

УДК 532.526.2.013.4

© 2006 г. С. В. МАНУЙЛОВИЧ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ПОМОЩЬЮ АКТИВНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ, ЛОКАЛИЗОВАННОГО НА ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Предложен метод активного управления возмущенным движением газа в ламинарном пограничном слое, обеспечивающий быстрое затухание волн неустойчивости. Метод основан на использовании активного участка поверхности обтекаемого тела, реагирующего на мгновенное локальное изменение давления пропорциональным местным сдвигом стенки по нормали к обтекаемой поверхности с постоянной задержкой по времени, настроенной на оптимальное подавление неустойчивых возмущений. Показано, что в случае одной частоты оптимальный закон управления приводит к кратности собственных значений в спектре волновых чисел. Эффективность предложенного метода продемонстрирована в широком диапазоне частот и направлений распространения волн неустойчивости. Для расчета процесса прохождения волны неустойчивости над активным участком конечной протяженности использован метод интегрального уравнения, базирующийся на решении задачи восприимчивости течения в пограничном слое к вибрации обтекаемой поверхности. С помощью метода Фурье и интегральной теоремы Коши получены явные формулы, описывающие процесс рассеяния волны неустойчивости в устойчивые моды на стыке жесткой и активной поверхности.

Ключевые слова: пограничный слой, неустойчивость, восприимчивость к вибрации, активное управление возмущениями.

Интерес к активным методам управления возмущенным движением жидкости в пограничном слое был инициирован сформулированной Грэм проблемой аномально высокой скорости движения дельфина [1]. Изучение стабилизирующего воздействия податливости обтекаемой поверхности [2] дало толчок к разработке многочисленных вариантов методов ламинаризации, использующих упругие свойства поверхности обтекаемого тела. Будучи достаточно эффективными в случае течений жидкости, эти методы не работоспособны в случае обтекания воздушным потоком, низкая плотность которого приводит к физически нереализуемым параметрам податливости стенки.

В последние годы идея активного управления возмущенным движением обрела второе рождение благодаря бурному развитию технологий микроэлектромеханических систем [3]. Эти системы представляют собой активные поверхности, состоящие из распределенных с высокой плотностью управляющих элементов двух типов: микросенсоров, регистрирующих параметры возмущенного движения, и микроактиваторов, генерирующих управляющее воздействие, однозначно определяемое показаниями сенсоров. При этом работоспособность таких систем достигается как технологическим совершенством их материальной реализации, так и эффективностью алгоритма, задающего закон преобразования показаний сенсоров в отклик активаторов. Данная работа посвящена разработке эффективного алгоритма управления неустойчивыми возмущениями сжимаемого течения в ламинарном пограничном слое.

Согласно современным представлениям, основными типами возмущений, ответственными за ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на стреловидном крыле большого удлинения, являются волны Толлмина–Шлихтинга и стационарные вихри неустойчивости поперечного течения. В [4] предложен метод, позволяющий полно-

стью подавить неустойчивость последнего типа с помощью искусственно организованной стационарной неровности поверхности крыла (этот же способ пригоден и для гашения вихрей Гертлера в течении над вогнутой поверхностью). В связи с этим данная работа посвящена проблеме подавления неустойчивости Толлмина–Шлихтинга. Сравнительный анализ различных способов активного воздействия без ограничения общности проиллюстрирован для случая двумерного пограничного слоя на плоской пластине.

Предлагаемый ниже метод управления возмущенным движением обеспечивает быстрое подавление волн неустойчивости ламинарного пограничного слоя в широком диапазоне изменения их частоты и направления распространения. В качестве примера системы управления рассмотрен активный участок обтекаемой поверхности в виде полосы, расположенный параллельно передней кромке, с сенсорами, регистрирующими мгновенное значение возмущенного давления, и активаторами, обеспечивающими зависящее от времени перемещение малого участка стенки в направлении, перпендикулярном основному потоку. Физический механизм затухания неустойчивых возмущений над активной поверхностью основан на аналогии [5] явлений устойчивости течения над подавляющей поверхностью и восприимчивости потока к локализованной вибрации стенки. Особенность исследуемого алгоритма управления – его локальный характер: отклик каждого активатора пропорционален показаниям местного сенсора и происходит с задержкой по времени. Величина запаздывания выбирается из условия наиболее быстрого подавления неустойчивых возмущений. Коэффициент пропорциональности и время запаздывания считаются универсальными величинами и не зависят от местоположения активного элемента.

Эффективность метода исследуется в модельной постановке, предполагающей непрерывный характер распределения сенсоров и активаторов. Учет дискретности расположения управляющих элементов, их механических свойств, а также их влияния на структуру осредненного течения остается вне рамок рассматриваемой постановки.

Некоторые результаты данного исследования кратко изложены в [6].

1. Математическая формулировка задачи управления возмущенным движением. Будем исследовать проблему активного управления трехмерными нестационарными возмущениями в ламинарном пограничном слое. В качестве основного течения будем использовать пограничный слой на плоской полубесконечной теплоизолированной пластине, обтекаемой равномерным потоком совершенного газа под нулевыми углами атаки и скольжения. Введем независимые переменные: время t и декартову систему координат с началом на поверхности пластины на расстоянии L от передней кромки, осью x , направленной вдоль пластины параллельно набегающему потоку, осью y , перпендикулярной пластине, и осью z , параллельной передней кромке. В дальнейшем все величины будем считать безразмерными, используя в качестве основных единиц плотность набегающего потока ρ_∞ , его скорость U_∞ , температуру T_∞ и характерную толщину пограничного слоя $\delta_0 = (\lambda_\infty L / \rho_\infty U_\infty)^{1/2}$ (λ_∞ – величина коэффициента вязкости газа во внешнем течении). Число Рейнольдса будем вычислять по толщине погранслоя: $R = \rho_\infty U_\infty \delta_0 / \lambda_\infty$. Число Прандтля обозначим Pr , число Маха набегающего потока $M < 1$. Будем предполагать, что отношение к удельным теплоемкостям газа постоянно, а коэффициент вязкости связан с температурой степенной зависимостью (n – показатель степени).

Введем обозначения $\varepsilon q(t, x, y, z)$ для возмущений вектора скорости и давления ($\varepsilon \ll 1$, $q = v_x, v_y, v_z, p$). Функции q удовлетворяют линеаризованной системе уравнений Навье–Стокса. Чтобы не загромождать изложение, вместо нее будем использовать упрощенную систему [7], применение которой оправдано следующими соображениями. Основная цель данного исследования – разработка методов активного подавления неустойчивых возмущений, поэтому течение на рассматриваемом участке в отсутствие управляющего воздействия считается ламинарным и неустойчивым. Использование предлагаемых ниже методов активного контроля приводит к сильной стабилизации течения (при оптимальном выборе параметров системы управления возмущение затухает

в 10 раз на расстояниях порядка длины волны неустойчивости), так что активный участок целесообразно выбирать коротким и располагать его в предпереходной области, где число Рейнольдса достаточно велико ($1000 < R < 1500$). В связи с этим при упрощении исходной системы уравнений будем пренебрегать членами, связанными с вертикальной составляющей скорости основного течения и с зависимостью параметров невозмущенного течения от продольной переменной. Кроме того, из исходной системы будем исключать члены, меньшие при $R \gg 1$ по сравнению с уже отброшенными. В результате линеаризованная система уравнений приведет к виду [7]

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + M^2 \left(\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + U \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{dU}{dy} v_y \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{T^n \partial^2 v_x}{R \partial y^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + U \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + U \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{T^n \partial^2 v_z}{R \partial y^2}$$

Первое уравнение системы следует из уравнений неразрывности, состояния и упрощенного уравнения энергии. Остальные уравнения системы – упрощенные уравнения импульса вдоль осей x, y, z . Система (1.1) содержит все члены, существенные в асимптотическом анализе характеристик устойчивости течения при $R \rightarrow \infty$, а расчет инкрементов нарастания волны неустойчивости при конечных R из рассматриваемого диапазона дает относительную ошибку порядка 1% по сравнению с расчетом по классической теории устойчивости параллельных течений.

С учетом сделанных допущений коэффициенты системы (1.1) считаются зависящими только от вертикальной переменной. Профили скорости $U(y)$ и температуры $T(y)$ невозмущенного течения удовлетворяют краевой задаче для системы нелинейных уравнений, получаемых из уравнений сжимаемого пограничного слоя с помощью переменных Дордницына

$$2 \frac{d}{dy} \left(T^n \frac{dU}{dy} \right) + \Phi \frac{dU}{dy} = 0, \quad U = T \frac{d\Phi}{dy}$$

$$2 \frac{d}{dy} \left(T^n \frac{dT}{dy} \right) + 2 \text{Pr}(\kappa - 1) M^2 T^n \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \text{Pr} \Phi \frac{dT}{dy} = 0$$

$$\Phi(0) = U(0) = \frac{dT}{dy}(0) = 0, \quad T(\infty) = U(\infty) = 1$$

Все расчеты, результаты которых приведены ниже, выполнены для $R = 1000$, $\text{Pr} = 0.75$, $M = 0.8$, $\kappa = 1.4$, $n = 0.76$.

Будем предполагать, что сенсоры и активаторы системы управления занимают полосу обтекаемой поверхности, параллельную передней кромке пластины. Будем считать, что датчики системы регистрируют мгновенное распределение $s_w(t, x, z)$ какого-либо параметра возмущения на поверхности пластины в диапазоне $l_1 \leq x \leq l_2$, в ответ на которое система управления реагирует некоторым распределенным воздействием $a_w(t, x, z)$, также локализованным в этом диапазоне. В качестве сенсоров обычно используются дат-

чики возмущенного давления или термоанемометрические пленки для измерения пульсаций поверхностного трения, а в качестве управляющего воздействия – нестационарный вдув-отсос или вибрация обтекаемой поверхности.

Будем исследовать эффективность простейшего алгоритма активного воздействия, при котором отклик каждого активатора пропорционален показанию местного сенсора, но происходит с задержкой по времени

$$a_w(t, x, z) = c s_w(t - \tau, x, z) \quad (1.2)$$

причем коэффициент пропорциональности c и время запаздывания τ не зависят от местоположения активатора. Поскольку основное течение и конфигурация системы управления однородны по времени и поперечной координате, произвольное возмущение течения и параметры системы управления будем представлять в виде суперпозиции гармоник вида

$$\{q, s_w, a_w\} = \{q'(x, y), s'_w(x), a'_w(x)\} \exp(i\beta z - i\omega t) + \text{с.с.}$$

Эволюцию каждой из гармоник будем исследовать по отдельности. В новых терминах закон управления (1.2) сводится к условию пропорциональности комплексной амплитуды управляющего воздействия комплексной амплитуде регистрируемого параметра

$$a'_w(x) = \sigma s'_w(x), \quad \sigma = c \exp(i\omega\tau) \quad (1.3)$$

Комплексный коэффициент пропорциональности σ уже не универсальная величина: он зависит от частоты гармоник.

Предположим сначала, что активный участок занимает всю протяженность рассматриваемой области ($l_{1,2} = \mp\infty$). В этом случае зависимость параметров возмущения от продольной координаты также представима в форме суперпозиции элементарных возмущений экспоненциального вида

$$\{q', s'_w, a'_w\} = \{q^*(y, \alpha), s_w^*, a_w^*\} \exp(i\alpha x) \quad (1.4)$$

Функции q^* удовлетворяют линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i\alpha v_x^* + \frac{dv_y^*}{dy} + i\beta v_z^* + M^2(i\alpha U - i\omega)p^* = 0$$

$$\frac{1}{T} \left[(i\alpha U - i\omega)v_x^* + \frac{dU}{dy} v_y^* \right] + i\alpha p^* = \frac{T^n d^2 v_x^*}{R dy^2} \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{T} (i\alpha U - i\omega)v_y^* + \frac{dp^*}{dy} = 0$$

$$\frac{1}{T} (i\alpha U - i\omega)v_z^* + i\beta p^* = \frac{T^n d^2 v_z^*}{R dy^2}$$

Для формулировки граничных условий на обтекаемой поверхности необходимо выбрать конкретный тип системы активного контроля. Будем исследовать эффективность системы управления, сенсоры которой регистрируют мгновенное распределение возмущенного давления на поверхности пластины, а активаторы обеспечивают соответствующее перемещение точек стенки в вертикальном направлении:

$$s_w = p(t, x, 0, z) \quad (1.6)$$

$$a_w = -\eta(t, x, z); \quad \Delta x_w = \Delta z_w = 0, \quad \Delta y_w = \varepsilon \eta$$

Задание функции s_w не определяет единственного решения системы (1.5), поэтому здесь и в дальнейшем будем формулировать задачи управления в обратной постановке: предполагая известным воздействие активаторов a_w , определим соответствующее возмущение параметров потока (в том числе и функцию s_w) и, налагая связь (1.2), замкнем задачу.

В рассматриваемом здесь случае зададим форму поверхности пластины в виде бегущей волны малой амплитуды (собственное решение (1.4) определено с точностью до мультипликативной постоянной):

$$\eta = \exp(i\alpha x + i\beta z - i\omega t) + \text{с.с.}$$

Линеаризация условий прилипания, налагаемых на колеблющейся обтекаемой поверхности, дает краевые условия для системы (1.5) при $y = 0$:

$$v_x^*(0) = -\frac{dU}{dy}(0), \quad v_y^*(0) = -i\omega, \quad v_z^*(0) = 0 \quad (1.7)$$

Неустойчивая мода принадлежит дискретному спектру. Поскольку цель данного исследования – повышение устойчивости течения, будем изучать собственные решения задачи (1.5), (1.7) из этого класса, удовлетворяющие условию затухания:

$$q^*(\infty) = 0 \quad (1.8)$$

Задача (1.5), (1.7), (1.8) определяет единственное решение при любом комплексном α , за исключением значений, соответствующих волновым числам собственных колебаний пограничного слоя на неподвижной стенке (эти точки являются полюсами первого порядка функций q^*). Для определения волнового числа возмущения над неограниченным активным участком воспользуемся законом управления (1.2), (1.6), выписанным для волны (1.4). В результате получим искомое дисперсионное соотношение

$$D(\alpha) = -\sigma, \quad D = [p^*(0, \alpha)]^{-1} \quad (1.9)$$

содержащее зависимость от параметров системы управления в явном виде. При $\sigma = 0$ оно переходит в дисперсионное соотношение для случая жесткой поверхности.

Таким образом, аналогия с явлением восприимчивости течения в пограничном слое к вибрации обтекаемой поверхности позволяет сформулировать постановку задачи об устойчивости течения над активной поверхностью. Численный метод решения задачи (1.5), (1.7), (1.8) и способ нахождения корней дисперсионного соотношения описан в [7, 8].

2. Физическое обоснование метода управления. Для объяснения механизма стабилизирующего воздействия предлагаемой системы управления на течение в пограничном слое снова воспользуемся аналогией с явлением восприимчивости. Предположим, что некоторый участок обтекаемой поверхности совершает малые гармонические по времени вертикальные колебания, фаза которых меняется вдоль размаха по линейному закону:

$$\eta = f(x)\exp(i\beta z - i\omega t) + \text{с.с.} \quad (2.1)$$

Обобщение решения задачи о вибраторе [8] на случай трехмерных колебаний (2.1) позволяет по заданному распределению комплексной амплитуды вибрации вычислить комплексную амплитуду пульсаций давления на стенке во всей рассматриваемой области $-\infty < x < +\infty$:

$$p'(x, 0) = I[f(x)]$$

$$I[f] = \int_C \frac{dk}{2\pi D(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp[ik(x - \xi)] d\xi \quad (2.2)$$

В интегральном операторе (2.2) контур интегрирования C , начинающийся и заканчивающийся в бесконечно удаленной точке комплексной плоскости k , обходит снизу полюс, $k = \alpha_1$, соответствующий моде Толлмина–Шлихтинга, не охватывая при этом других особых точек нижней полуплоскости.

Вынужденные колебания (2.1) поверхности пластины приводят к генерации волны Толлмина–Шлихтинга, распространяющейся вниз по потоку от вибрирующего участка:

$$p'_{TS}(x, 0) = f^* A \exp(i\alpha_1 x)$$

$$f^* = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\alpha_1 x) dx, \quad A = i \left[\frac{dD}{d\alpha}(\alpha_1) \right]^{-1} \quad (2.3)$$

Здесь f^* – геометрический параметр, определяемый формой колебаний стенки, A – приведенный коэффициент порождения, имеющий смысл начальной амплитуды волны Толлмина–Шлихтинга, генерируемой колебаниями “точечного” источника $f = \delta(x)$.

В случае управляемых возмущений комплексные амплитуды пульсаций давления и колебаний формы стенки связаны соотношением

$$f(x) = -\sigma p'(x, 0) \quad (2.4)$$

По физическому смыслу комплексный параметр σ может трактоваться как обобщенная “податливость” обтекаемой поверхности, поэтому механизм ослабления неустойчивых возмущений может быть объяснен аналогично тому, как это делалось в [5] для случая эластичной стенки ($\sigma > 0$). С этой целью рассмотрим модельную задачу о распространении волны Толлмина–Шлихтинга над активным участком слабой “податливости” ($|\sigma| \ll 1$). В этом случае повышение устойчивости течения может интерпретироваться в терминах суперпозиции основной волны с вторичными волнами, которые генерирует вызываемая ею слабая вибрация обтекаемой поверхности.

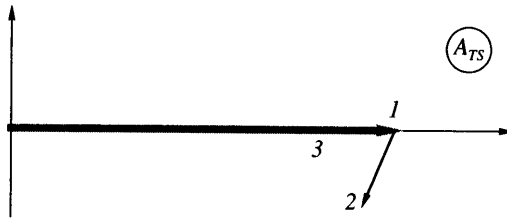
Произведем разбиение управляющей поверхности на бесконечно узкие полосы и рассмотрим одну из них $x \in [a, a + da]$. Пусть комплексная амплитуда волны в начале полосы нормирована условием $A_{TS} = 1$. Тогда в конце ее она будет отличаться на величину коэффициента порождения вторичной волны, задаваемого соотношениями (2.3), (2.4):

$$A'_{TS} = 1 - \sigma A da + O(|\sigma|^2) \quad (2.5)$$

Из (2.5) видно, что рассматриваемая система управления оказывает стабилизирующее действие, если $\text{Re}(\sigma A) > 0$. При заданных параметрах невозмущенного течения и основной волны, а также фиксированном $|\sigma| \ll 1$ наибольший стабилизирующий эффект достигается в случае $\arg \sigma = -\arg A$.

Вычисления приведенного коэффициента порождения A в диапазоне изменения параметров, соответствующем области неустойчивости, показывают, что $0 < \arg A \lesssim \pi/2$; в частности, $A = (0.856 + i2.006) \cdot 10^{-3}$ при $\omega = 0.05$, $\beta = 0$. Отсюда следует, что в оптимальном случае управляющие колебания обтекаемой поверхности должны отставать по фазе от пульсаций давления на величину порядка $3\pi/2$, т.е. приблизительно на $3/4$ периода колебаний. Здесь и далее под синфазными подразумеваются колебания, совершаемые легкой упругой мембраной ($\sigma > 0$).

В рамках этого же подхода может быть объяснена и низкая эффективность способа стабилизации течения с помощью естественной податливости обтекаемой поверхности. Варьирование физических параметров гибкой стенки позволяет изменять фазу импеданса в пределах $0 < \arg \sigma < \pi$, так что наибольшую эффективность демонстрирует упругая легкая мембрана без демпфирования ($\sigma > 0$). Тем не менее такая поверхность обладает низкими стабилизирующими свойствами по сравнению с оптимальным случаем



Фиг. 1. Векторная диаграмма, поясняющая физический механизм подавления возмущений: 1 – комплексная амплитуда основной волны; амплитуды вторичных волн, вызванных 2 – колебаниями упругой мембраны, 3 – оптимальными колебаниями

(см. фиг. 1; соответствующие векторы комплексных амплитуд вторичных волн неустойчивости показаны стрелками 2 и 3). Эффективность этого способа стабилизации может быть обеспечена лишь при увеличении податливости обтекаемой поверхности $|\sigma|$, что вступает в противоречие с требованиями прочности летательного аппарата.

Проведенный анализ показывает ключевую роль времени запаздывания отклика в задаче оптимизации системы управления. Используемый здесь подход эквивалентен линейной теории возмущений, позволяющей в случае $|\sigma| \ll 1$ выразить волновое число α_1' через его значение α_1 при $\sigma = 0$:

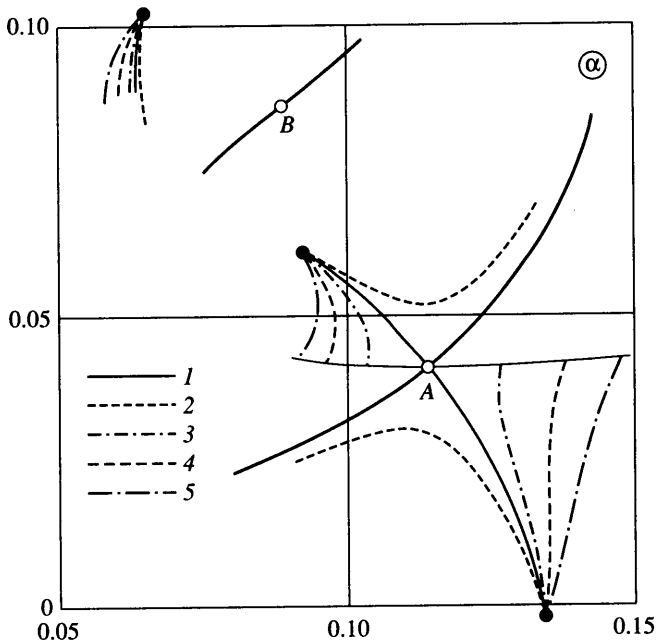
$$\alpha_1' = \alpha_1 + i\sigma A + O(|\sigma|^2) \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) может быть получено дифференцированием дисперсионного соотношения (1.9) по параметру σ . Как показали расчеты, двучленное разложение (2.6) является очень хорошим приближением даже при $|\sigma| \sim 1$: например, в случае $|\sigma| = 5$ и “оптимального” сдвига фаз $\arg \sigma = -1.17$ точный расчет величины α_1' дает $0.1335 + i0.0089$, а приближенный – $0.1342 + i0.0088$.

Таким образом, рассмотренная постановка позволяет обнаружить тенденцию к увеличению скорости подавления неустойчивых возмущений. Вместе с тем она носит модельный характер, поскольку дает количественно верные результаты только в случае, когда α_1' не сильно отличается от α_1 . Для построения системы управления, обеспечивающей максимально возможную скорость затухания возмущений, необходимо произвести анализ характеристик устойчивости течения при конечных $|\sigma|$.

3. Оптимизация закона управления. В случае моногармонического возмущения изучаемая система активного контроля характеризуется единственным комплексным параметром σ . Предложенный в разд. 1 метод исследования устойчивости течения в пограничном слое на активной поверхности с помощью обратной постановки задачи управления позволил предельно упростить дисперсионное соотношение: оно представлено в виде явной зависимости (1.9), где параметр σ вынесен в правую часть, а левая часть представляет собой известную функцию от искомого волнового числа α .

На первый взгляд может создаться впечатление, что задача проектирования предлагаемой системы управления проще обычной задачи исследования устойчивости течения на жесткой поверхности – достаточно задать волну со сколь угодно большим декрементом затухания и “подставить” соответствующее волновое число в левую часть равенства (1.9) (т.е. вычислить решение неоднородной задачи (1.5), (1.7), (1.8)), чтобы получить искомым параметр $\sigma = -D(\alpha)$, обеспечивающий требуемую скорость затухания возмущений. Приведенное рассуждение не является корректным из-за неединственности решения задачи устойчивости: каждому α соответствует единственное значение σ , но при заданном σ существует несколько волновых чисел, удовлетворяющих уравнению (1.9).



Фиг. 2. Оптимизация параметров системы управления ($\omega = 0.05$, $\beta = 0$); траектории мод при фиксированном времени задержки и возрастающей амплитуде отклика: $\arg \sigma = -0.9965, -0.9, -1.1, -1.3, -1.5$ на линиях 1–5

Эти волновые числа соответствуют различным модам дискретного спектра, являющимся аналитическими продолжениями по параметру σ мод течения на жесткой поверхности. При достаточно большом $|\sigma|$ возникает ситуация, когда мода, “происходящая” от моды Толлмина–Шлихтинга, имеет декремент затухания больший, чем у другой моды. В этом случае скорость затухания возмущений определяется декрементом последней.

У осредненного течения с параметрами, приведенными в разд. 1, существуют три моды, распространяющиеся вниз по потоку. Положение соответствующих волновых чисел на комплексной плоскости при $\omega = 0.05$, $\beta = 0$ в отсутствие системы управления показано на фиг. 2 сплошными маркерами. Волне Толлмина–Шлихтинга отвечает значение $\alpha_1 = 0.134 - i0.002$, а волновые числа $\alpha_2 = 0.092 + i0.061$ и $\alpha_3 = 0.065 + i0.102$ соответствуют первой и второй устойчивой моде. Для настройки предлагаемой системы управления на максимально эффективное подавление возмущений рассчитывались положения трех описанных мод при $\sigma \neq 0$. При этом значения $\arg \sigma$ считались фиксированными и выбирались из окрестности “оптимальной” величины -1.17 , диктуемой теорией возмущений (см. разд. 2). Траектории мод $\alpha'_{1,2,3}(\sigma)$ прослеживались при изменении $|\sigma|$ от 0 до значения, когда скорость затухания волны Толлмина–Шлихтинга становится равной скорости затухания первой устойчивой моды:

$$\operatorname{Im} \alpha'_1(\sigma) = \operatorname{Im} \alpha'_2(\sigma) \quad (3.1)$$

Множества значений аналитических продолжений мод $\alpha_{1,2,3}$ по параметру σ представляют собой три области на комплексной плоскости α , граничащие между собой по сепаратрисам (сплошные жирные линии на фиг. 2). Область, определяемая модой α_3 , лежит выше областей, соответствующих модам $\alpha_{1,2}$, поэтому третья мода не участвует в процедуре оптимизации параметров системы управления.

Соотношение (3.1) определяет однопараметрические множества на комплексных плоскостях α , σ . Множеству (3.1) принадлежит точка α_0 кратности мод $\alpha'_{1,2}$, определяемая соотношениями

$$\frac{dD}{d\alpha}(\alpha_0) = 0, \quad D(\alpha_0) = -\sigma_0 \quad (3.2)$$

Точки кратности A и B лежат на сепаратрисах. При $\omega = 0.05$, $\beta = 0$ точка кратности моды Толлмина–Шлихтинга и первой устойчивой моды (точка A) определяется параметрами $\alpha_0 = 0.114 + i0.041$, $\sigma_0 = 8.77 - i13.56$.

Линия, задаваемая равенством (3.1), хорошо аппроксимируется трехчленным асимптотическим разложением ($\delta > 0$):

$$\alpha'_{1,2} = \alpha_0 \pm \delta - \frac{D^{(3)}}{6D^{(2)}}\delta^2 + o(\delta^2)$$

$$\sigma = -D^{(0)} - \frac{D^{(2)}}{2}\delta^2, \quad D^{(m)} = \frac{d^m D}{d\alpha^m}(\alpha_0) \quad (3.3)$$

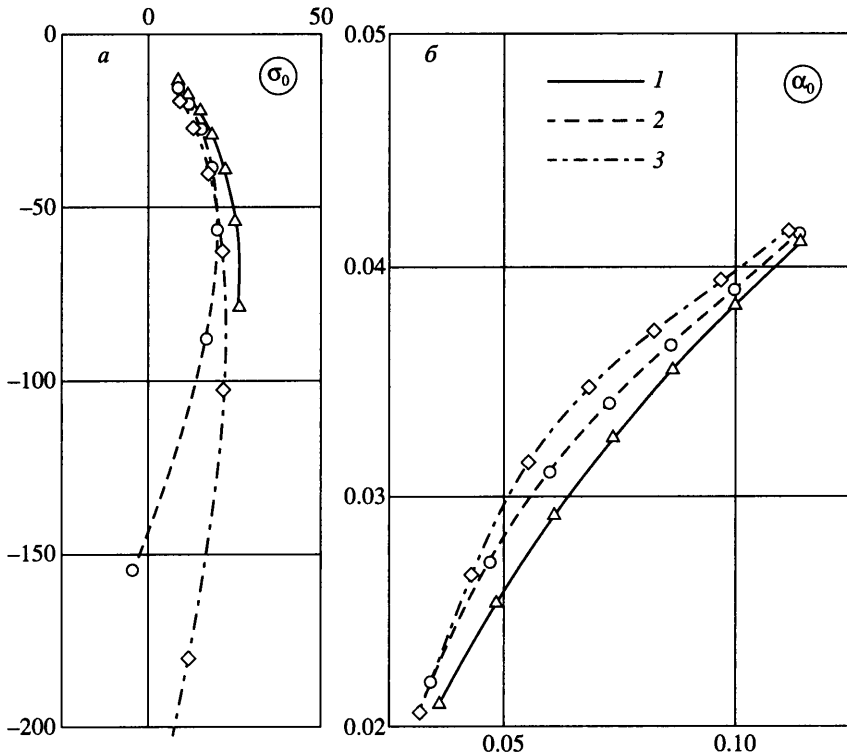
Результаты, полученные с его помощью, практически не отличаются от результатов точного численного расчета.

Дальнейшая оптимизация системы управления подразумевает выбор параметра σ из однопараметрического множества (3.1), обеспечивающий наибольший декремент затухания. Обоснование выбора зависит от того, вверх или вниз выпукла кривая в плоскости α , задаваемая соотношением (3.1). Характер выпуклости определяется знаком мнимой части третьего слагаемого в разложении (3.3). При $\omega = 0.05$, $\beta = 0$ кривая слабо выпукла вниз, поэтому более удаленные от α_0 ее участки дают немного большую скорость затухания. Поскольку это достигается значительным (в несколько раз) увеличением амплитуды отклика $|\sigma|$, что может быть нежелательным при практической реализации метода, будем считать “оптимальным” режим, соответствующий случаю кратности мод $\alpha'_{1,2} = \alpha_0$. В этом случае амплитуда отклика активаторов минимальна, хотя скорость затухания возмущений не является наибольшей.

Если кривая (3.1) выпукла вверх, параметр σ_0 из (3.2) определяет действительно оптимальную систему управления из класса (1.2), (1.6), обеспечивающую максимально возможную скорость затухания моногармонических возмущений. Эта ситуация имеет место, например, при настройке системы управления на наиболее эффективное подавление косой волны Толлмина–Шлихтинга с $\omega = 0.035$, $\beta = 0.1$. При отсутствии управления неустойчивое возмущение характеризуется волновым числом $\alpha_1 = 0.093 - i0.0036$. Система управления с параметром $\sigma_0 = 21.7 - i62.3$ обеспечивает абсолютный максимум скорости затухания ($\alpha_0 = 0.068 + i0.035$).

На основании приведенных соображений во всех случаях будем называть оптимальными параметры системы управления, определяемые равенствами (3.2). На фиг. 3 показаны результаты расчета оптимальных параметров. Кривые изменения параметра σ_0 располагаются вблизи отрицательной части мнимой оси (фиг. 3, а), так что учет конечности $|\sigma|$ при оптимизации системы также приводит к времени запаздывания порядка трех четвертей периода колебаний. Результаты вычисления соответствующих значений α_0 демонстрируют ослабление эффективности предлагаемой системы управления при уменьшении частоты (фиг. 3, б): с уменьшением ω уменьшается и $\text{Im}\alpha_0$, т.е. скорость затухания возмущений снижается.

Скорость гашения возмущений зависит и от типа системы управления. Например, если вместо управляющего движения поверхности в качестве активаторов использовать



Фиг. 3. Оптимальные параметры системы управления (*a* – импеданс, *b* – волновое число наиболее медленно затухающей моды); ω меняется от 0.05 (верхние точки) до 0.02 с шагом 0.005; $\beta = 0, 0.05, 0.1$ на линиях 1–3

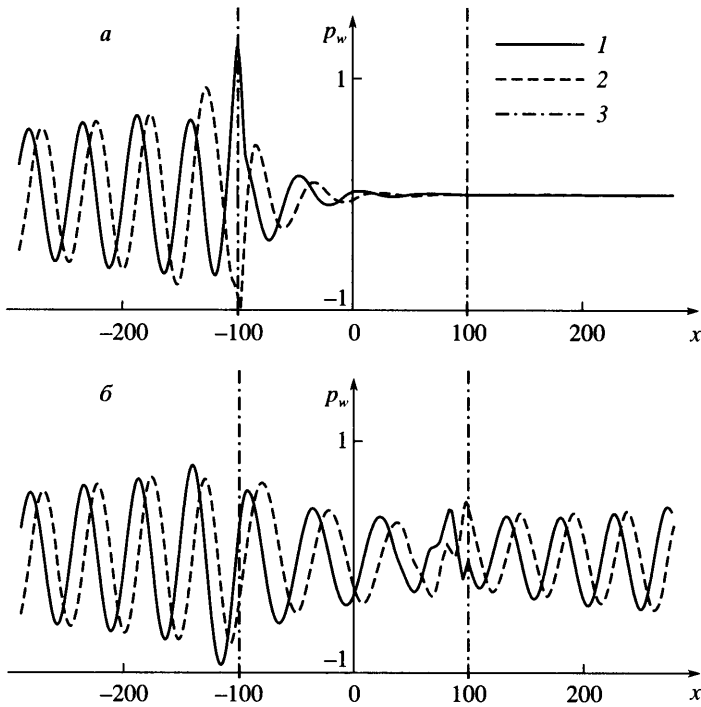
систему вдув–отсос $a_w = v_y(t, x, 0, z)$, то при $\omega = 0.05$, $\beta = 0$ будем иметь $\alpha_0 = 0.098 + i0.027$, т.е. декремент затухания уменьшается в полтора раза.

4. Подавление волны неустойчивости над активным участком конечной протяженности. Рассмотрим теперь более важную в практическом отношении задачу о взаимодействии волны Толлмина–Шлихтинга с активным участком, расположенным на полосе $x \in [l_1, l_2]$. Датчики давления имеют ограниченную чувствительность, поэтому систему активного управления целесообразно располагать в предпереходной области, где амплитуда пульсаций течения уже достаточно велика. Вместе с тем оценки, проведенные в предыдущем разделе, показывают, что оптимально настроенная система управления обеспечивает чрезвычайно быстрое подавление возмущений, так что ширина работоспособного активного участка не должна превышать величины порядка нескольких длин волн.

Предположим, что на область, занимаемую активным участком, набегают волна Толлмина–Шлихтинга с частотой ω , волновыми числами α_1 , β и единичной амплитудой. Эта волна вызывает колебания давления, которые инициируют активность системы управления. В результате пульсации давления на обтекаемой поверхности обуславливаются суммарным действием набегающей волны и активной вибрации стенки:

$$p'(x, 0) = \exp(i\alpha_1 x) + I[f(x)] \quad (4.1)$$

В отличие от случая вынужденных колебаний (разд. 2) комплексная амплитуда $f(x)$ колебаний стенки не известна заранее и может быть определена только после замыка-



Фиг. 4. Распределение амплитуды пульсаций давления на стенке (1 – $Re p_w$, 2 – $Im p_w$) при прохождении волны Толлмина–Шлихтинга с $\omega = 0.05$, $\beta = 0$ над активным участком конечной протяженности (3 – границы активного участка); а – оптимальная система управления, б – та же система, но без запаздывания отклика

ния задачи законом управления (2.4). Исключая из соотношений (4.1), (2.4) амплитуду пульсаций давления, получим линейное неоднородное интегральное уравнение для амплитуды колебаний стенки:

$$f = -\sigma \{ \exp(i\alpha_1 x) + I[f] \} \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) было получено ранее в [6] при изучении процесса прохождения прямой волны Толлмина–Шлихтинга над участком обтекаемой поверхности, замененным эластичной мембраной с коэффициентом податливости $\sigma > 0$. Метод расчета решения уравнения (4.2) описан в [5, 6].

Как вверх, так и вниз по потоку от активного участка возмущение представимо в виде суперпозиции мод течения в пограничном слое на жесткой поверхности. Изменение амплитуды и фазы волны Толлмина–Шлихтинга при ее прохождении над активным участком характеризуется комплексным коэффициентом прохождения

$$P = 1 + A \int_{l_1}^{l_2} f(x) \exp(-i\alpha_1 x) dx$$

Его величина может быть вычислена после нахождения формы колебаний стенки $f(x)$ и расчета приведенного коэффициента порождения A из решения задачи (1.5), (1.7), (1.8), (1.9), (2.3).

На фиг. 4, а проиллюстрирован процесс подавления волны неустойчивости с параметрами $\omega = 0.05$, $\beta = 0$ над активным участком протяженностью порядка четырех длин

волн ($l_{1,2} = \mp 100$). Сплошной линией показано продольное распределение возмущения давления на стенке в начальный момент времени, а штриховой – спустя четверть периода колебаний ($p_w = p'(x, 0)$). Система управления настроена на оптимальное подавление: $\sigma = \sigma_0$. Вычисление коэффициента прохождения дает $|P| \approx 8 \times 10^{-4}$, так что активный участок ослабляет набегающую волну более чем в 1000 раз.

Для сравнения на фиг. 4, б показана эволюция той же волны над участком “естественной” податливости с коэффициентом $\sigma = |\sigma_0|$, обеспечивающим такую же амплитуду отклика, но без сдвига фаз. В этом случае эффективность воздействия падает в 300 раз ($|P| = 0.25$).

5. Трансформация волны неустойчивости в области стыка жесткой и активной поверхности. Метод интегрального уравнения позволяет выполнить точный численный расчет эволюции волны Толлмина–Шлихтинга над активным участком конечного размера: по найденной форме $f(x)$ колебаний стенки решение задачи о вибраторе позволяет воспроизвести картину возмущенного движения во всей рассматриваемой области $-\infty < x < +\infty, 0 \leq y < \infty$. Более того, применение интегральной теоремы Коши позволяет детализировать структуру возмущений вверх ($x < l_1$) и вниз по потоку ($x > l_2$) от активного участка. В этих областях возмущение имеет вид суперпозиции мод течения над неподвижной поверхностью. Применение теоремы о вычетах дает величины комплексных амплитуд возбуждаемых мод дискретного спектра и, в частности, величину коэффициента прохождения волны Толлмина–Шлихтинга P .

В то же время этот метод не позволяет исследовать структуру возмущений непосредственно над активным участком ($l_1 < x < l_2$). Именно в окрестности переднего стыка жесткой и активной поверхности происходит наиболее важная перестройка возмущенного движения, приводящая к быстрому затуханию неустойчивых возмущений. Как показало исследование аналогичной задачи [5], в случае “естественной” податливости границ ($\sigma > 0$) возмущение течения над податливым участком представимо в виде суперпозиции мод течения на податливой поверхности бесконечной протяженности. Эти моды генерируются в процессе рассеяния мод набегающего потока на стыке жесткой и упругой поверхности.

Следуя [5], изучим процесс трансформации набегающей волны Толлмина–Шлихтинга на стыке жесткой и активной полубесконечных поверхностей ($l_1 = 0, l_2 = +\infty$). будем предполагать, что в набегающем потоке доминирует неустойчивая мода:

$$p'(x, 0) \approx \exp(i\alpha_1 x), \quad x < 0 \quad (5.1)$$

Это допущение оправдано во всей области вверх по потоку от активного участка, за исключением непосредственной окрестности стыка; в условиях постановки [5] оно приводит к результатам, адекватным в количественном отношении.

Проведя рассуждения, аналогичные [5], получим выражение для комплексной амплитуды возмущенного давления на стенке во всей рассматриваемой области $-\infty < x < +\infty$:

$$p'(x, 0) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma \exp(ikx) dk}{2\pi i [D(k) + \sigma](\alpha_1 - k)} \quad (5.2)$$

Полюсами подынтегрального выражения в (5.2) являются волновое число набегающей моды α_1 и волновые числа $\alpha'_{1,2,3}$ мод течения над бесконечной поверхностью, характеризующейся комплексной “податливостью” σ .

Применение интегральной теоремы Коши к вычислению интеграла (5.2) при $x < 0$ дает выражение, совпадающее с (5.1). Анализируя структуру возмущений при $x > 0$, будем опускать слагаемое, обусловленное вычетом в точке $k = \alpha'_3$, так как оно описывает вол-

ну, затухающую гораздо быстрее остальных двух мод. Если величина параметра σ далека от оптимальной, то первая мода доминирует и вниз по потоку от стыка:

$$p'(x, 0) \approx S_1 \exp(i\alpha'_1 x), \quad x > 0; \quad S_1 = \frac{\sigma}{\alpha_1 - \alpha'_1} \left[\frac{dD}{d\alpha}(\alpha'_1) \right]^{-1} \quad (5.3)$$

Соотношения (5.1), (5.3) составляют основу так называемого одномодового приближения, которое хорошо аппроксимирует процесс рассеяния волны неустойчивости на стыке жесткой и податливой поверхности [5]. Комплексный коэффициент рассеяния S_1 характеризует скачок амплитуды ($|S_1|$) и фазы ($\arg S_1$) волны Толлмина–Шлихтинга при прохождении ею области стыка. В ситуации, проиллюстрированной на фиг. 4, б, вычисление дает для левого стыка $|S_1| = 0.73$, т.е. при прохождении стыка жесткой и эластичной поверхности волна неустойчивости испытывает дополнительное ослабление.

Если параметр σ близок своему оптимальному значению, то первая и вторая моды имеют близкие по мнимой части, но не равные друг другу волновые числа α'_1 и α'_2 . В этом случае вниз по потоку от стыка возмущение аппроксимируется двучленным разложением

$$p'(x, 0) \approx S_1 \exp(i\alpha'_1 x) + S_2 \exp(i\alpha'_2 x), \quad x > 0 \quad (5.4)$$

где выражение для S_2 получается из S_1 заменой α'_1 на α'_2 .

В оптимальном случае ($\sigma = \sigma_0$) волновые числа доминирующих мод совпадают $\alpha'_{1,2} = \alpha_0$, подынтегральная функция в (5.2) имеет полюс второго порядка в точке $k = \alpha_0$, и структура возмущения за стыком определяется соотношениями

$$p'(x, 0) \approx S_0 \exp(i\alpha_0 x) + S'_0 x \exp(i\alpha_0 x), \quad x > 0$$

$$S_0 = \frac{2\sigma}{(\alpha_0 - \alpha_1)D^{(2)}} \left(\frac{D^{(3)}}{3D^{(2)}} + \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_1} \right), \quad S'_0 = -\frac{2i\sigma}{(\alpha_0 - \alpha_1)D^{(2)}} \quad (5.5)$$

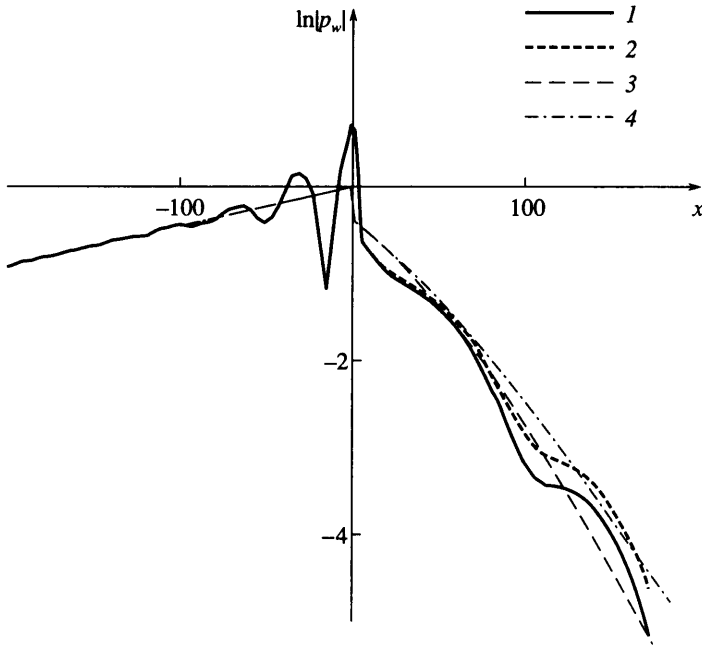
Как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, собственному значению кратности 2 соответствуют два линейно независимых решения. Первое получается из (1.4) подстановкой $\alpha = \alpha_0$ (в соотношениях (5.1), (5.3), (5.4) использована нормировка $p^*(0) = 1$); второе имеет вид

$$q' = \frac{\partial q^*}{\partial \alpha}(y, \alpha_0) \exp(i\alpha_0 x) + iq^*(y, \alpha_0) x \exp(i\alpha_0 x), \quad x > 0$$

Возмущения обоих типов присутствуют в пограничном слое вниз по потоку от стыка. Комплексная амплитуда первой моды, соответствующей кратному α_0 , определяется коэффициентом рассеяния S_0 , амплитуда второй – коэффициентом S'_0 , поскольку в силу (3.2)

$$\frac{\partial p^*}{\partial \alpha}(0, \alpha_0) = 0$$

На фиг. 5 проиллюстрированы примеры расчетов процесса преобразования растущей волны Толлмина–Шлихтинга в затухающие моды на передней границе участка, занимаемого системой активного контроля. Волна распространяется вдоль потока ($\beta = 0$), ее частота $\omega = 0.036$ соответствует максимальной скорости нарастания при указанных параметрах основного течения в отсутствие управления ($\alpha_1 = 0.102 - i0.0045$). Численное



Фиг. 5. Кривые изменения амплитуды пульсаций давления на стенке при прохождении волной Толлмина–Шлихтинга области стыка жесткой и активной поверхности ($\omega = 0.036$, $\beta = 0$); 1 – система управления, близкая оптимальной, 2 – оптимальная система; 3, 4 – расчеты тех же случаев по приближенным формулам

исследование проводилось для двух режимов. В первом случае параметры системы управления выбирались близкими к оптимальным, но не оптимальными ($|\sigma| = 33$, $\arg \sigma = -1.1$, $\alpha_1' = 0.087 + i 0.035$, $\alpha_2' = 0.067 + i 0.032$), во втором случае рассматривалась оптимальная система ($|\sigma_0| = 32.77$, $\arg \sigma_0 = -0.99$, $\alpha_0 = 0.076 + i 0.033$). Расчеты выполнялись как методом интегрального уравнения (при этом использовался активный участок, расположенный на промежутке $0 \leq x \leq 300$), так и по приближенным формулам (5.4), (5.5).

Неожиданный результат численного исследования заключается в том, что на начальном участке неоптимальная система управления обеспечивает большую скорость затухания возмущений, чем оптимальная (при $x > 0$ кривая 1 лежит ниже кривой 2). Это имеет место на участке ограниченной протяженности и объясняется тем, что в неоптимальном режиме набегающая волна рассеивается в основном в более быстро затухающую моду ($|S_1| = 1.27$, $|S_2| = 0.75$).

Расчеты, проведенные по приближенным формулам (5.4), (5.5), продемонстрировали приемлемую точность упрощенного описания процесса. Отличие от точного расчета обусловлено акустическими модами, которые принадлежат непрерывному спектру возмущений и не учитываются в упрощенной модели рассеяния. Формулы (5.4), (5.5) количественно верно описывают резкое изменение параметров волны при ее прохождении области стыка жесткой стенки с активным участком.

6. Исследование эффективности подавления волн неустойчивости, имеющих различные частоты и направления распространения. До сих пор исследовался процесс активного управления моногармоническими возмущениями, когда подавляемая волна неустойчивости характеризуется определенной частотой ω и поперечным волновым числом β . Алгоритм преобразования показаний сенсоров в отклик ближайших активаторов зави-

сит только от двух параметров – коэффициента отклика c и времени запаздывания τ . Описанная выше методика оптимизации позволяет настроить систему управления на наиболее эффективное подавление одной гармоники. Для подавления прямой волны Толлмина–Шлихтинга фиксированной частоты существует эффективный метод активного контроля [9], позволяющий полностью подавить набегающую волну Толлмина–Шлихтинга с помощью искусственно возбуждаемой волны, настроенной в противофазе к волне естественного происхождения. Как показал анализ разд. 3, 4, с точки зрения инженерного подхода предлагаемая в данной работе система управления не менее эффективна – она обеспечивает десятикратное ослабление моногармонического возмущения на расстоянии порядка длины волны.

Ниже исследуется работоспособность предлагаемой схемы активного контроля в случае, когда возмущение представляет собой суперпозицию волн неустойчивости, имеющих различные частоты и направления распространения. В силу стационарности основного течения и его однородности по поперечной координате эволюция каждой из гармоник волнового пакета может изучаться независимо.

Настроим систему управления (1.2), (1.6) на оптимальное подавление наиболее быстрой растущей гармоники $\omega_0 = 0.036$, $\beta_0 = 0$ (соответствующие α_0 и σ_0 приведены в разд. 5) и исследуем воздействие, которое она оказывает на волны неустойчивости, имеющие другие ω и β . Заданному значению σ_0 соответствует, вообще говоря, бесконечное множество пар универсальных параметров системы управления

$$c = (-1)^m |\sigma_0|, \quad \tau = \frac{\arg \sigma_0 + \pi m}{\omega_0}, \quad m \geq 1 \quad (6.1)$$

Последнее неравенство в (6.1) следует из условия положительности времени запаздывания.

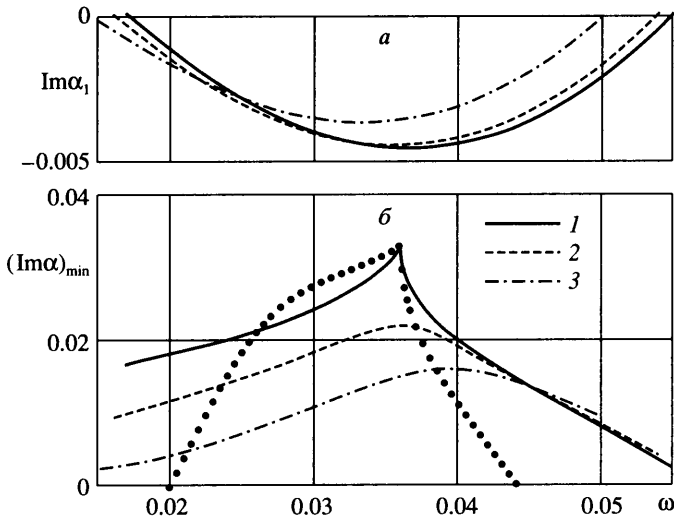
В отношении подавления гармоники с $\omega = \omega_0$ все системы управления вида (1.2), (1.6), (6.1) эквивалентны. При управлении возмущениями других частот эти системы обеспечивают различный сдвиг фазы воздействия

$$\arg \sigma = \frac{\omega}{\omega_0} \arg \sigma_0 + \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \pi m$$

причем отличие от оптимального значения $\arg \sigma \approx -\pi/2$ тем значительнее, чем больше номер m .

Ввиду существенной ширины диапазона неустойчивых частот (у рассматриваемого основного течения $0.015 < \omega < 0.055$ при $\beta \sim 0-0.1$) целесообразно использовать систему управления, соответствующую $m = 1$, которая позволяет эффективно подавлять неустойчивые возмущения в наиболее широком диапазоне изменения параметров ω , β . Коэффициент отклика и время запаздывания этой системы принимают значения $c = -32.77$, $\tau = 59.77$. Из систем управления класса (6.1) эта система характеризуется наименьшим временем отклика (приблизительно четверть периода колебаний); она реагирует запаздывающим смещением обтекаемой поверхности в направлении, противоположном оказываемому локальными пульсациями давления ($c < 0$).

На фиг. 6 приведены результаты исследования эффективности предложенной системы активного контроля в диапазоне частот, характерных для неустойчивых возмущений рассматриваемого осредненного течения (инкременты нарастания волн Толлмина–Шлихтинга в отсутствие воздействия показаны на фиг. 6, а). На фиг. 6, б показаны результаты расчета декрементов затухания наименее устойчивой моды. Наибольшую эффективность подавления возмущений система демонстрирует в окрестности базовой частоты $\omega = \omega_0$. При отклонении от этой частоты и при увеличении угла между скоростью потока и направлением распространения волны скорость затухания возмущений снижа-



Фиг. 6. Эффективность оптимальной системы управления при изменении частоты волны и направления ее распространения; *а* – инкременты нарастания волны Толлмина–Шлихтинга на жесткой поверхности, *б* – декременты затухания наиболее медленно подавляемой моды ($\beta = 0, 0.05, 0.1$ на кривых 1–3)

ется. Тем не менее стабилизирующее действие предлагаемой системы управления распространяется на всю неустойчивую область. На высоких частотах система оказывает дестабилизирующее воздействие, что необходимо иметь в виду в случае практической реализации метода (например, при формировании отклика активатора можно использовать фильтр, отсекающий высокочастотные возмущения).

Для сравнения на фиг. 6, б точками проиллюстрированы результаты воздействия, оказываемого на прямую волну неустойчивости системой активного контроля (6.1) при $m = 2$ ($c = 32.77$, $\tau = 147$). Эта система реагирует с временем запаздывания порядка $3/4$ характерного периода колебаний смещением стенки в сторону оказываемого давления ($c > 0$). Из-за большого времени запаздывания область благоприятного эффекта оказывается значительно зауженной, а в окрестности нейтральных кривых течение сильно дестабилизируется. Системы управления с $m \geq 3$ еще менее пригодных для подавления неустойчивых возмущений, характеризующихся широкополосным спектром частот.

В отличие от [9] предлагаемая система управления (1.2), (1.6), (6.1) с минимальным временем запаздывания ($m = 1$) эффективно гасит волны неустойчивости с другими частотами и направлениями распространения. В приведенном примере система настраивалась на оптимальное подавление наиболее быстро растущей волны. При практическом использовании, возможно, систему целесообразно настраивать на частоту возмущения, имеющего наибольшую амплитуду (или инициирующего ламинарно-турбулентный переход).

Заключение. Предложен метод быстрого подавления волн неустойчивости в ламинарном пограничном слое. Метод основан на использовании системы активного управления, расположенной на обтекаемой поверхности и реагирующей на мгновенное локальное изменение давления пропорциональным местным сдвигом стенки поперек потока с постоянной задержкой по времени порядка четверти характерного периода пульсаций. Выявлена ключевая роль времени запаздывания отклика в процессе подавления неустойчивых возмущений. В случае моногармонического возмущения оптимальный закон управления приводит к кратности собственных значений в спектре волновых

чисел и обеспечивает десятикратное уменьшение амплитуды возмущения на расстояниях порядка длины волны. Проведенные расчеты предсказывают высокую эффективность предложенного способа активного управления возмущенным движением в широком диапазоне частот и направлений распространения волн.

Для изучения эволюции волны Толлмина–Шлихтинга при ее прохождении над активным участком конечной протяженности использован метод интегрального уравнения, основанный на решении задачи восприимчивости течения к вибрации обтекаемой поверхности. Получены приближенные формулы, количественно верно описывающие процесс преобразования волн Толлмина–Шлихтинга в устойчивые моды в области стыка жесткой и активной поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00632, 05-08-50239-а) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1984.2003.1). Автор благодарен М.В. Устинову за плодотворное обсуждение исследуемой проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Flow past Highly Compliant Boundaries and in Collapsible Tubes: Proc. IUTAM Symp. Warwick, United Kingdom, 2001. Dordrecht etc.: Kluwer, 2003. 336 p.
2. *Kramer M.O.* Boundary layer stabilization by distributed damping // *J. Aeronaut. Sci.* 1957. V. 24. № 6. P. 459–460.
3. Mechanics of Passive and Active Flow Control: Proceedings IUTAM Symp. Goettingen, Germany, 1998. Dordrecht etc.: Kluwer, 1999. 400 p.
4. *Manuilovich S.V.* Laminarization of three-dimensional compressible boundary-layer flow using receptivity control. Proc. IUTAM Symp. on Laminar-Turbulent Transition. Sendai, Japan, 1994. Berlin etc.: Springer, 1995. P. 129–136.
5. *Мануйлович С.В.* Распространение возмущений в плоском течении Пуазейля между стенками неоднородной податливости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 4. С. 29–46.
6. *Manuilovich S.V.* Propagation of Tollmien–Schlichting wave in a boundary layer over flexible path of a wall // *Book of Abstracts. IUTAM Sympos. on Flow in Collapsible Tubes and Past Other Highly Compliant Boundaries.* Coventry, England: Univ. Warwick, 2001.
7. *Мануйлович С.В.* О восприимчивости дозвукового пограничного слоя к импульсному колебанию локализованного участка обтекаемой поверхности // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 311. № 2. С. 305–309.
8. *Мануйлович С.В.* О восприимчивости дозвукового течения к осциллирующим воздействиям, локализованным на дне пограничного слоя // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1988. № 4. С. 63–69.
9. *Milling R.W.* Tollmien–Schlichting wave cancellation // *Phys. Fluids.* 1981. V. 24. № 5. P. 979–981.

Москва
e-mail: manu@recp.aerocentr.msk.su

Поступила в редакцию
19.V.2005