

УДК 533.6.013.128

© 2006 г. С. А. ТАКОВИЦКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НОСОВЫХ ЧАСТЕЙ МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Предложена аналитическая процедура для определения формы осесимметричных носовых частей, реализующих минимальные значения волнового сопротивления. Решение строится как улучшающая вариация формы конуса. Для целевой функции принято аппроксимационное представление на основе допущения о локальности связи геометрических и газодинамических параметров. Показано, что оптимальные тела являются усеченными степенными телами с показателем степени, равным $2/3$. Дано сопоставление с телами, построенными в точной постановке задачи.

Ключевые слова: носовые части, волновое сопротивление, минимизация.

Современный уровень развития вычислительной техники и методов математического моделирования позволяет решать разнообразные задачи, связанные с выбором рациональных аэродинамических форм. В рамках модели Эйлера определены осесимметричные головные части с минимальным волновым сопротивлением для широкого диапазона определяющих параметров – числа Маха и удлинения тела [1]. Другое направление оптимизационных исследований связано с получением аналитических решений на основе упрощенных моделей течения. При построении головных частей использовалось соотношение Ньютона для давления в зависимости от угла между векторами скорости набегающего потока и нормали к элементу поверхности. Установлено, что при стремлении удлинения тела к бесконечности оптимальная образующая описывается степенной зависимостью радиуса от продольной координаты $r \sim x^n$ с показателем степени, равным $3/4$ [2]. Численные параметрические исследования тел со степенной образующей показали, что теоретическое значение n завышено. Экстремальное значение показателя степени увеличивается с ростом числа Маха и не превосходит $n = 0.71$ [3].

Надежный инструмент аналитического решения оптимизационных задач – метод малых вариаций формы тел с известным распределением аэродинамической нагрузки. На основе допущений о локальной линейной связи между изменением давления на элементе поверхности и приращением геометрических параметров определяется аппроксимация целевой функции в виде квадратичной формы. Метод оказался эффективным при решении задачи минимизации волнового сопротивления профилей с острыми кромками и с донным торцом [4]. При этом в качестве исходных форм принимались ромб и клин.

В случае осесимметричных тел известны значения параметров течения около конусов, обтекаемых с присоединенным скачком уплотнения. Заметим, что у конуса отсутствует обязательный элемент оптимального тела – передний торец. По значениям сопротивления превышение составляет десятки процентов. В данной статье показывается, что, приняв конус в качестве исходного тела и проведя локальный анализ, можно построить близкие к оптимальным осесимметричные головные части. Для образующей получается аналитическая зависимость радиуса от продольной координаты с единственным геометрическим параметром, изменяющимся в зависимости от условий набегающего потока и удлинения тела.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим конус и осесимметричное тело с передним торцом, имеющие одинаковое удлинение $\lambda = 0.5L/R$, где L – длина тела, R – радиус основания. Образующая тела определяется набором из N точек с координатами x_i, r_i . Точки соединены отрезками. Принято равномерное распределение узловых точек в продольном направлении $x_i = (i - 1)\Delta x, \Delta x = L/(N - 1)$. Если передний торец отсутствует, то $r_1 = 0$. Для последней точки имеем $r_N = R$. В случае конуса $r_{i,c} = R(i - 1)/(N - 1)$. Считаем известными значения давления p_c и числа Маха M_c на поверхности конуса, и осредненное значение давления p_0 на торце.

Дальнейшие рассуждения проведем в предположении о малости углов наклона отрезков относительно продольной оси ($\Delta r_i/\Delta x \rightarrow 0, \Delta r_i = r_{i+1} - r_i, i = 1, \dots, N - 1$). Принимаем локальность влияния изменения формы конуса на приращение давления. Согласно теории сверхзвуковых течений типа простой волны давление на i -ом отрезке образующей тела вращения определяется соотношением

$$p_i = p_c + k(r_{i+1} - r_i - r_{i+1,c} + r_{i,c}), \quad k = \frac{\gamma M_c^2 p_c}{\sqrt{M_c^2 - 1} \Delta x}$$

где γ – отношение удельных теплоемкостей. Сопротивление тела представляется суммой

$$X = \pi(p_0 - p_\infty)r_1^2 + \pi \sum_{i=1}^{N-1} (p_i - p_\infty)(r_{i+1}^2 - r_i^2)$$

Здесь p_∞ – давление в невозмущенном потоке.

Для тела с минимальным сопротивлением выполняются условия оптимальности: равенство нулю производных X по геометрическим параметрам $r_i, i = 1, \dots, N - 1$. Из первого условия $\partial X/\partial r_1 = 0$ следует соотношение, связывающее параметры r_1 и r_2

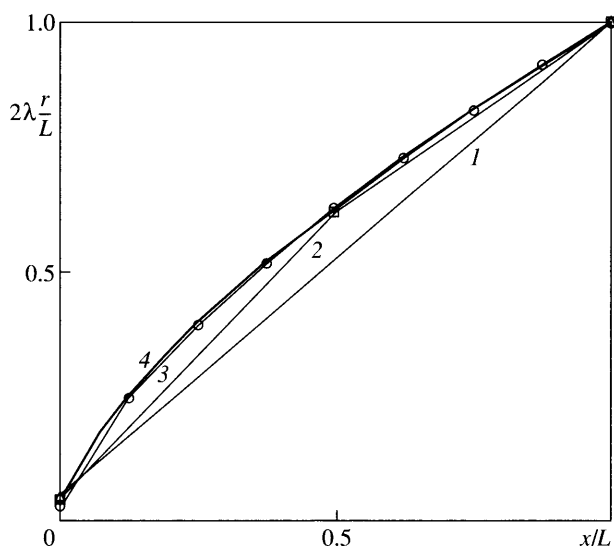
$$r_2 = \sqrt{4r_1^2 + 2r_1((p_0 - p_c)/k + R/(N - 1))} - r_1$$

Остальные условия оптимальности устанавливают связь между тройками параметров r_{i-1}, r_i, r_{i+1} ($i = 2, \dots, N - 1$)

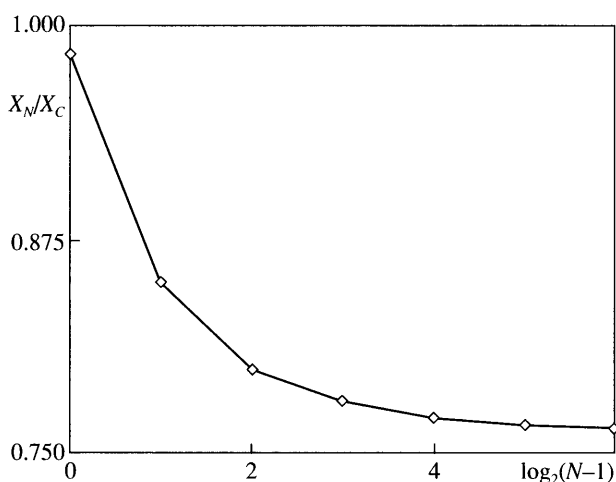
$$r_{i+1} = \sqrt{8r_i^2 - (r_{i-1} + r_i)^2} - r_i$$

Таким образом, задав некоторое значение r_1 , можно последовательно вычислить значения всех геометрических параметров. Решение – значение r_1 , для которого выполняется условие $r_N = R$. Экстремальное значение r_1 не равно нулю. Следовательно, оптимальное тело затуплено по торцу.

Течение около головной части рассчитывалось в рамках уравнений Эйлера. Выделялись две расчетные области. Общая граница областей лежала в поперечном сечении, удаленном от вершины на расстояние, равное диаметру переднего торца. В окрестности торца расчетная сетка строилась в сферической системе координат, и уравнения Эйлера интегрировались по схеме Годунова с использованием установления по времени [1]. Узлы сгущались к излому контура. На поверхности тела размещалось 207 узлов. В сверхзвуковой области течения расчет проводился в цилиндрической системе координат маршевым методом [4]. Уравнения движения интегрировались по схеме Мак-Кормака. Параметры течения в начальном поперечном сечении определялись из решения для первой расчетной области. В обоих случаях разрыв газодинамических переменных на головном скачке уплотнения выделялся строго. В направлении от тела к скачку уплотнения число узлов сетки равнялось 84. Для отношения удельных теплоемкостей принято $\gamma = 1.4$.



Фиг. 1. Головные части с ломаной образующей при $M_\infty = 2$ и $\lambda = 4$: из 2, 3, 9, 65 отрезков (1–4)



Фиг. 2. Сопротивление X_N головных частей с ломаной образующей по отношению к сопротивлению X_C конуса в зависимости от числа отрезков N

2. Результаты исследования. Для конуса, имеющего удлинение $\lambda = 4$ и обтекаемого при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 2$, имеем $p_c/p_\infty = 1.17$ и $M_c = 1.9$. Осредненное давление на поверхности торца составляет $p_0/p_\infty = 5.21$.

Сопоставим оптимальные головные части, получаемые при разном наборе узловых точек. При $N = 2$ экстремальное тело – усеченный конус (фиг. 1), имеет сопротивление X_N на 1.6%, меньшее по сравнению с сопротивлением X_C исходного конуса (фиг. 2). При $N = 3$ уменьшение сопротивления по отношению к конусу составляет 15%, а при $N = 9$ – 21.8%. Изменение формы тела и его сопротивления в зависимости от числа параметров демонстрирует сходимость к предельному решению.

При стремлении $N \rightarrow \infty$ первое условие оптимальности $dX/dr_1 = 0$ определяет производную $r' = (r_2 - r_1)/\Delta x$ в месте стыковки с торцом. В результате несложных преобразований получается

$$r' = 0.5R/L + 0.5\sqrt{M_c^2 - 1}(p_0/p_c - 1)/(\gamma M_c^2)$$

Для остальных точек при $i > 1$ выполняется соотношение

$$2r_i(r''_{xx})_i + (r'_x)_i^2 = 0$$

где $(r'_x)_i$, $(r''_{xx})_i$ – первая и вторая производные в точке x_i , соответственно.

Отсюда следует, что образующая оптимального тела описывается степенной зависимостью $r = (A + Bx)^n$ с $n = 2/3$. Коэффициенты A и B вычисляются из граничных условий $R = (A + BL)^n$ и $(r'_x)_1 = nBA^{n-1}$. Отметим, что единственным геометрическим параметром, зависящим от условий набегающего потока и удлинения головной части, является радиус переднего торца (или угол наклона образующей в месте стыковки с торцом). Для случая $M_\infty = 2$, $\lambda = 4$ имеем $(r'_x)_1 = 0.616$, что соответствует углу наклона 31.7° . При этом радиус переднего торца в долях радиуса основания составляет $r_1/R = 0.0182$. Сопротивление данного тела на 23.6% меньше сопротивления конуса. Для сравнения приведем данные для ряда известных головных частей. Тело Ньютона имеет меньший размер торца $r_1/R = 0.0032$ и большее сопротивление – на 4.5%. Тело степенной формы с показателем степени $n = 0.652$ дает уменьшение сопротивления по сравнению с конусом на 23% [3]. Наконец, для оптимального тела из [1] выигрыш составляет 24.8%.

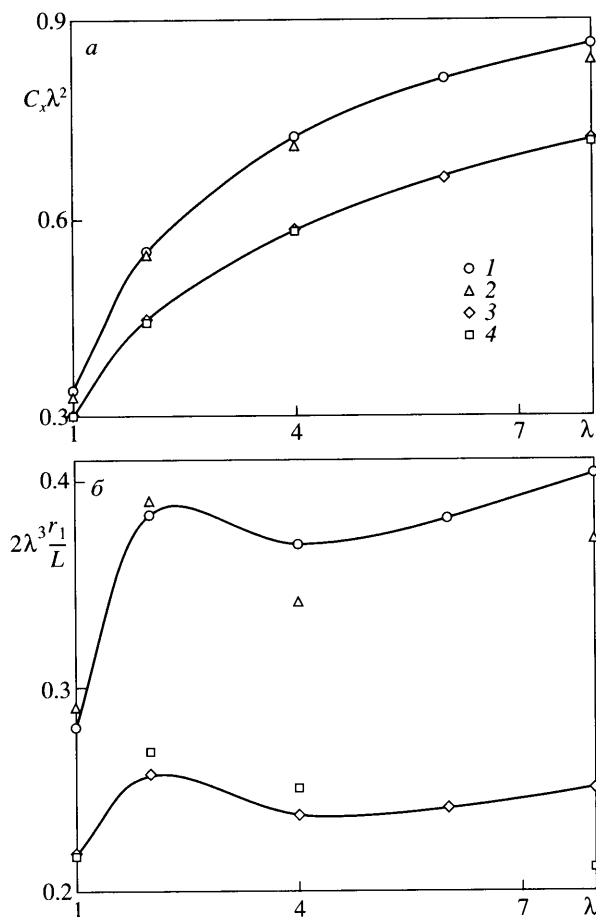
Полученное решение распространяется на более широкий диапазон изменения определяющих параметров, не ограничиваясь случаем тонких тел. Оно образующей принимает следующую зависимость радиуса от продольной координаты

$$r = \frac{L}{2\lambda} \left[\left(\frac{2\lambda r_1}{L} \right)^{3/2} + \left(1 - \left(\frac{2\lambda r_1}{L} \right)^{3/2} \right) \frac{x}{L} \right]^{2/3}$$

Изменяя r_1 , решаем задачу на экстремум функции одного переменного и находим головную часть с минимальным сопротивлением. Результаты представлены для тел с удлинением $\lambda = 1, 2, 4, 6, 8$ при $M_\infty = 2, 4$. Для сопоставления привлечены данные для головных частей с минимальным сопротивлением, построенных численно на основе прямого оптимизационного метода [5]. При вычислении коэффициента сопротивления C_x силы относились к скоростному напору набегающего потока и площади основания.

По значениям сопротивления усеченные тела степенной формы уступают оптимальным формам не более 3% при $M_\infty = 2$ и не более 1% при $M_\infty = 4$ (фиг. 3, а). Наибольшие отличия получены при малых ($\lambda = 1$) и больших ($\lambda = 8$) значениях удлинения. Это объясняется, в первом случае, увеличением погрешностей, связанных с допущением о малости относительной толщины тела. Во втором случае проявляется ограниченность предположения о локальности связи между деформацией формы тела и изменением поверхностного давления. Заметим, что для тел со степенной образующей, не имеющих переднего торца, при варьировании показателя степени n [3] получены значения сопротивления, превышающие значения для усеченных тел с $n = 2/3$. Радиус переднего торца в долях радиуса основания уменьшается с ростом удлинения (фиг. 3, б). По значениям данного геометрического параметра отличие не превышает 15%.

Заключение. Для задачи минимизации волнового сопротивления осесимметричных носовых частей представлено аналитическое построение формы оптимального тела на основе деформации конуса эквивалентного удлинения. Сделано допущение о малости



Фиг. 3. Коэффициент сопротивления C_x головных частей (а) и радиус r_1 переднего торца (б) в зависимости от удлинения λ : 1, 3 – тела степенной формы при $M_\infty = 2$ и 4; 2, 4 – оптимальные тела при $M_\infty = 2$ и 4 [5]

относительной толщины тела. Аэродинамическая нагрузка вычислена по значениям давления на поверхности конуса на основе локальных линейных соотношений с геометрическими параметрами. Получена аппроксимация целевой функции. Значения геометрических параметров определены из необходимых условий экстремума. Показано, что оптимальные тела имеют передний торец и степенную образующую с показателем степени, равным $2/3$. Единственным параметром, зависящим от числа Маха набегающего потока M_∞ и удлинения тела λ , является радиус переднего торца. В диапазоне изменения $\lambda = 1-8$ построены головные части, уступающие по значениям сопротивления не более 3 и 1% при $M_\infty = 2$ и 4 телам, полученным в точной постановке задачи.

Автор благодарит А.Н. Крайко и К.С. Пьянкова, предоставивших вычислительный модуль для расчета течения в окрестности переднего торца тела вращения на основе решения системы уравнений Эйлера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00691).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
2. *Eggers A.J., Jr., Resnikoff M.M., Dennis D.H.* Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic air speeds // NASA. Report № 1306. 1957. 12p.
3. Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы / Под ред. Г.Л. Гродзовского. М.: Машиностроение, 1975. 183 с.
4. *Таковицкий С.А.* Аналитическое решение в задаче построения профиля минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 122–131.
5. *Таковицкий С.А.* К построению осесимметричных головных частей минимального волнового сопротивления // ПММ. 2006. Т. 71. Вып. 3.

Жуковский
e-mail: s.a.t@tsagi.ru

Поступила в редакцию
21.XI.2005