

УДК 532.58

© 2006 г. А. А. КОРОБКИН, Т. И. ХАБАХПАШЕВА

**УДАР ПО ГРАНИЦЕ СЖИМАЕМОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ**

В рамках акустического приближения построено решение плоской нестационарной задачи об ударе по границе жидкости. Жидкость занимает нижнюю полуплоскость и состоит из двух слоев с заданными скоростями звука и плотностью. Верхний слой имеет постоянную глубину и ограничен сверху пластиной, нормальная скорость которой задана. Решение построено с помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа. Численные расчеты выполнены для удара поршнем через жесткий экран и удара струей с аэрированной головной частью по жесткой стенке. Показано, что наличие прослойки с редуцированной скоростью звука и/или плотностью существенно изменяет эволюцию распределения гидродинамического давления по ударяющей поверхности: абсолютный максимум давления уменьшается, но давления значительной амплитуды длятся дольше, чем в случае однородной жидкости.

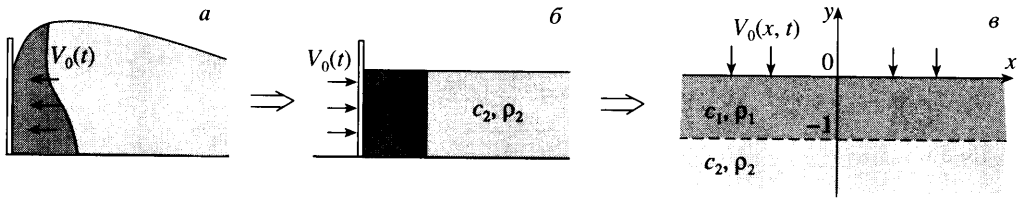
*Ключевые слова:* удар, двухслойная жидкость, акустическое приближение, гидродинамическое давление.

В приложениях достаточно часто встречается ситуация, когда обрушающаяся волна ударяет по вертикальной стенке, причем головная часть волны вспенена (фиг. 1, *a*), или тело с почти плоским дном падает на поверхность воды, верхний слой которой аэрирован (фиг. 1, *б*). Наличие таких прослоек между основной частью жидкости и твердой ударяющей поверхностью может существенно изменить распределение гидродинамического давления по смоченной поверхности тела, амплитуду давлений и их эволюцию. При этом присутствие воздушных пузырьков в жидкости может приводить как к уменьшению ударных давлений, так и к их увеличению по сравнению со случаем неаэрированной жидкости. Вторая возможность представляет несомненный интерес.

В данной работе получено, что в момент удара наличие прослойки приводит к уменьшению гидродинамического давления на ударяющую поверхность, но затухание давления в случае однородной жидкости происходит быстрее. В результате, начиная с некоторого момента времени, давление на границе в жидкости со слоем превышает давление в однородной жидкости, и эти повышенные давления сохраняются достаточно долго.

Для исследования роли прослойки с редуцированной по сравнению с основной жидкостью скоростью звука и/или плотностью рассматривается плоская линейная задача об ударе по нижней полуплоскости, занятой двухслойной сжимаемой жидкостью. Такая задача допускает решение в квадратурах, что позволяет детально исследовать характеристики течения и распределения давления. К такой постановке сводится, в частности, важная задача об ударе вертикальной стенкой по жидкому слою с аэрированной прослойкой. Аэрированная прослойка может создаваться искусственно для защиты стенки от больших гидродинамических давлений или возникать вследствие обрушения волн вблизи вертикальных береговых сооружений.

Заметим, что задача об ударе по границе однородной сжимаемой полуплоскости была исследована в осесимметричном [1] и в плоском [2] случаях. Задача об ударе вертикальной стенкой по однородному слою слабо сжимаемой жидкости рассматривалась в [3], а трехмерная задача об ударе струей однородной жидкости по жесткой пластине – в



Фиг. 1. Схема рассматриваемой задачи

[5]. В [4] рассматривалась также задача об ударе по жидкому слою конечной ширины. Во всех случаях были построены поля гидродинамического давления, вызванного ударом. Задача об ударе по двухслойной сжимаемой жидкости в рамках акустического приближения ранее не исследовалась [6].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается плоская нестационарная задача о течении жидкости, вызванном ударом по ее верхней границе (фиг. 1, в). В начальный момент  $t' = 0$  жидкость покоится и занимает нижнюю полуплоскость  $y' < 0$ . Штрихом помечаются размерные переменные. Жидкость состоит из двух слоев:  $-l < y' < 0$  и  $y' < -l$ . Горизонтальная линия  $y' = -l$  соответствует границе раздела слоев, линия  $y' = 0$  – твердой границе области течения. Плотность покоящейся жидкости и скорость звука в ней равны  $c_1, \rho_1$  для верхнего слоя  $-l < y' < 0$ , и  $c_2, \rho_2$  для нижнего слоя  $y' < -l$ . Нестационарное течение двухслойной сжимаемой жидкости вызвано заданным перемещением ее верхней границы. При  $t' > 0$  положение этой границы задается уравнением

$$y' = -(V_0 l / c_1) f_b(x' / l, t' c_1 / l),$$

где  $V_0$  – максимальная величина скорости границы. Функция  $f_b(x, t)$  и ее первые производные предполагаются ограниченными, причем  $f_b(x, 0) = 0, f_b(x, t) \geq 0$ .

Требуется определить распределение гидродинамического давления вдоль подвижной твердой границы при следующих предположениях: 1) жидкость является идеальной и сжимаемой; 2) число Маха задачи  $V_0/c_1$  много меньше единицы; 3)  $c_1/c_2 \leq 1$ ; 4) внешние массовые силы отсутствуют.

Течение двухслойной жидкости описывается в рамках акустического приближения, которое формально справедливо при условии  $V_0/c_1 \ll 1$  и  $V_0/c_2 \ll 1$ . Это приближение можно использовать при скоростях удара малых по сравнению со скоростью звука в каждом из слоев, на стадии, когда перемещение твердой границы мало по сравнению с толщиной верхнего слоя  $l$ .

Ниже используются безразмерные переменные, обозначения которых отличаются от размерных отсутствием штриха. Толщина верхнего слоя  $l$  принимается за масштаб длины, а скорость  $V_0$  – за масштаб скорости жидких частиц. Отношение  $l/c_1$  выбирается в качестве масштаба времени, а произведение  $\rho_1 c_1 V_0$  – в качестве масштаба гидродинамического давления. На начальном этапе процесса, который рассматривается в настоящей работе, перемещения жидких частиц малы по сравнению с выбранным масштабом длины. Это позволяет в качестве первого приближения снести граничные условия на начальные положения твердой границы  $y = 0$  и границы раздела слоев  $y = -1$ , а также линеаризовать граничные условия и уравнения движения вблизи начального состояния покоя.

Указанная линеаризация приводит к хорошо известному акустическому приближению, в рамках которого течение жидкости описывается потенциалами скоростей  $\phi_1(x, y, t)$  в верхнем слое  $-1 < y < 0$  и  $\phi_2(x, y, t)$  в нижнем слое  $y < -1$ . Потенциалы  $\phi_j(x, y, t)$ ,  $j = 1, 2$ , удовлетворяют в безразмерных переменных волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \quad (-1 < y < 0), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} = m^2 \left( \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \right) \quad (y < -1), \quad (1.2)$$

где  $m = c_2/c_1$ ,  $m \geq 1$ , линеаризованному условию на твердой границе

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = f(x, t) \quad (y = 0), \quad (1.3)$$

где  $f(x, t) = -(\partial f_j / \partial t)(x, t)$ , линеаризованным динамическому и кинематическому условиям на границе раздела слоев

$$\phi_2 = k\phi_1, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad (y = -1), \quad (1.4)$$

где  $k = \rho_1/\rho_2$ , и тождественно равны нулю при  $t < 0$ . Задача допускает значительные упрощения в следующих случаях, представляющих практический интерес: 1) удар по слою однородной сжимаемой жидкости,  $k \ll 1$ ; 2) задача о землетрясении,  $k \gg 1$ ; 3) несжимаемая жидкость в нижнем слое,  $m \gg 1$ ; 4) одномерная задача об ударе,  $f_x(x, t) \equiv 0$ ; 5) малая толщина верхнего слоя,  $|f_x(x, t)| \ll 1$ . Чтобы определить области применимости указанных упрощенных моделей, требуется построить решение исходной задачи (1.1)–(1.4) и детально исследовать его.

В рамках акустического приближения распределение гидродинамического давления вдоль твердой границы  $y = 0$  определяется в безразмерных переменных формулой  $p_1(x, 0, t) = -(\partial \phi_1 / \partial t)(x, 0, t)$ . Требуется определить распределение потенциала  $\phi_1(x, 0, t)$  вдоль твердой границы.

## 2. Решение задачи методом интегральных преобразований.

Преобразование Фурье по горизонтальной координате  $x$  и преобразование Лапласа по времени  $t$ , примененные к уравнениям (1.1)–(1.4), дают

$$\phi_j^F(\xi, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(x, y, t) e^{-ix\xi} dx, \quad \phi_j(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j^F(\xi, y, t) e^{i\xi x} d\xi$$

$$\phi_j^L(x, y, s) = \int_0^{\infty} \phi_j(x, y, t) e^{-st} dt \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

$$\phi_j(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi_j^L(x, y, s) e^{st} dt \quad (a > 0)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \phi_1^{LF} = (s^2 + \xi^2) \phi_1^{LF} \quad (-1 < y < 0)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \phi_2^{LF} = \left( \frac{s^2}{m^2} + \xi^2 \right) \phi_2^{LF} \quad (y < -1)$$

$$\frac{d}{dy} \phi_1^{LF} = f^{LF}(\xi, s) \quad (y = 0)$$

$$\phi_2^{LF} = k\phi_1^{LF}, \quad \frac{d}{dy}\phi_2^{LF} = \frac{d}{dy}\phi_1^{LF} \quad (y = -1)$$

$$\phi_2^{LF} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty)$$

Откуда

$$\phi_1^{LF}(\xi, y, s) = A(\xi, s) \sinh[(y+1)\sqrt{s^2 + \xi^2}] + B(\xi, s) \cosh[(y+1)\sqrt{s^2 + \xi^2}] \quad (-1 < y < 0)$$

$$\phi_2^{LF}(\xi, y, s) = \phi_2^{LF}(\xi, -1, s) \exp[(y+1)\sqrt{s^2/m^2 + \xi^2}] \quad (y < -1)$$

Условия на границе раздела слоев ( $y = -1$ ) и на твердой границе ( $y = 0$ ) приводят к соотношениям

$$kB(\xi, s) = \phi_2^{LF}(\xi, -1, s), \quad \sqrt{s^2 + \xi^2}A(\xi, s) = \sqrt{s^2/m^2 + \xi^2}\phi_2^{LF}(\xi, -1, s)$$

$$A(\xi, s) \cosh[\sqrt{s^2 + \xi^2}] + B(\xi, s) \sinh[\sqrt{s^2 + \xi^2}] = f^{LF}(\xi, s)/\sqrt{s^2 + \xi^2}$$

Для распределения потенциала скоростей по твердой границе находим в изображениях

$$\begin{aligned} \phi_1^{LF}(\xi, 0, s) &= \\ &= \frac{f^{LF}(\xi, s)k\sqrt{s^2/m^2 + \xi^2} \sinh[\sqrt{s^2 + \xi^2}] + \sqrt{s^2 + \xi^2} \cosh[\sqrt{s^2 + \xi^2}]}{\sqrt{s^2 + \xi^2} k\sqrt{s^2/m^2 + \xi^2} \cosh[\sqrt{s^2 + \xi^2}] + \sqrt{s^2 + \xi^2} \sinh[\sqrt{s^2 + \xi^2}]} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Формулу (2.1) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \phi_1^{LF}(\xi, 0, s) &= \frac{f^{LF}(\xi, s)1 + q(\xi, s) \exp[-2\sqrt{s^2 + \xi^2}]}{\sqrt{s^2 + \xi^2}1 - q(\xi, s) \exp[-2\sqrt{s^2 + \xi^2}]} = \\ &= \frac{f^{LF}(\xi, s)}{\sqrt{s^2 + \xi^2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_{\infty}^n f^{LF}(\xi, s) \frac{\exp[-2n\sqrt{s^2 + \xi^2}]}{\sqrt{s^2 + \xi^2}} + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} (q^n(\xi, s) - q_{\infty}^n) f^{LF}(\xi, s) \frac{\exp[-2n\sqrt{s^2 + \xi^2}]}{\sqrt{s^2 + \xi^2}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$q(\xi, s) = \frac{\sqrt{s^2 + \xi^2} - k\sqrt{s^2/m^2 + \xi^2}}{\sqrt{s^2 + \xi^2} + k\sqrt{s^2/m^2 + \xi^2}}, \quad q_{\infty} = \frac{1 - k/m}{1 + k/m}$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} q(\xi, s) = q_{\infty}, \quad k/m = \rho_1 c_1 / \rho_2 c_2$$

В некоторых специальных случаях формула (2.2) упрощается. При  $k = 0$  имеем  $q(\xi, s) = q_{\infty} = 1$  и третье слагаемое в (2.2) пропадает. Этот случай соответствует удару по слою однородной сжимаемой жидкости конечной глубины. При  $k = \infty$  имеем  $q(\xi, s) = q_{\infty} = -1$ , и третье слагаемое в (2.2) тождественно равно нулю. Этот случай соответствует удару по дну слоя сжимаемой жидкости конечной глубины с верхней свободной границей.

Формула (2.2) приводит к следующему разложению искомого решения:

$$\phi_1(x, 0, t) = \phi_1^{(0)}(x, 0, t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_{\infty}^n \phi_1^{(n)}(x, 0, t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)}(x, 0, t) \quad (2.3)$$

Требуется вычислить каждое слагаемое в формуле (2.3).

Чтобы получить формулу, удобную для вычисления  $\phi_1^{(0)}(x, 0, t)$ , используются следующие равенства:

$$[J_0(\xi t)]^L(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + \xi^2}} \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_0(\xi t) e^{i\xi u} d\xi = \frac{2}{\sqrt{t^2 - u^2}} H(t - |u|) \quad (2.5)$$

где  $t > 0$  и  $H(z) = 1$  при  $z > 0$ ,  $H(z) = 0$  при  $z \leq 0$ . Сравнивая представления (2.2) и (2.3) с учетом (2.4), получаем

$$[\phi_1^{(0)}]^F(\xi, 0, t) = \int_0^t f^F(\xi, t - \tau) J_0(\xi \tau) d\tau$$

Обращая преобразование Фурье, находим с помощью (2.5)

$$\begin{aligned} \phi_1^{(0)}(x, 0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_0^t f(x_0, t - \tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\xi \tau) e^{i\xi(x-x_0)} d\xi \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0x-(t-\tau)}^{tx+(t-\tau)} \int \frac{f(x_0, \tau) dx_0}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-x_0)^2}} d\tau \end{aligned}$$

Замена переменной интегрирования  $x_0 = x + (t - \tau)\cos\theta$  приводит к окончательной формуле

$$\phi_1^{(0)}(x, 0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} f[x + (t - \tau)\cos\theta, \tau] d\theta d\tau$$

которая дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial t}(x, 0, t) &= f(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} f_x[x + (t - \tau)\cos\theta, \tau] \cos\theta d\theta d\tau = \\ &= f(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_{0x-(t-\tau)}^{tx+(t-\tau)} \int \frac{(x_0 - x) f_x(x_0, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-x_0)^2}} dx_0 d\tau \end{aligned} \quad (2.6)$$

Эта формула определяет распределение гидродинамического давления вдоль ударяющей поверхности для бесконечно глубокой однослойной акустической среды при произвольном распределении нормальной скорости границы.

Чтобы получить формулу для  $\phi_1^{(n)}(x, 0, t)$ ,  $n \geq 1$ , используются (2.5) и равенство

$$[J_0[\xi\sqrt{t^2-4n^2}]H(t-2n)]^L(\xi, s) = \frac{e^{-2n\sqrt{s^2+\xi^2}}}{\sqrt{s^2+\xi^2}} \quad (2.7)$$

Находим

$$\begin{aligned} \phi_1^{(n)}(x, 0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{2n}^t f(x_0, t-\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} J_0[\xi\sqrt{\tau^2-4n^2}] e^{i\xi(x-x_0)} d\xi \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{2n}^t \int_0^{\pi} f[x + \sqrt{\tau^2-4n^2} \cos\theta, t-\tau] d\theta d\tau \end{aligned}$$

где  $\phi_1^{(n)}(x, 0, t) \equiv 0$  при  $t \leq 2n$ . Производная по времени от функции  $\phi_1^{(n)}(x, 0, t)$  равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial t}(x, 0, t) &= f(x, t-2n) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{t-2n} \frac{t-\tau}{(t-\tau)^2-4n^2} \int_{x-a_n(t-\tau)}^{x+a_n(t-\tau)} \frac{(x_0-x)f_x(x_0, \tau) dx_0}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-x_0)^2-4n^2}} d\tau \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$a_n(t) = \sqrt{t^2-4n^2} \quad t \geq 2n$$

Формула (2.6) получается из формулы (2.8) при  $n = 0$ . Формулы (2.8) и (2.6) позволяют вычислить распределение гидродинамического давления вдоль ударяющей поверхности для однослойной жидкости конечной глубины, когда функции  $\psi^{(n)}(x, 0, t)$  тождественно равны нулю для любого  $n$ .

Для вычисления функций  $\psi^{(n)}(x, 0, t)$  потребуются две новые функции  $K_n(\xi, t)$  и  $Q_n(\xi, t)$ , которые определяются своими преобразованиями Лапласа

$$\begin{aligned} Q_n^L(\xi, s) &= q^n(\xi, s) - q_\infty^n \\ K_n^L(\xi, s) &= Q_n^L(\xi, s) \frac{\exp[-2n\sqrt{s^2+\xi^2}]}{\sqrt{s^2+\xi^2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Важно отметить, что  $q(\xi, s) = \bar{q}(s/|\xi|)$ , где

$$\bar{q}(z) = \frac{1-\gamma G(z)}{1+\gamma G(z)}, \quad G(z) = \frac{\sqrt{z^2+m^2}}{\sqrt{z^2+1}}, \quad \gamma = \frac{k}{m}$$

$$Q_n^L(\xi, s) \rightarrow 0 \quad (|s| \rightarrow \infty)$$

Следовательно,

$$Q_n(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} Q_n^L(\xi, s) e^{st} ds = \frac{|\xi|}{2\pi i} \int_{a/|\xi|-i\infty}^{a/|\xi|+i\infty} [\bar{q}^n(z) - q_\infty^n] e^{z|\xi|} dz$$

$$Q_n(\xi, t) = |\xi| \bar{Q}_n(t|\xi|), \quad \bar{Q}_n^L(z) = \bar{q}^n(z) - q_\infty^n$$

Функция  $G(z)$  определена на комплексной плоскости  $z$  с двумя симметричными разрезами вдоль отрезков  $(i, im)$  и  $(-im, -i)$  мнимой оси  $\text{Re}(z) = 0$ . Ветвь функции  $G(z)$  выбирается таким образом, что на берегах разрезов

$$G(+0 + i\lambda) = -i\bar{G}(\lambda), \quad G(-0 + i\lambda) = +i\bar{G}(\lambda)$$

$$G(+0 - i\lambda) = +\bar{G}(\lambda), \quad G(-0 - i\lambda) = -i\bar{G}(\lambda)$$

$$1 < \lambda < m, \quad \bar{G}(\lambda) = \sqrt{(m^2 - \lambda^2)/(\lambda^2 - 1)}$$

Для расчета функции  $\bar{Q}_n(t)$  используется теорема Коши, которая дает

$$\bar{Q}_n(t) = -\frac{2}{\pi} \int_1^m \sin[2n\varphi(\lambda)] \sin[\lambda t] d\lambda, \quad \varphi(\lambda) = \arctan[\gamma\bar{G}(\lambda)] \tag{2.10}$$

$$Q_n(\xi, t) = -\frac{2}{\pi} \xi \int_1^m \sin[2n\varphi(\lambda)] \sin[\lambda t \xi] d\lambda$$

Уравнения (2.7), (2.9) и (2.10) дают

$$K_n(\xi, t) = \int_{2n}^t Q_n(\xi, t - \tau) J_0[\xi\sqrt{\tau^2 - 4n^2}] d\tau \quad (t > 2n) \tag{2.11}$$

$$K_n(\xi, t) \equiv 0 \quad (t \leq 2n)$$

Важно отметить, что  $K(-\xi, t) = K(\xi, t)$ .

Используя тождество  $f^F(\xi, t) = (f_x)^F(\xi, t)/i\xi$  и сравнивая два представления решения (2.2) и (2.3), получаем

$$(\Psi^{(n)})^F(\xi, t) = \int_{2n}^t (f_x)^F(\xi, t - \tau) \frac{K_n(\xi, \tau)}{i\xi} d\tau \tag{2.12}$$

$$\Psi^{(n)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{2n-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x_0, t - \tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_n(\xi, \tau)}{i\xi} e^{i\xi(x-x_0)} d\xi \right] dx_0 d\tau$$

Уравнения (2.10) и (2.11) дают

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_n(\xi, \tau)}{i\xi} e^{i\xi(x-x_0)} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_n(\xi, \tau)}{\xi} \sin[\xi(x-x_0)] d\xi = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{2n-1}^{\tau m} \sin[2n\varphi(\lambda)] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} J_0[\xi\sqrt{\tau_0^2 - 4n^2}] \cos[\xi(\lambda(\tau - \tau_0) - (x-x_0))] d\xi - \right. \\ &\left. - \int_{-\infty}^{\infty} J_0[\xi\sqrt{\tau_0^2 - 4n^2}] \cos[\xi(\lambda(\tau - \tau_0) + (x-x_0))] d\xi \right] d\lambda d\tau_0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.12) и учитывая (2.5), получаем

$$\Psi^{(n)}(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{2n-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x_0, t-\tau) \int_1^m \sin[2n\varphi(\lambda)] \times \\ \times (I_n(\tau, \lambda, x-x_0) - I_n(\tau, \lambda, x_0-x)) d\lambda dx_0 d\tau \\ I_n(\tau, \lambda, x) = \int_{2n}^{\tau} \frac{d\tau_0}{\sqrt{\tau_0^2 - 4n^2 - [x + \lambda(\tau - \tau_0)]^2}} \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (z > 0), \quad \frac{1}{\sqrt{z}} = 0 \quad (z \leq 0)$$

Формулу (2.14) можно представить в виде

$$\Psi^{(n)}(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{2n-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} [f_x(x-x_0, t-\tau) - f_x(x+x_0, t-\tau)] \times \\ \times \int_1^m \sin[2n\varphi(\lambda)] \int_{2n}^{\tau} \frac{d\tau_0}{\sqrt{g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0)}} d\lambda dx_0 d\tau \quad (2.15)$$

$$g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0) = \tau_0^2 - 4n^2 - (x_0 + \lambda(\tau - \tau_0))^2$$

Интеграл в (2.15) по  $\tau_0$  равен нулю если  $g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0) < 0$  на интервале интегрирования  $2n < \tau_0 < \tau$ . Представление

$$g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0) = -(\lambda^2 - 1)\tau_0^2 - 4n^2 - \sigma^2 + 2\sigma\lambda\tau_0, \quad \sigma = \lambda\tau + x_0$$

этой функции и неравенства  $\lambda > 1, \tau_0 > 2n$  показывают, что  $g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0) > 0$  только если  $\sigma > 0$ . Квадратичное уравнение  $g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0) = 0$  относительно  $\tau_0$  имеет два действительных корня, занумерованных так, что  $\tau_0^{(1)} < \tau_0^{(2)}$ , только при условии

$$\sigma > 2n\sqrt{\lambda^2 - 1} \quad (2.16)$$

Эти корни вычисляются по формулам

$$\tau_0^{(1)} = \frac{\sigma\lambda - D}{\lambda^2 - 1}, \quad \tau_0^{(2)} = \frac{\sigma\lambda + D}{\lambda^2 - 1}, \quad D = \sqrt{\sigma^2 - 4n^2(\lambda^2 - 1)}$$

Ясно, что  $g(2n, \tau, \lambda, x_0) \leq 0$ . Можно проверить, что неравенство  $(\partial g / \partial \tau_0)(2n, \tau, \lambda, x_0) > 0$  имеет место при условии (2.16). Следовательно, если уравнение  $g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0) = 0$  имеет два действительных корня, то  $\tau_0^{(1)} \geq 2n$ . Однако, возможно, что  $\tau_0^{(1)} > \tau$  и интеграл в (2.15) по переменной  $\tau_0$  равен нулю даже, если неравенство (2.16) выполняется.

Если  $g(\tau, \tau, \lambda, x_0) = \tau^2 - 4n^2 - x_0^2 > 0$ , тогда уравнение  $g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0) = 0$  имеет два действительных корня; неравенство (2.16) выполняется;  $2n < \tau_0^{(1)} < \tau; \tau_0^{(2)} > \tau$ . В этом случае



$$\int_{2n\sqrt{\lambda^2-1}}^{\tau} \frac{d\tau_0}{\sqrt{g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0)}} = \int_{\tau_0^{(1)}}^{\tau} \frac{d\tau_0}{\sqrt{g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} \int_{\tau_0^{(1)}}^{\tau} \frac{d\tau_0}{\sqrt{(\tau_0 - \tau_0^{(1)})(\tau_0^{(2)} - \tau_0)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda^2-1}} \arcsin \sqrt{\frac{\tau - \tau_0^{(1)}}{\tau_0^{(2)} - \tau_0^{(1)}}} \quad (x_0^2 < \tau^2 - 4n^2) \quad (2.17)$$

Если  $x_0^2 > \tau^2 - 4n^2$  и (2.16) выполняется, то  $\tau_0^{(1)} < \tau$  только при условии  $(\partial g / \partial \tau_0)(\tau, \tau, \lambda, x_0) < 0$ . Получаем систему трех неравенств

$$x_0^2 > \tau^2 - 4n^2 \quad \sigma > 2n\sqrt{\lambda^2-1} \quad \sigma\lambda < \tau(\lambda^2-1) \quad (2.18)$$

Если неравенства (2.18) выполняются, то  $2n < \tau_0^{(1)} < \tau_0^{(2)} < \tau$  и (2.17) дает

$$\int_{2n\sqrt{\lambda^2-1}}^{\tau} \frac{d\tau_0}{\sqrt{g(\tau_0, \tau, \lambda, x_0)}} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2-1}} \quad (2.19)$$

Из двух последних неравенств (2.18) следует

$$2n\sqrt{\lambda^2-1} < \sigma < \tau(\lambda^2-1)/\lambda \quad (\sigma = \lambda\tau + x_0) \quad (2.20)$$

$$\lambda > \tau/\sqrt{\tau^2-4n^2} \Rightarrow 2n\sqrt{\lambda^2-1} - \lambda\tau < x_0 < -\tau/\lambda$$

Последние неравенства означают, что  $x_0 < 0$ . Первое неравенство (2.18) дает

$$x_0 < -\sqrt{\tau^2-4n^2} \quad (2.21)$$

Неравенство (2.20) показывает, что  $-\sqrt{\tau^2-4n^2} < -\tau/\lambda$ . Следовательно, решения неравенств (2.20) и (2.21) существуют тогда и только тогда, когда

$$2n\sqrt{\lambda^2-1} - \lambda\tau < -\sqrt{\tau^2-4n^2}$$

Следовательно, уравнение (2.19) имеет силу в случае

$$-a_n(\tau, \lambda) < x_0 < -\sqrt{\tau^2-4n^2}$$

где  $a_n(\tau, \lambda) = \lambda\tau - 2n\sqrt{\lambda^2-1}$ , если неравенство (2.20) выполнено.

Проведенный анализ показывает, что правую часть формулы (2.15) можно представить в виде суммы

$$\psi^{(n)}(x, t) = \psi_1^{(n)}(x, t) + \psi_2^{(n)}(x, t)$$

$$\psi_1^{(n)}(x, t) = \frac{2}{\pi^2} \int_{2n\sqrt{\lambda^2-1}}^{t+\sqrt{\tau^2-4n^2}} \int_{2n\sqrt{\lambda^2-1}}^{\tau} [f_x(x-x_0, t-\tau) - f_x(x+x_0, t-\tau)] \times \quad (2.22)$$

$$\times \int_1^m \frac{\sin[2n\phi(\lambda)]}{\sqrt{\lambda^2-1}} \arcsin \sqrt{\frac{\tau - \tau_0^{(1)}}{\tau_0^{(2)} - \tau_0^{(1)}}} d\lambda dx_0 d\tau$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(n)}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{m}{\sqrt{m^2-1}}}^t \int_{\frac{\tau}{\sqrt{t^2-4n^2}}}^m \frac{\sin[2n\varphi(\lambda)]}{\sqrt{\lambda^2-1}} \times \\ &\quad -\sqrt{\tau^2-4n^2} \\ &\times \int_{-a_n(\tau, \lambda)} [f_x(x-x_0, t-\tau) - f_x(x+x_0, t-\tau)] dx_0 d\lambda d\tau \quad (2.23) \\ \tau_0^{(1)} &= \tau_0^{(1)}(\tau, \lambda, x_0), \quad \tau_0^{(2)} = \tau_0^{(2)}(\tau, \lambda, x_0) \end{aligned}$$

**3. Кусочно-постоянное распределение скорости удара.** Рассмотрим важный частный случай, когда распределение скорости удара описывается ступенчатой функцией

$$f_x(x, t) = \sum_{N=1}^{N_*} S_N(t) \delta(x-x_N), \quad S_N(t) = f(x_N+0, t) - f(x_N-0, t) \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.6), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial t}(x, 0, t) &= f(x, t) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^t \left( \sum_{N=1}^{N_*} \frac{(x_N-x) S_N(\tau)}{(t-\tau) \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-x_N)^2}} H[(t-\tau)^2 - (x-x_N)^2] \right) d\tau = f(x, t) + \quad (3.2) \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{N=1}^{N_*} (x_N-x) \int_0^{t-|x-x_N|} \frac{S_N(\tau) d\tau}{(t-\tau) \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-x_N)^2}} H[(t-|x-x_N|)] \end{aligned}$$

В частности, если скорость удара не меняется со временем  $f(x, t) = H(t)f_0(x)$ , из (3.2) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial t}(x, 0, t) &= f_0(x) H(t) - \frac{1}{2} \sum_{N=1}^{N_*} S_N \frac{x-x_N}{|x-x_N|} H(t-|x-x_N|) + \quad (3.3) \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{N=1}^{N_*} S_N \arcsin\left(\frac{x-x_N}{t}\right) H(t-|x-x_N|) \end{aligned}$$

Соответственно из уравнений (2.8) и (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial t}(x, 0, t) &= f(x, t-2n) + \frac{1}{\pi} \sum_{N=1}^{N_*} (x_N-x) H(t-\sqrt{4n^2+(x-x_N)^2}) \times \\ &\times \int_0^{t-\sqrt{4n^2+(x-x_N)^2}} \frac{(t-\tau) S_N(\tau) d\tau}{[(t-\tau)^2-4n^2] \sqrt{(t-\tau)^2-4n^2-(x-x_N)^2}} \quad (3.4) \end{aligned}$$

Уравнения (3.2) и (3.4) приводят к следующей формуле, полезной в численных расчетах

$$\frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial t}(x, 0, t) = \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial t}(x, 0, \sqrt{t^2 - 4n^2}) \quad (n \geq 1) \tag{3.5}$$

Чтобы вычислить производную по времени от функции  $\psi_1^{(n)}(x, t)$  в случае  $f(x, t) = f_0(x)H(t)$ , где  $f_0(x)$  – кусочно-постоянная функция, обозначим интеграл относительно  $\lambda$  в уравнении (2.22) через  $L_n(\tau, x_0)$  и примем во внимание, что  $f_t(x, t) = 0$  при  $t > 0$ . В этом случае уравнение (3.1) дает

$$\frac{\partial \psi_1^{(n)}}{\partial t}(x, t) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{N=1}^{N_*} S_N [L_n(t, x - x_N) - L_n(t, x_N - x)] H(t^2 - 4n^2 - (x - x_N)^2) \tag{3.6}$$

Выражение для функции  $L_n(t, x_0)$  может быть упрощено, если ввести новую переменную, переменную интегрирования  $\lambda = \cosh z$ . После алгебраических преобразований получаем

$$L_n(t, x_0) = \int_1^{\ln(m + \sqrt{m^2 - 1})} \sin[2n\varphi(\lambda(z))] \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{t + x_0 \lambda(z)}{2D(z)}} dz$$

$$D(z) = [(t\lambda(z) + x_0)^2 - 4n^2(\lambda^2(z) - 1)]^{1/2}$$

Уравнение (2.26) при  $f(x, t) = f_0(x)H(t)$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2^{(n)}}{\partial t}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_t^m \frac{\sin[2n\varphi(\lambda)]}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \times \\ &\times \int_{-a_n(t, \lambda)}^{-\sqrt{t^2 - 4n^2}} [f_0'(x - x_0) - f_0'(x + x_0)] dx_0 d\lambda H\left(t - \frac{2nm}{\sqrt{m^2 - 1}}\right) \end{aligned}$$

Используя равенство

$$\int_{-a_n(t, \lambda)}^{-\sqrt{t^2 - 4n^2}} \delta(x_0 - [x - x_N]) dx_0 = H(x - x_N + a_n(t, \lambda)) H(x_N - x - \sqrt{t^2 - 4n^2})$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2^{(n)}}{\partial t}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{N=1}^{N_*} S_N H(x_N - x - \sqrt{t^2 - 4n^2}) H(x - x_N + a_n(t, m)) \times \\ &\times \int_{\lambda_1(x_N - x, t)}^m \frac{\sin[2n\varphi(\lambda)]}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda H\left(t - \frac{2nm}{\sqrt{m^2 - 1}}\right) - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{N=1}^{N_*} S_N H(x - x_N - \sqrt{t^2 - 4n^2}) H(x_N - x + a_n(t, m)) \times \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\times \int_{\lambda_1(x-x_N, t)}^m \frac{\sin[2n\varphi(\lambda)]}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda H\left(t - \frac{2nm}{\sqrt{m^2 - 1}}\right)$$

где  $\lambda_1(z, t)$  – корень уравнения  $\lambda_1 t - 2n\sqrt{\lambda_1^2 - 1} = z$  такой, что  $t/\sqrt{t^2 - 4n^2} < \lambda_1 < m$ . Значение интеграла в (3.7) определяется численно с использованием замены  $\lambda = \cosh z$ .

Формулы (3.3), (3.5)–(3.7) служат для расчета распределения гидродинамического давления вдоль верхней границы двухслойной жидкости в случае кусочно-постоянного распределения скорости удара.

**4. Численные результаты.** Расчеты по полученным формулам (3.3)–(3.7) проводились только для случая, когда распределение скорости удара задается кусочно-постоянной функцией, не зависящей от времени. Рассмотрены две практически важные задачи: 1) удар поршнем по двухслойной слабо сжимаемой жидкости (верхняя граница жидкости вне поршня покрыта жесткой пластиной) (фиг. 1, а), 2) удар вертикальной стенкой по жидкой полосе со свободной границей, причем часть жидкой полосы, прилегающая к стенке, аэрирована (фиг. 1, б).

Вторая задача сводится к задаче об ударе по границе двухслойной жидкости, занимающей нижнюю полуплоскость, с помощью многократного четного продолжения потенциала скоростей через линию дна и нечетного – через свободную границу жидкости. Такое продолжение гарантирует выполнение условия непротекания на дне и линеаризованного динамического условия на свободной границе жидкой полосы. При наличии аэрированного слоя жидкости такой подход применим только в случае постоянной толщины этого слоя. В задаче об ударе вертикальной стенкой по полосе однородной сжимаемой жидкости такой подход был использован Франкелем [2]. В рассматриваемом случае этот подход приводит к задаче об ударе по двухслойной жидкости, занимающей нижнюю полуплоскость, причем скорость удара является периодической функцией горизонтальной координаты  $x$ .

Для каждой из указанных задач рассматривались следующие пять случаев:

- 1)  $\rho_1/\rho_2 = 1, c_2/c_1 = 1$  (удар по однородной сжимаемой жидкости бесконечной глубины);
- 2)  $\rho_1/\rho_2 = 0.9, c_2/c_1 = 3$  (удар по двухслойной сжимаемой жидкости, плотность жидкости в верхнем слое на десять процентов меньше, чем плотность жидкости в основной области, скорость звука в верхнем слое в три раза ниже скорости звука в основной области);
- 3)  $\rho_1/\rho_2 = 0.7, c_2/c_1 = 10$  (удар по двухслойной сжимаемой жидкости, плотность жидкости в верхнем слое на 30% меньше, чем плотность жидкости в основной области, скорость звука в верхнем слое в 10 раз ниже скорости звука в основной области);
- 4)  $\rho_1/\rho_2 = 1, c_2/c_1 = 300$  (удар по двухслойной жидкости с несжимаемой жидкостью в нижнем слое, плотности жидкостей равны);
- 5)  $\rho_1/\rho_2 = 0.001, c_2/c_1 = 1$  (удар по слою сжимаемой жидкости конечной глубины вследствие значительной разности плотностей граница раздела слоев может быть приближенно заменена твердым дном).

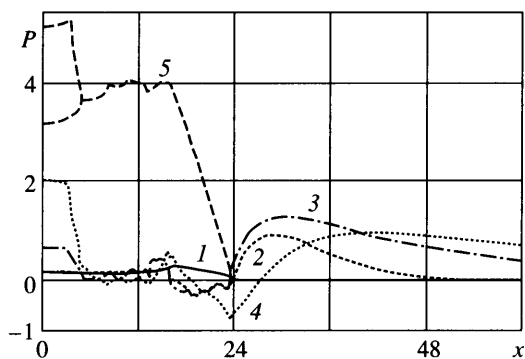
Номера кривых на фиг. 2–6 соответствуют номерам перечисленных случаев.

При ударе поршнем через экран (фиг. 1, а) принималось следующее распределение безразмерной скорости движения верхней границы:

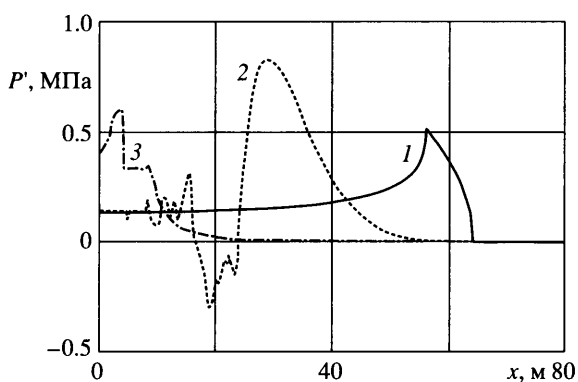
$$f(x) = 1, \quad x \in [-4; 4]; \quad f(x) = 0, \quad x \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$$

$$(x_1 = -4, \quad x_2 = 4, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = -1)$$

т.е. ширина поршня в расчетах была в 8 раз больше толщины верхнего слоя двухслойной жидкости. В силу симметрии распределения давления и течения жидкости при ударе



Фиг. 2. Распределение безразмерного давления на верхней границе ( $y = 0$ ) в момент времени  $t = 20$  и  $t = 20.01$

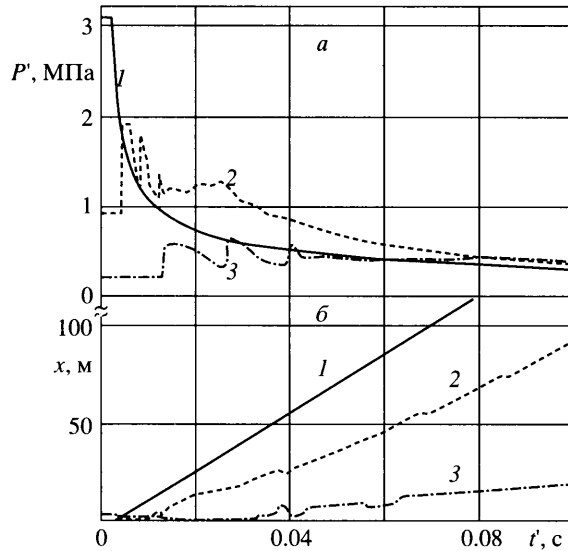


Фиг. 3. Распределение размерного давления на верхней границе ( $y = 0$ ) в момент времени  $t' = 0.04$  с

поршнем результаты расчетов приведены только для  $x > 0$ . Для однородной сжимаемой жидкости в осесимметричном случае эта задача была решена в [1]. Было показано, что при ударе жестким диском радиуса  $R$  через отверстие того же радиуса в безграничном плоском экране давление на диске быстро убывает при  $0 < t' < 2R/c_1$  и равно тождественно нулю при  $t' > 2R/c_1$ .

На фиг. 2 показано распределение безразмерного гидродинамического давления  $P(x, t) = p_1(x, 0, t)$  на верхней границе. Безразмерное время  $t = 20.01$  соответствует моменту, когда отраженная от границы раздела волна пришла на верхнюю границу, а  $t = 20$  – моменту непосредственно перед ее приходом (в безразмерных переменных скорость звука в верхнем слое равна единице). Отраженная от границы раздела слоев волна приходит на верхнюю границу через каждые две единицы безразмерного времени и  $t = 20.01$  соответствует десятой отраженной волне (толщина верхнего слоя в безразмерных переменных равна единице). Заметим, что кривые распределений давления в моменты  $t = 20$  и  $t = 20.01$ , которые помечены на фиг. 2 одним и тем же номером, отличаются друг от друга только вблизи поршня и только для достаточно жестких границ раздела слоев (случаи 3, 4 и 5), когда отраженные волны имеют значительную интенсивность.

При ударе по жидкому слою с твердым дном (кривая 5 на фиг. 2) давление на верхней границе максимально и полностью сосредоточено на промежутке  $|x| < 24$ , так как рас-

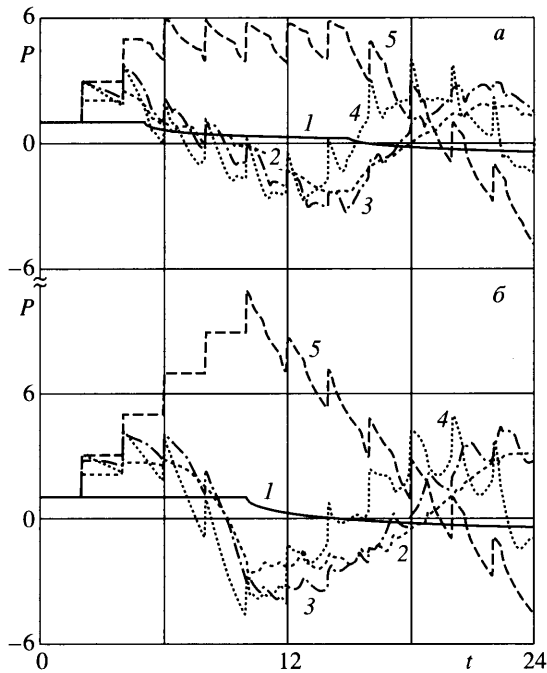


Фиг. 4. Зависимость от времени максимума давления на верхней границе ( $y = 0$ ) (а) и его координаты  $x'$  (б)

пространение возмущений в таком слое происходит – в вертикальном и горизонтальном направлениях – с единичной скоростью. При ударе по однослойной бесконечно глубокой жидкости (кривая 1) возмущенная часть жидкости также ограничена по горизонтали участком  $|x| < 24$ . При  $t = 20$  давление максимально в точке  $x = 16$ , однако давление значительно ниже, чем при ударе по слою ( $\max P_1 = 0.2$ , тогда как  $\max P_5 = 5.7$ ). В остальных случаях за счет передачи возмущений с большей скоростью через нижний слой при  $|x| > 24$  формируется зона повышенного давления. Возмущения переносятся не далее, чем на расстояние  $x = (t - 2)m + 4$  в безразмерных переменных. В случае 2, например,  $P \equiv 0$  при  $|x| > 58$ . При этом давление принимает максимальное значение вне зоны удара на интервале  $t + 4 < |x| < (t - 2)m + 4$ . Максимум давления находится ближе к левой границе этого промежутка, после него давление монотонно затухает с ростом  $x$ .

Результаты расчетов для случаев 1–3 представлены на фиг. 3 и 4, когда в нижнем слое находится морская вода с  $c_2 = 1500$  м/с,  $\rho_2 = 1025$  кг/м<sup>3</sup>, а скорость удара  $V_0 = 2$  м/с. На фиг. 3 показаны распределения давления в момент времени  $t' = 0.04$  с который в безразмерных переменных соответствует  $t = 60.03$ ,  $t = 20.01$  и  $t = 6.003$  для случаев 1–3. Хотя все возмущения распространились не далее чем на расстояние 64 м, что согласуется с расстоянием, на которое распространяется возмущение в однородной жидкости к рассматриваемому моменту времени, распределения давления вдоль верхней границы существенно отличаются друг от друга. При этом абсолютный максимум давления для случаев 2 и 3 выше, чем для однородной жидкости, хотя скорость распространения этого максимума выше для первого случая. Этот результат говорит о том, что для двухслойной жидкости повышенные гидродинамические давления длятся дольше, чем для однородной жидкости.

На фиг. 4 в размерных переменных показаны эволюции максимального давления на верхней границе жидкости (фиг. 4, а) и координаты точек, в которых эти максимумы достигаются (фиг. 4, б). Для однородной жидкости в момент удара давление (3.075 МПа) значительно выше, чем для двухслойной жидкости, затем максимум давления для случая однородной жидкости быстро убывает, тогда как в случаях 2 и 3 он растет и, начиная с некоторого момента, превышает максимум давления для однородной жидкости. На кривых 2 и 3 первые максимумы соответствуют всплескам давления в центре порш-



Фиг. 5. Эволюция во времени давления в центре стенки  $x = 5$  м (а) и на дне  $x = 10$  м (б) в безразмерных переменных

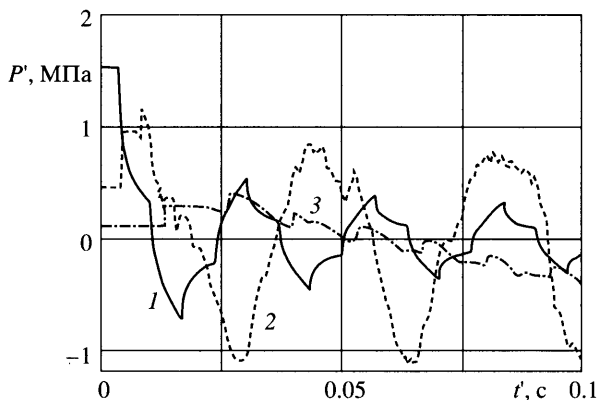
ня в моменты падения на поршень волн сжатия, которые образуются при отражении ударной волны от границы раздела слоев. Затем (при  $t' > 0.03$  с для случая 2 и при  $t' > 0.05$  с для случая 3) максимум давления наблюдается при  $x'$ , больших, чем предельное расстояние для распространения возмущения со скоростью звука в верхнем слое (фиг. 2). Этот максимум превышает соответствующее значение для однородной жидкости и сохраняется достаточно долго. Максимум давления распространяется тем медленнее, чем меньше скорость звука в верхнем слое, и его положение нелинейно зависит от времени, в отличие от однородной жидкости, для которой  $x' = c_2 t' - 4$  (кривая 1 на фиг. 4, б).

В задаче об ударе вертикальной стенкой по жидкой полосе с прилегающим к стенке аэрированным слоем расчеты проводились для случая, когда толщина слоя равна 1 м, а глубина жидкости 10 м (фиг. 1, б). Отображение области течения через дно четным образом и через свободную поверхность нечетным образом приводит к задаче с той же геометрией, что и в задаче об ударе поршнем, однако теперь распределение скорости верхней границы в безразмерных переменных задается следующим образом:

$$f(x) = 1, \quad x \in [40k; 20 + 40k], \quad f(x) = -1, \quad x \in [-20 + 40k; 40k], \quad k \in Z$$

Здесь точка  $x = 0$  соответствует точке пересечения свободной поверхности жидкости и вертикальной стенки, а точка  $x = 10$  – вершине угла между дном жидкого слоя и стенкой (фиг. 1, б).

При ударе по вертикальному слою конечной толщины (кривая 5 на фиг. 5), давление на стенке растет вследствие отражений волн сжатия от жестких границ слоя: в центре стенки – до момента  $t = 5$  и на дне – до  $t = 10$ . Давление в фиксированной точке начинает уменьшаться, когда до этой точки доходит волна разрежения со свободной границы жидкости ( $x = 0$ ). В остальных случаях (случаи 2–4) в безразмерных переменных падение



Фиг. 6. Эволюция давления во времени в центре стенки  $x = 5$  м

давления начинается раньше за счет деформации границы раздела слоев. Однако для двухслойной жидкости в отличие от однородной резкие скачки давления на стенке в моменты времени кратные 2 наблюдаются во всех случаях. Амплитуда скачков давления тем больше, чем меньше отношение импедансов слоев  $\rho_1 c_1 / \rho_2 c_2$ . Этот результат следует из анализа соответствующей одномерной задачи, решение которой применимо в тех областях, до которых возмущения со свободной границы жидкости еще не дошли. В случае 4, когда жидкость в основной области течения принимается несжимаемой, деформация границы раздела слоев начинается в момент  $t = 2$  по всей глубине.

В размерных переменных сравнение гидродинамических давлений проводилось для случаев 1–3 с морской водой в основной области (фиг. 6). Скорость стенки  $V_0 = 1$  м/с. В начале удара давления максимальны для случая однородной жидкости (1,5375 МПа). Однако для двухслойной жидкости колебания давления намного медленнее затухают со временем. Когда скорость звука в пристенном слое в 3 раза меньше, чем в основной области (случай 2), колебания давления после удара происходят с амплитудой, превышающей амплитуду колебаний давления для однородной жидкости ( $\approx 1$  МПа).

Проведено сравнение влияния изменения соотношения плотностей жидкостей при неизменном соотношении скоростей звука. Получено, что при  $m = 3$ , а  $k$ , меняющемся от 0,5 до 1, характер эволюционных кривых и значения максимумов давления достаточно близки.

Проведено сравнение влияния изменения соотношения скоростей звука при неизменном соотношении плотностей жидкостей. При  $k = 0,9$  и  $m$ , меняющемся от 2 до 5, характер эволюционных кривых сохраняется, однако при увеличении  $m$  существенно увеличивается период колебаний давления, а его амплитуда несколько уменьшается.

**Закключение.** Построено и исследовано решение задачи об ударе по участку свободной поверхности двухслойной слабосжимаемой жидкости. Исследованы два случая: удар поршнем по участку верхней границы двухслойной сжимаемой жидкости и удар подвижной стенкой по двухслойной жидкости. Проведены расчеты для различных распределений скоростей удара по поверхности жидкости и для различных свойств слоев.

И для удара поршнем, и для удара вертикальной стенкой наличие прослойки существенно меняет эволюцию давления на границе, при этом, начиная с некоторого момента времени, максимальное давление на верхней границе при наличии прослойки превышает максимальное давление, полученное для однородной жидкости.

Если рассматривать диапазоны изменения соотношения плотностей от 0,5 до 1 ( $0,5 \leq \rho_1 / \rho_2 \leq 1$ ) и скоростей звука от 1 до 5 ( $1 \leq c_2 / c_1 \leq 5$ ), то можно сделать вывод, что



эволюция давлений на стенке более существенно зависит от соотношения скоростей звука в слоях и незначительно зависит от соотношения плотностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РАН (проект № 5 “Удар по свободной границе газожидкостной среды”) и Гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант № НШ 902.2003.01).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Логвинович Г.В. Удар твердого тела о сжимаемую жидкость // Тр. ЦАГИ. 1956. Вып. 688. 7 с.
2. Frankel I. Compressible flow induced by the transient motion of a wavemaker // ZAMP. 1990. V. 41. № 5. P. 628–655.
3. Веклич Н.А. Удар полосы сжимаемой жидкости о преграду // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 138–145.
4. Веклич Н.А. Удар цилиндра из идеальной сжимаемой жидкости о преграду // Сиб. физ.-техн. журн. 1991. № 6. С. 34–41.
5. Korobkin A. Global characteristics of jet impact // J. Fluid Mech. 1996. V. 307. P. 63–84.
6. Khabakhpasheva T.I. Piston impact onto the boundary of two-layer fluid // ICTAM04 Abstract book and CD-ROM Proc. 21st Int. Congr. Theoretical and Applied Mechanics. Warsaw, Poland, 2004. 2 p.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
21.VI.2005