

УДК 532.525.2:537.221:662.613

© 2006 г. А. Б. ВАТАЖИН, К.Е. УЛЫБЫШЕВ

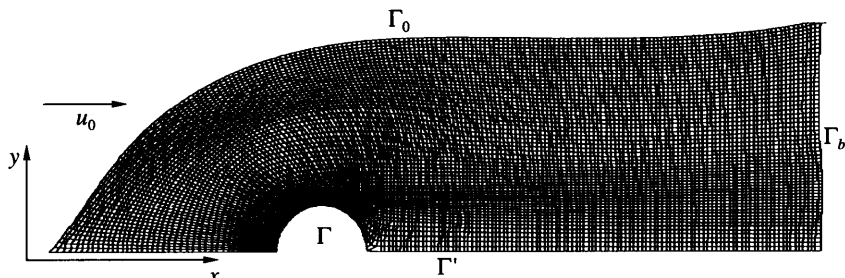
ДОЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ЗОНДА ПОТОКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОГО СЛАБОИОНИЗОВАННОГО ГАЗА

Проведено теоретическое и численное исследование электрических характеристик сферы, обтекаемой потоком вязкого слабо ионизованного электрически квазинейтрального газа, содержащего электроны и однозарядные ионы. Предполагается, что (как в большинстве приложений) параметр электрогазодинамического (ЭГД) взаимодействия мал, что позволяет решать газодинамические и электрические уравнения последовательно. Поверхность сферы принимается проводящей и теплоизолированной. При малых числах Маха набегающего потока температура газа в области обтекания сферы практически постоянна, что позволяет использовать модель несжимаемой вязкой среды. Анализ обтекания сферы проведен при изменении гидродинамических чисел Рейнольдса в диапазоне $0 \leq Re \leq 1000$. Электродинамические уравнения, в которых учтены конвекция и диффузия электронов и ионов и их дрейф в электрическом поле, сведены к трем эллиптическим уравнениям относительно концентраций электронов и ионов и электрического потенциала. На границе расчетной области, моделирующей бесконечность, задается постоянный потенциал. Численное моделирование всей задачи проведено на специально построенных сетках. Определены поля концентраций заряженных компонентов, потенциала, электрических токов и построены вольт-амперные характеристики сферы при различных скоростях газа. Полученные результаты обобщают имеющиеся данные о вольт-амперных характеристиках сферы (зонда) в покоящейся слабо ионизованной среде.

Ключевые слова: обтекание сферы, слабо ионизованный газ, электронная и ионная компоненты, электрические диффузионные эффекты, вольт-амперная характеристика.

Исследованию концентрационных и электрических полей около тел (сферы, цилиндра), находящихся в покоящейся или движущейся слабоионизованной плазме, посвящено большое количество работ (см., например, [1–6]). В случае покоящейся среды теоретический анализ сводится к интегрированию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которое проводится либо численно, либо аналитически (методом сращиваемых асимптотических разложений при наличии малого параметра – отношения дебаевского радиуса к радиусу сферы). Однако при наличии скорости газа, приводящей к конвекции заряженных частиц, сферическая симметрия нарушается, распределение электрических полей существенно изменяется и анализ задачи значительно усложняется. В большинстве работ, в которых учитывается движение среды, скорость газа предполагалась малой, что позволяет использовать для описания поля гидродинамической скорости приближение Стокса. Анализ проблемы при достаточно больших числах Рейнольдса, когда влияние эффектов конвекции полностью перестраивает течение, ранее не проводился.

В данной работе численное моделирование гидродинамического течения около сферы при малых и умеренных числах Рейнольдса проведено на основе полной системы уравнений Навье – Стокса, записанной в переменных функция тока – завихренность. Для численного анализа полученных пяти уравнений эллиптического типа (относительно функции тока, завихренности, электрического потенциала и концентраций электронов и ионов), к которым сведена задача, предложен специальный метод генерации сеток.



Фиг. 1. Геометрия расчетной области и расчетная сетка. Γ – контур сферы, Γ_0 – верхняя граница расчетной области, Γ_b – правая граница расчетной области, Γ' – ось симметрии.

Основными процессами вблизи поверхности зонда являются диффузия заряженных частиц, их дрейф в электрическом поле и, в случае движения среды, их конвективный перенос. Эти процессы вблизи тел (элементов авиационного двигателя), обтекаемых высокотемпературными продуктами сгорания, в рамках электрического диффузионно-пограничного слоя изучались ранее в [7–9].

1. Постановка задачи. Пусть сфера радиуса R обтекается безграничным дозвуковым (число Маха $M_0 \ll 1$) потоком слабоионизованного электрически квазинейтрального газа, имеющим скорость u_0 . Одинаковые концентрации электронов n_e и ионов n_i в потоке равны n_0 . Течение предполагается симметричным, геометрия расчетной области показана на фиг. 1. (Форма верхней границы области Γ_0 соответствует использованной в статье расчетной сетке.)

Параметр электрогазодинамического взаимодействия полагается малым, и поэтому движение среды описывается обычными газодинамическими уравнениями. Из уравнения энергии для газа, записанного относительно его энтальпии торможения, в котором, вследствие малых чисел Маха, несущественна вязкая диссипация, следует, что для случая теплоизолированной поверхности сферы энтальпия торможения во всей области течения является постоянной величиной. Так как в рассматриваемых условиях энтальпия и энтальпия торможения мало отличаются друг от друга, то постоянна и энтальпия газа. Учитывая, что давление в потоке также изменяется незначительно, находим, что все термодинамические параметры (и, следовательно, все коэффициенты переноса) в поле течения постоянны. Таким образом, течение газа можно описывать в рамках модели несжимаемой жидкости.

Система уравнений Навье – Стокса для расчета поля скорости около сферы в системе координат x, y (отсчитываемых вдоль оси течения и в перпендикулярном к ней направлении) в переменных (ψ, ω) , где ψ – функция тока, ω – завихренность, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -2\pi u \omega \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega}{y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$2\pi u i = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad 2\pi u v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

Здесь u и v – продольная и поперечная составляющие вектора скорости газа, v – коэффициент его кинематической вязкости. Граничные условия для системы (1.1), (1.2) – задание функции тока и завихренности на Γ_0 ($\psi = \pi y^2 u_0$, $\omega = 0$ в однородном потоке на бесконечности); прилипание жидкости и задание $\psi = 0$ на Γ ; мягкие условия на Γ_b (см. фиг. 1).

Сформулируем задачу для определения электродинамических величин. Предполагается, что электрохимические реакции и электрон-ионная рекомбинация на характерной (и небольшой) длине обтекания сферы несут незначительный вклад. Считается, что температура газа T достаточно высока, так что прилипание электронов к нейтральным молекулам (с образованием отрицательных ионов) отсутствует. Таким образом, как постулировалось вначале, заряженными частицами в потоке являются только положительные ионы и электроны.

Уравнения, описывающие электрические процессы, имеют следующий вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_i = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j}_e = 0 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{j}_i = e[n_i(\mathbf{v} + b_i \mathbf{E}) - D_i \nabla n_i], \quad e D_i = k T b_i \quad (1.5)$$

$$\mathbf{j}_e = -e[n_e(\mathbf{v} - b_e \mathbf{E}) - D_e \nabla n_e], \quad e D_e = k T b_e \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{e}{\epsilon_0}(n_i - n_e), \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (1.7)$$

Здесь индексы “ e ” и “ i ” относятся к электронам и положительным ионам, $\mathbf{j}_e, \mathbf{j}_i, b_e, b_i, D_e, D_i$ – векторы плотности электрического тока, подвижности и коэффициенты диффузии электронов и ионов, $\mathbf{E}$ – вектор электрического поля, ϕ – электрический потенциал. Вторые выражения в (1.5), (1.6) – соотношения Эйнштейна, связывающие подвижности и коэффициенты диффузии компонентов, $\mathbf{v}$ и T – скорость и температура газа, k – постоянная Больцмана, ϵ_0 – электрическая постоянная, e – заряд электрона. Подвижности и коэффициенты диффузии рассматриваемой ситуации являются постоянными величинами.

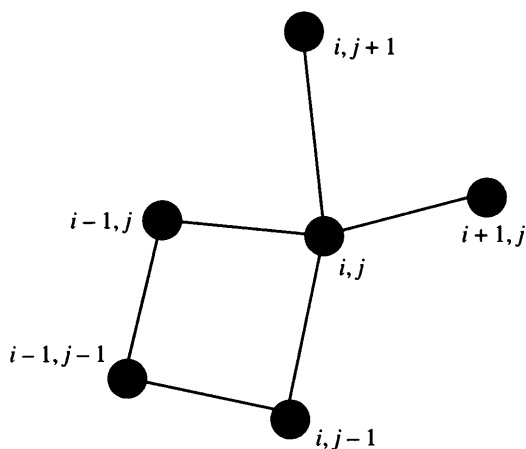
Из (1.4)–(1.7) находятся три уравнения эллиптического типа относительно n_e, n_i и ϕ . Поэтому необходимо задание граничных условий для этих величин на поверхности сферы Γ , верхней границе расчетной области Γ_0 , оси симметрии Γ' и в выходном сечении Γ_b . Сформулируем эти условия. Набегающий поток газа, как указывалось выше, является электрически квазинейтральным, и поэтому на Γ_0 выполняется условие $n_i = n_e = n_0$. Потенциал ϕ на бесконечности (на Γ_0) постоянен и полагается равным нулю. На поверхности сферы Γ , которая предполагается каталитической, концентрации заряженных частиц равны нулю. Потенциал на Γ равен постоянной величине ϕ_Γ . На оси симметрии Γ' производные по y от потенциала и концентраций равны нулю. В выходном сечении Γ_b задаются мягкие граничные условия для всех величин.

Общая система граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_0: n_i &= n_0, \quad n_e = n_0, \quad \phi = 0, \quad \omega = 0, \quad \Psi = \pi u^2 u_0 \\ \Gamma: n_i &= 0, \quad n_e = 0, \quad \phi = \phi_\Gamma, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \psi = 0 \\ \Gamma': \frac{\partial n_i}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial n_e}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \omega = 0, \quad \Psi = 0 \\ \Gamma_b: \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0 \quad (\xi = \psi, \omega, n_e, n_i, \phi) \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. Метод построения расчетной сетки и численный алгоритм. В разработанном для численного решения поставленной задачи алгоритме была использована неравномерная криволинейная сетка, учитывающая особенности геометрии течения и наличие областей с большими градиентами параметров в пограничном слое вблизи тела.

Алгоритм построения сетки основан на решении следующей механической задачи. Пусть в плоскости x, y имеется прямоугольный массив дискретных материальных точек; основание прямоугольника лежит на оси x , крайняя правая точка основания совпадает с передней критической точкой сферы; другая (длинная) сторона прямоугольника на-



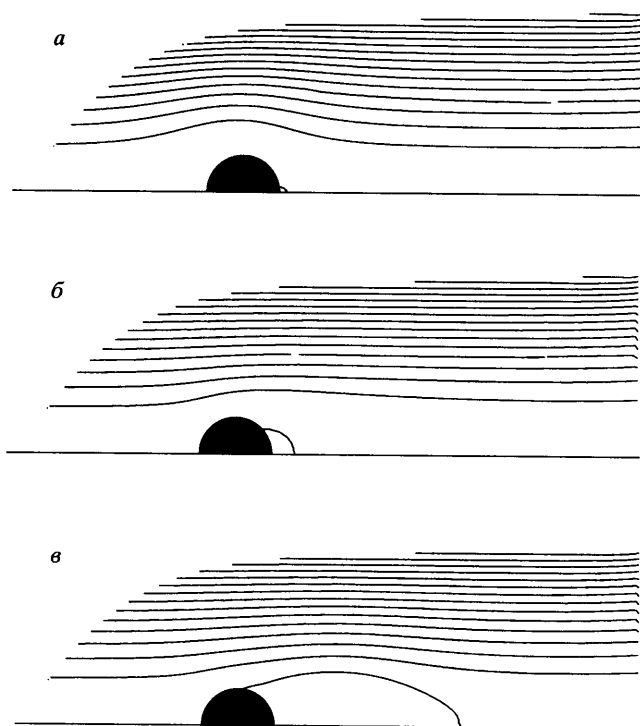
Фиг. 2. Шеститочечная расчетная схема

правлена по y . Каждая материальная точка связана с соседними точками упругими связями с потенциалами, пропорциональными s^m , где s – расстояние между точками; при $s = 2$ имеем обычную упругую связь. (Образно говоря, между соседними точками имеются “пружинки” с заданными упругими свойствами.) Обозначим посредством L линию, соединяющую правые крайние точки рассматриваемого массива, и зададим закон движения этой линии на плоскости. При этом наложим условие, что первоначально расположенные на L точки будут на ней оставаться в процессе движения (но, в силу упругих связей с соседними точками, могут перемещаться вдоль L). Движение линии L вызовет, в результате наложенных связей, движение всего массива материальных точек. Выберем следующий закон движения линии L : ее нижняя часть “ложится” на цилиндрический контур Γ , а верхняя, представляющая собой жесткий стержень, поворачивается с постоянной угловой скоростью. Результирующее расположение точек массива – узлов расчетной сетки, представленное на фиг. 1, определялось из совместного решения уравнений движения всех материальных точек, взаимодействующих друг с другом по сформулированным выше законам.

Для аппроксимации производных в узлах полученной сетки рассмотрим некоторый узел (i, j) и выразим значения функции $f = \{n_e, n_i, \phi, \Psi, \omega\}$ в окружающих этот узел точках через ее значение в точке (i, j) , сохраняя в разностных соотношениях члены второго порядка малости (фиг. 2). В результате получим пять уравнений относительно пяти неизвестных производных $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ в точке (i, j) . Решая эту систему, найдем соотношения между производными функции f в узле (i, j) и ее значениями в узлах (i, j) , $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j+1)$, $(i, j-1)$, $(i-1, j-1)$. Подставляя эти соотношения в уравнения (1.1)–(1.7), получим систему нелинейных конечно-разностных уравнений относительно значений $f = \{n_e, n_i, \phi, \Psi, \omega\}$ в узловых точках, которая решается итерационным методом. Решение каждого эллиптического уравнения производится методом Гаусса – Зейделя. Как отмечалось выше, газодинамическая и электрическая части задачи решаются последовательно.

3. Результаты расчетов. Расчеты проводились при следующих условиях: температура набегающего потока 1500 K , коэффициент кинематической вязкости воздуха $1.68 \cdot 10^{-4}\text{ м}^2/\text{с}$, коэффициенты диффузии электронов и положительных ионов $D_e = 8.61 \cdot 10^{-2}\text{ м}^2/\text{с}$ и $D_i = 8.61 \cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$, радиус сферы $R = 5\text{ мм}$, концентрации электронов и ионов в набегающем потоке $n_0 = 10^8\text{ см}^{-3}$.

Для проверки работоспособности гидродинамической модели были проведены расчеты обтекания сферы при различных скоростях набегающего потока. Линии тока газа



Фиг. 3. Линии тока $\psi = \text{const}$ при обтекании сферы. $u_0 = 0.01; 1.00; 10$ м/с (а–в); между соседними линиями тока $\Delta\psi = 5u_0R^2$

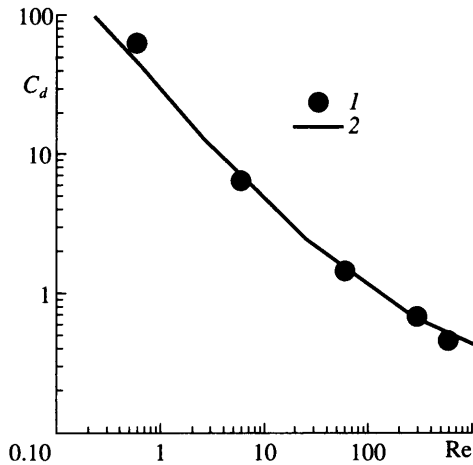
$\psi = \text{const}$ для $u_0 = 0.01$ м/с (число Рейнольдса $Re = 0.596$); $u_0 = 1$ м/с ($Re = 59.6$); $u_0 = 10$ м/с ($Re = 596$) представлены на фиг. 3. Самые нижние, показанные на рисунках, линии тока являются границами примыкающих к задней части сферы отрывных зон. С увеличением скорости эти зоны монотонно расширяются.

Расчетная зависимость коэффициента сопротивления сферы C_d от Re показана на фиг. 4. Результаты расчетов по используемому алгоритму хорошо соответствуют экспериментальным результатам.

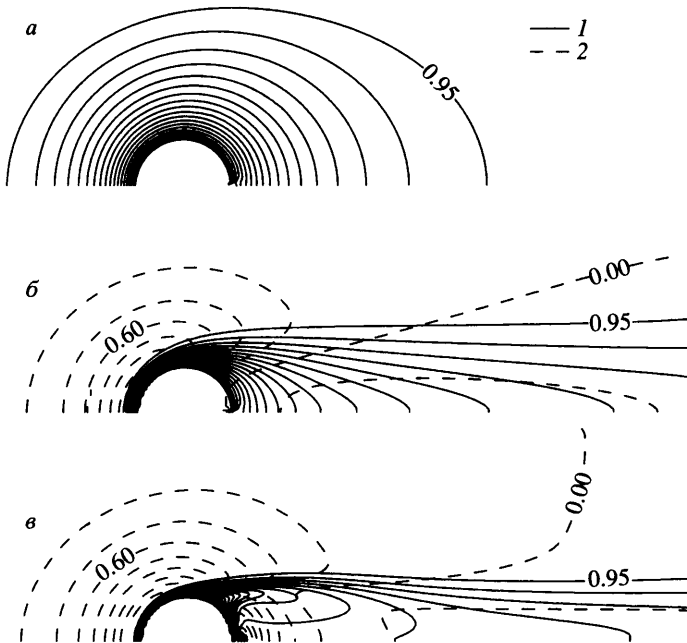
Представим результаты численного моделирования электрических характеристик при равном нулю потенциале сферы. Поля концентраций заряженных частиц и электрического потенциала при различных скоростях потока представлены на фиг. 5. Концентрации электронов и ионов совпадают в области течения всюду вне узкого пристеночного электрического диффузионного пограничного слоя.

Укажем важную особенность полученных распределений электрических величин. С увеличением скорости потока линии равных концентраций все более вытягиваются вправо. Для потенциала такой тенденции не наблюдается. Это связано с тем, что эллиптические уравнения для концентраций содержат, помимо диффузионных, также конвективные, пропорциональные скорости, члены, описывающие “снос” субстанций n в направлении потока. Эллиптическое уравнение для потенциала таких членов не содержит.

Второй вывод состоит в том, что практически во всей области течения поток остается электрически квазинейтральным. Существенное различие концентраций электронов и ионов наблюдается только в узкой пристеночной области толщиной порядка дебаевского радиуса r_d ($r_d^2 = \epsilon_0 kT / e^2 n_0$), которая не видна в масштабе на фиг. 5. В этой области профиль концентрации ионной компоненты более наполнен, чем электронной компоненты; качественно эти профили имеют вид, показанный в [8–9].

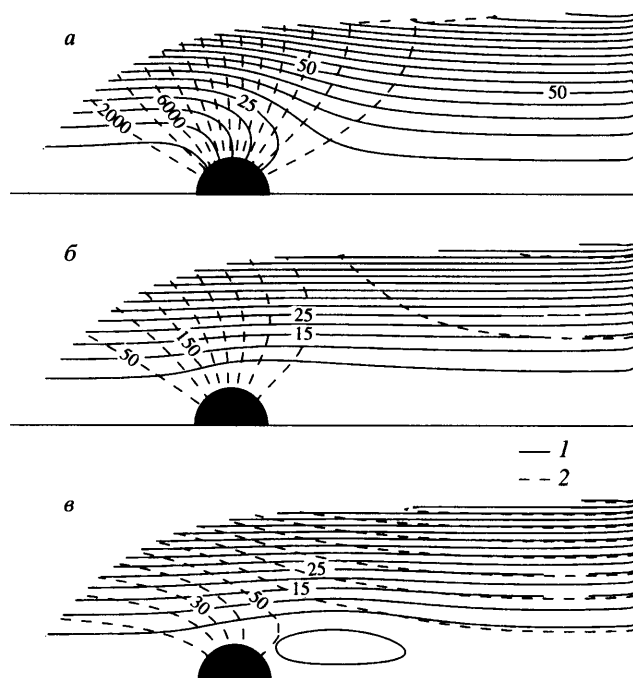


Фиг. 4. Зависимость коэффициента сопротивления сферы C_d от числа Рейнольдса Re . 1 – расчет, 2 – эксперимент



Фиг. 5. Поля концентраций электронов и ионов (линии 1) и электрического потенциала (линии 2): $u_0 = 0.01; 1.00; 10$ м/с (а–в). Концентрации отнесены к величине n_0 , а электрический потенциал – к $en_0\epsilon_0^{-1}r_d^2$. Разность значений безразмерных концентраций и безразмерного потенциала между соседними линиями составляет 0.05 и 0.2

При малых скоростях потока линии тока ионов существенно отличаются от линий тока газа вследствие диффузии ионов к поверхности сферы (фиг. б). При больших скоростях газа линии тока ионов практически совпадают с линиями тока жидкости. Это связано с относительно малой скоростью дрейфа ионов в электрическом поле по сравнению с достаточно большой скоростью газа.

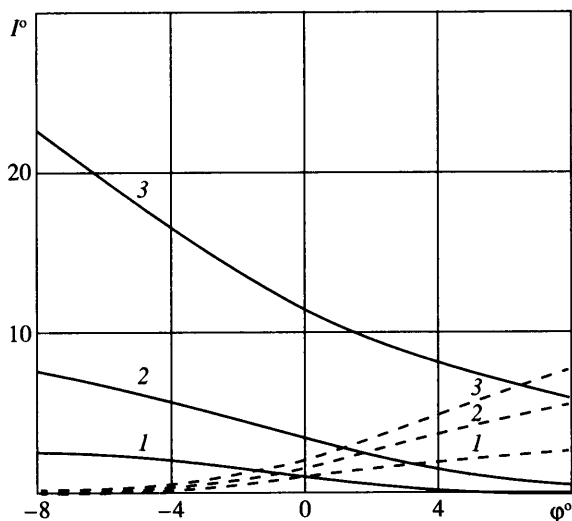


Фиг. 6. Линии тока электронов (линии 2) и ионов (линии 1): $u_0 = 0.01; 1.00; 10$ м/с (а–в). Значения соответствующих функций тока отнесены к величине $u_0 R^2 e n_0$

Аналогичные расчеты были проведены при отличном от нуля (положительном и отрицательном) потенциале сферы. Полученные зависимости токов на сферу от ее потенциала показаны на фиг. 7. Электронный ток значительно больше ионного: действительно, при $\varphi_T = 0$, $u_0 = 0$ отношение электронного и ионного токов равно $D_e/D_i \sim 10^3$, и эта оценка сохраняется для достаточно широкого диапазона изменения φ_T и u_0 . Оба тока монотонно возрастают с увеличением скорости газа. С ее ростом линии $n_e = \text{const}$ все более прижимаются к головной части цилиндра (фиг. 5), и диффузионный поток электронов на нее возрастает. Заметим, что зависимости электронного и ионного тока от потенциала сферы при равной нулю скорости газа ранее были получены в [2].

Заключение. Рассмотрена проблема обтекания сферического зонда с проводящей каталитической поверхностью потоком слабоионизованного электрически квазинейтрального газа. Помимо процессов диффузии электронов и ионов и их дрейфа в электрическом поле, которые рассматриваются в подавляющем числе работ по этой проблеме, в данном исследовании учтено конвективное (вместе с потоком) движение заряженных частиц. Созданы физико-математическая модель и вычислительная программа для гидродинамической и электрической частей задачи. Надежность численного алгоритма подтверждена хорошим воспроизведением классической экспериментальной зависимости коэффициента сопротивления сферы от числа Рейнольдса в рассмотренном диапазоне $0 \leq \text{Re} \leq 1000$.

Расчеты проведены применительно к условиям нахождения сферы (зонда) малых размеров в высокотемпературном слабоионизованном потоке (продуктах сгорания). Определено влияние скорости газа на вольт-амперные характеристики зонда. Суммарный электрический ток на сферу в основном определяется электронной составляющей, которая возрастает с увеличением скорости потока. Эта тенденция обусловлена конвекцией электронов, приводящей к сгущению линий их равной концентрации в окрестности передней критической точки сферы.



Фиг. 7. Зависимость модулей Γ° электронного и ионного токов (штриховые и сплошные линии) на сферу от ее безразмерного потенциала $\varphi^\circ = \varphi_\Gamma / en_0 \epsilon_0^{-1} r_d^2$. Электронный и ионный токи соответственно отнесены к их значениям 108 и 0.108 нА для случая $u_0 = 0$, $\varphi_\Gamma = 0$ (кривые 1–3)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00394-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cohen I.M.* Asymptotic Theory of Spherical Electrostatic Probes in a Slightly Ionized, Collision-Dominated Gas // *Phys. Fluids*. 1963. V. 6. № 10. P. 1492. – 1499.
2. *Baum E., Chapkis R.L.* Theory of a spherical electrostatic probe in a continuum gas: an exact solution // *AIAA Journal*. 1970. V. 8. № 6. P. 1073–1077.
3. Чан П., Тэлбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. М.: Мир, 1978. 201 с.
4. Егорова З.М., Кашеваров А.В. О вольт-амперной характеристике цилиндрического зонда Лэнгмюра в медленно движущейся плазме // *ПМТФ*. 1993. № 2. С. 3–10.
5. Кашеваров А.В. Вольт-амперная характеристика цилиндрического зонда Лэнгмюра в медленно движущейся плазме при больших потенциалах зонда // *Теплофизика высоких температур*. 1994. Т. 32. № 2. С. 173–176.
6. Кашеваров А.В. Характеристика охлаждаемого цилиндрического зонда в медленно движущейся плазме при больших потенциалах // *Теплофизика высоких температур*. 1996. Т. 34. № 4. С. 519–524.
7. Ватажин А.Б., Улыбышев К.Е. Модель формирования электрического тока выноса в каналах авиационных реактивных двигателей // *Изв. РАН. МЖГ*. 2000. № 5. С. 139–148.
8. Ватажин А.Б., Улыбышев К.Е. Диффузионные и электрические процессы в турбулентном пограничном слое в окрестности критической точки обтекаемого тела // *Изв. РАН. МЖГ*. 2001. № 3. С. 102–110.
9. Ватажин А.Б., Улыбышев К.Е., Холщевникова Е.К., Цыганов Д.Л. Электрические диффузионные процессы на высокотемпературной турбинной лопатке и ее вклад в ток выноса из авиационного двигателя // *Теплофизика высоких температур*. 2002. Т. 40. № 3. С. 376–387.