2n+5)} \right) \cos(\omega_{n+1} t) + \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}
 & + \chi_{n-1}(n-1) \left(\frac{(2n-1)}{n(2n+1)} h_n \chi_{n-1} - \frac{h_{n-2}(n-1)(\beta_E Q_1(2n-5) - \beta_g)}{(\omega_{n-1}^2 - \omega_{n-2}^2)(2n-3)} \right) \cos(\omega_{n-1}t) + \\
 & + \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} \frac{h_i h_j}{2} \{ \lambda_{ijn}^{(+)} [\cos((\omega_i + \omega_j)t) - \cos(\omega_n t)] + \lambda_{ijn}^{(-)} [\cos((\omega_i - \omega_j)t) - \cos(\omega_n t)] \} \\
 & Q_1 \equiv \frac{3Q}{4\pi}, \quad M_0^{(1)}(t) = M_1^{(1)}(t) = M_0^{(3/2)}(t) = M_1^{(3/2)}(t) = 0
 \end{aligned}$$

$$M_0^{(2)}(t) = - \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i+1)} (\cos(\omega_i t))^2 - \beta_e \frac{2}{15} h_2 \cos(\omega_2 t)$$

$$M_1^{(2)}(t) = - \sum_{i \in \Xi} \frac{9i h_{i-1} h_i}{(2i-1)(2i+1)} \cos(\omega_{i-1} t) \cos(\omega_i t) - \beta_e \frac{9}{35} h_3 \cos(\omega_3 t)$$

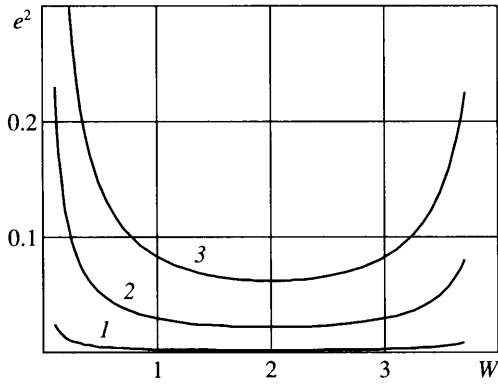
Таким образом, используя (2.1), (3.1), (3.4), для формы поверхности осциллирующей заряженной капли, находящейся во внешнем однородном электрическом и гравитационном полях, запишем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 r(\theta, t) = & 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)}(t) P_n(\mu) + \\
 & + \varepsilon^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(3/2)}(t) P_n(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) + O(\varepsilon^{5/2})
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

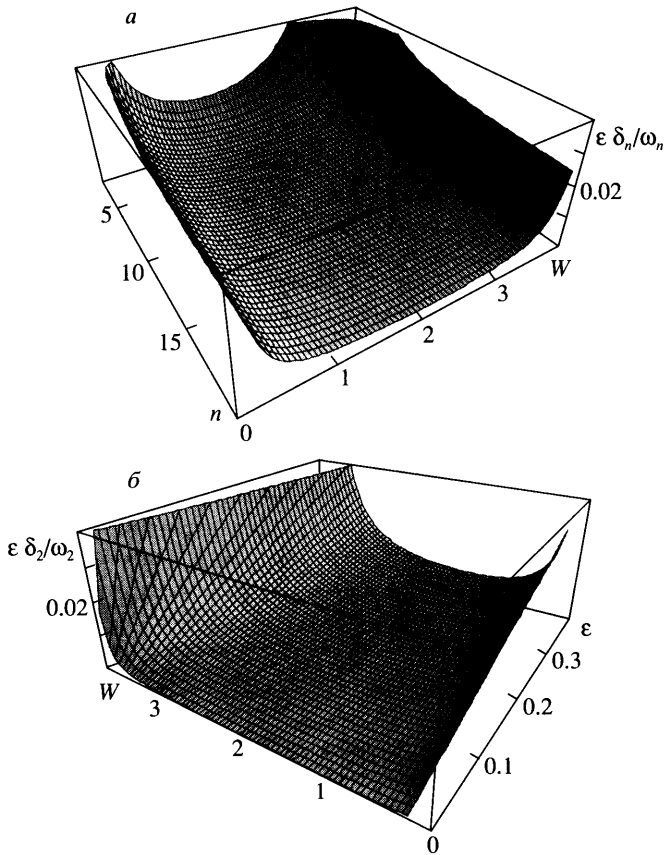
в котором амплитуды $M_n^{(i)}(t)$ ($i = 1; 3/2; 2$) определяются по формулам (6.1).

7. Особенностью проведенных расчетов и финальных выражений (6.1), (6.2) является то, что основные физические параметры задачи не независимы, а связаны между собой соотношением неподвижности центра масс (1.2) и выражением для эксцентриситета равновесной сферoidalной формы капли (1.1). В итоге эксцентриситет заряженной капли, подвешенной в электростатическом и гравитационном полях, в области малых зарядов будет уменьшаться с ростом заряда W , а в области зарядов, близких к критическому по Рэлею значению, – увеличиваться (фиг. 1). В области величин зарядов, соответствующих значениям параметра Рэлея $1 \leq W \leq 3$, эксцентриситет практически не меняет своего значения, по-видимому, увеличение поверхностной плотности собственного заряда капли компенсируется уменьшением поверхностной плотности заряда, индуцированного внешним электростатическим полем.

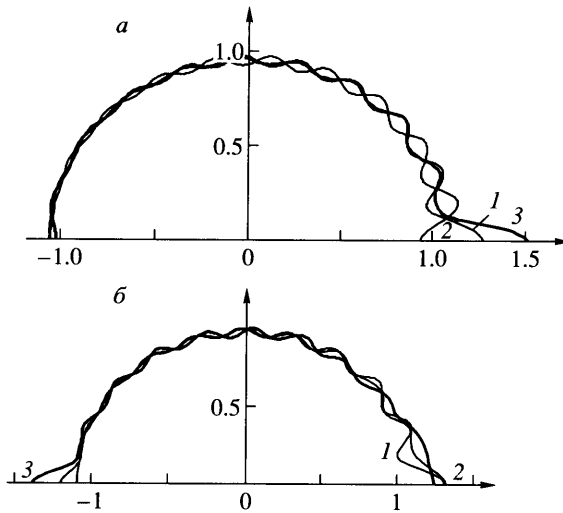
Нелинейные поправки к частотам $\varepsilon \delta_n$ появляются в рассматриваемой задаче не из-за нелинейного взаимодействия мод как при исследовании нелинейных осцилляций заряженной капли [1–3, 5], а благодаря отличию равновесной формы капли от сферической, гравитации и взаимодействию заряда капли с электростатическим полем (фиг. 2). Они имеют первый порядок малости по амплитуде отклонения, зависят от величины заряда капли, наличия электрического и гравитационного полей и приводят к уменьшению частот. Следствием этого является снижение критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к суперпозиции собственного и индуцированного заряда в соответствии с соотношением $(\omega_2 - \varepsilon \delta_2)^2 \approx \omega_2^2 - 2\varepsilon \delta_2 = 0$. Причем данный эффект будет существен как при малых собственных зарядах капель и больших напряженностях элек-



Фиг. 1. Зависимость квадрата эксцентриситета равновесной формы капли e^2 от параметра Рэлея W при $G = 0.1, 0.3, 0.5$ ($G = g\rho R^2/\sigma$), что соответствует для воды $R = 0.86, 1.5, 1.9$ мм (линии 1–3)



Фиг. 2. Зависимость отношения нелинейной поправки к частоте моды от параметра Рэлея W и номера моды n при $\epsilon = 0.1$ (а) и от малого параметра ϵ при $n = 2$ (б)



Фиг. 3. Образующая формы нелинейно осциллирующей капли, когда начальная деформация определена суперпозицией 19-й и 20-й мод, при $\epsilon = 0.2$, $W = 3.7$, для $t = 0$; $t = T_{19}/2$; $t = 9T_{19}/8$ (линии 1–3) (а) и $t = 0$; $t = 15T_{19}/8$; $t = 15T_{19}/4$ (линии 1–3) (б)

тростатического поля, так и наоборот: при больших зарядах и малых напряженностях (фиг. 2).

Количество и положения внутренних нелинейных резонансов, характеризующихся слагаемыми в (6.1), пропорциональными коэффициентам $\lambda_{kmn}^{(\pm)}$, стремящимися к бесконечности при выполнении условий $\omega_n^2 = (\omega_k \pm \omega_m)^2$, в использованном порядке приближений не зависят от наличия внешних полей, определяются только зарядом капли и не отличаются от ранее проанализированной ситуации свободной заряженной капли [1–5].

На фиг. 3 приведены результаты численных расчетов по (6.1), (6.2) форм нелинейно-осциллирующих заряженных капель, подвешенных в гравитационном и электростатическом полях, в различные моменты времени. При нелинейных осцилляциях заряженных капель, подвешенных в электростатическом и гравитационном полях, а именно такого типа устройства используются для проверки справедливости критерия Рэлея, с вершины капли с большой кривизной может начаться сброс избыточного заряда (см. сказанное выше о снижении критических условий реализации неустойчивости), что приведет к искажению получаемых в экспериментах данных [6, 7].

Нелинейные поправки к амплитудам нулевой $M_0^{(2)}(t)$ и первой (трансляционной) $M_1^{(2)}(t)$ мод содержат слагаемые, пропорциональные косинусам частот основной (второй) и третьей мод соответственно, обращающиеся в ноль при отсутствии номеров этих мод в спектре, определяющем начальную деформацию. В ситуации нелинейно-осциллирующей заряженной капли такие слагаемые отсутствовали, и их появление связано с наличием стационарной деформации капли в электрическом поле.

Появление в анализируемой задаче по сравнению со случаем свободных заряженных капель [1–5] в форме образующей (6.2) слагаемого $\sim \epsilon^{3/2}$ связано с присутствием гравитационного и электростатического полей. При $E_0 \rightarrow 0$, $g \rightarrow 0$ обсуждаемое слагаемое обращается в ноль.

Спектр нелинейно-осциллирующих мод в рассматриваемой ситуации совпадает со спектром мод нелинейно-осциллирующей свободной капли, однако сами реализующие-

ся осцилляции в рассматриваемой ситуации имеют другие амплитуды и более сложную структуру.

Заключение. Нелинейные осцилляции заряженной капли, подвешенной в коллинеарных гравитационном и однородном электростатическом полях, обладают рядом особенностей, не встречающихся при нелинейных осцилляциях свободной заряженной капли. В частности, изменяется форма образующей капли, а нелинейные поправки к частотам появляются уже в расчетах второго порядка малости, обязаны своим происхождением равновесной деформации капли во внешних силовых полях и приводят к снижению устойчивости капли по отношению к поверхностному заряду.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 03-01-00760).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* Resonant oscillations of inviscid charged drops // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 147. P. 373–395.
2. *Natarayan R., Brown R.A.* The role of three-dimensional shapes in the break-up of charged drops // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1987. V. 410. № 1838. P. 209–227.
3. *Feng Z.C.* Instability caused by the coupling between non-resonant shape oscillation modes of a charged conducting drop // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 333. P. 1–21.
4. *Ширяева С.О.* Нелинейные осцилляции заряженной капли при многомодовой начальной деформации равновесной формы // *Изв. РАН. МЖГ.* 2001. № 3. С. 173–184.
5. *Ширяева С.О.* Нелинейные капиллярные колебания объемно заряженной диэлектрической капли // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 1. С. 104–113.
6. *Ширяева С.О., Волкова М.В., Григорьев А.И.* Нелинейные осцилляции незаряженной электропроводной капли в однородном внешнем электростатическом поле // *Ж. техн. физики.* 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 36–44.
7. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* О возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно-осциллирующей во внешнем электростатическом поле электропроводной капли // *Ж. техн. физики.* 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.
8. *Cheng K.J.* Capillary oscillations of a drop in an electric field // *Phys. Lett.* 1985. V. A112. № 8. P. 392–396.
9. *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электростатическом поле // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1985. № 6. С. 10–15.
10. *Feng J.Q., Beard K.V.* Small-amplitude oscillations of electrostatically levitated drops // *Proc. R. Soc. London. Ser. A.* 1990. V. 430. № 1878. P. 133–150.
11. *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Об устойчивости капиллярных колебаний слабо сферической заряженной капли // *Ж. техн. физики.* 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 12–20.
12. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // *Ж. техн. физики.* 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.