

УДК 532.5.013.4:532.546:534.1

© 2006 г. Д. В. ЛЮБИМОВ, Г. А. СЕДЕЛЬНИКОВ

## ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ФРОНТА ВЫТЕСНЕНИЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Изучено влияние линейно поляризованных вибраций на устойчивость плоского фронта вытеснения в пористой среде. Рассмотрена задача устойчивости движения плоского фронта вытеснения, движущегося с постоянной скоростью  $U$ , при действии вибраций, нормальных к фронту. Показано, что динамика плоского фронта вытеснения под воздействием вибраций описывается уравнением Матье с диссипативным слагаемым. Для случая высокочастотных вибраций, используя стандартный метод осреднения, обнаружено, что вибрации могут только повышать устойчивость системы. Установлено, что вибрационные воздействия стабилизируют плоский фронт вытеснения относительно части спектра возмущений.

*Ключевые слова:* двухфазная фильтрация, фронт вытеснения, устойчивость, вибрация.

Задача о моделировании движения фронта вытеснения при фильтрации двухфазной несмешивающейся жидкости – одна из самых актуальных в исследовании процессов добычи углеводородного сырья. В силу различных причин фронт вытеснения может терять устойчивость, что проявляется в образовании так называемых “пальцев”. В настоящее время имеется достаточно большое количество работ, посвященных вязкому пальцеобразованию [1, 2], обусловленному отличием вязкостей вытесняющей и вытесняемой жидкостей. Однако действие переменных воздействий на формирование и развитие неустойчивости фронта вытеснения исследовано недостаточно. В работах [3, 4] изучено влияние вибраций на неоднородные среды и разработан теоретический подход для описания поведения поверхности раздела в поле высокочастотных вибраций.

**1. Постановка задачи и вывод осредненных уравнений.** Рассматривается задача о движении фронта вытеснения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей, насыщающих пористую среду. Пусть граница раздела жидкостей движется с некоторой характерной скоростью  $U$ . Система совершает гармонические колебания по закону  $a \cos \omega t$ , вдоль заданного направления  $\gamma$  (фиг. 1).

Фильтрация каждой из жидкостей описывается уравнениями Дарси [5], записанными в подвижной системе координат, связанной со скелетом пористой среды

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{v}_j \nabla) \mathbf{v}_j + \frac{\mathbf{v}_j}{K} + \frac{\nabla p_j}{\rho_j} + a \omega^2 \cos \omega t \gamma = 0 \quad (1.1)$$

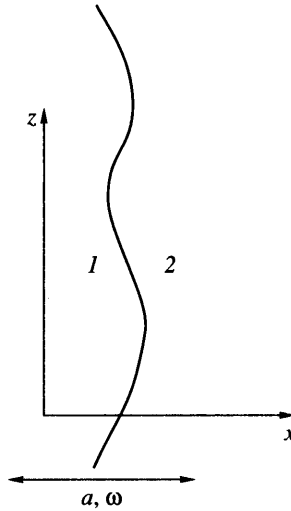
$$\operatorname{div} \mathbf{v}_j = 0$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – скорость фильтрации,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\varepsilon$  – коэффициент пористости,  $K$  – проницаемость,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $a$  и  $\omega$  – амплитуда и частота вибраций,  $\gamma$  – единичный вектор, параллельный оси вибраций. Величины, относящиеся к каждой из фаз, обозначены индексом  $j = 1, 2$ .

Направим ось  $x$  вдоль оси вибраций и обозначим  $x$ -координату точек поверхности раздела через  $\xi$ , тогда динамику поведения границы раздела будет описывать уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla \xi) = v_x$$

где  $v_x$  –  $x$ -компонента скорости.



Фиг. 1. Геометрия задачи

Граничные условия на границе раздела запишем в виде

$$[v_n]_{\xi} = 0, \quad [p]_{\xi} = p_c$$

что соответствует условию непрерывности нормальной компоненты скорости и балансу нормальных напряжений. Квадратными скобками с индексом  $\xi$  обозначен скачок функции на границе раздела,  $p_c$  – капиллярный скачок давления.

В случае высокочастотных вибраций возможно разделение всех процессов на быстрые и медленные; такое разделение возможно, если характерное гидродинамическое время много больше характерного времени вибраций:  $\mu^2 = U/L\omega \ll 1$ , где  $L$  – характерный размер задачи.

Таким образом, возникает иерархия времен, позволяющая применить метод многих масштабов [6]. Производная по времени от любой величины представляется в виде ряда по малому параметру  $\mu$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mu^{-2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t_0} + \dots$$

Во всех переменных можно выделить осредненную (характерные времена изменения велики по сравнению с  $\omega^{-1}$ ) и пульсационную компоненты

$$p_j = \langle p_j \rangle + p_j, \quad \mathbf{v}_j = \langle \mathbf{v}_j \rangle + \mathbf{v}_j, \quad \xi_j = \langle \xi_j \rangle + \xi_j$$

Эффективное разделение задачи на осредненную и пульсационную части возможно, если малы нелинейные слагаемые в уравнении, для чего необходимо, чтобы  $\delta = a/L \ll 1$ .

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав следующие единицы измерения: длины  $L$ , медленного времени  $L/U$ , осредненной скорости  $\epsilon U$ , осредненного давления  $U\omega L(\rho_1 + \rho_2)/2$ , быстрого времени  $\omega^{-1}$ , пульсационной скорости  $\epsilon a\omega$ , пульсационного давления  $a\omega^2 L(\rho_1 + \rho_2)/2$ . Получим:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \tau} + \alpha_j \mathbf{v}_j + \beta_j \nabla p_j + \cos \tau \gamma = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \delta(v_x - (\mathbf{v} \nabla \xi))_{x=\xi} \quad (1.2)$$

$$[v_n]_{\xi} = 0, \quad [p]_{\xi} = 0$$

$$\mu^2 \frac{\partial \langle \mathbf{v}_j \rangle}{\partial t_0} + \alpha_j \langle \mathbf{v}_j \rangle + \beta_j \nabla \langle p_j \rangle = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \langle \xi \rangle}{\partial t_0} = \left( \langle v_x \rangle - \frac{\delta}{\mu^2} \left( \overline{(\mathbf{v} \nabla \xi)} + \frac{\partial \overline{v_x \xi}}{\partial x} \right) \right)_{x=\langle \xi \rangle} \quad (1.4)$$

$$\left[ \frac{\mu^2}{\delta} \langle v_x \rangle + \overline{(\mathbf{v} \nabla \xi)} + \frac{\partial \overline{v_x \xi}}{\partial x} \right]_{\langle \xi \rangle} = 0, \quad \left[ \langle p \rangle + \frac{\delta}{\mu^2} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} \right]_{\langle \xi \rangle} = p_c \quad (1.5)$$

в выражениях (1.4) и (1.5) заведомо малые слагаемые были опущены; горизонтальная черта над соответствующими выражениями обозначает осреднение по быстрому времени  $\tau$ .

В уравнениях и граничных условиях (1.2)–(1.5) наряду с  $\mu$  и  $\delta$  присутствуют безразмерные параметры:

$$\alpha_j = \frac{\varepsilon v_j}{K \omega}, \quad \beta_j = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2 \rho_j}, \quad j = 1, 2$$

Таким образом, задача характеризуется пятью независимыми безразмерными параметрами, так как параметры  $\beta_1$  и  $\beta_2$  связаны очевидным соотношением:  $1/\beta_1 = 1/\beta_2 = 2$ .

Из уравнений (1.2) и (1.3) видно, что завихренность ( $\text{rot} \mathbf{v}_j$ ) может только затухать со временем, что дает возможность ввести потенциал скорости соотношением  $\mathbf{v}_j = \nabla \varphi_j$ .

Давление, потенциал скорости и положение границы раздела представим в виде рядов по степеням малого параметра  $\mu$

$$\begin{aligned} \langle p_j \rangle &= \mu^0 \langle p_j \rangle + \mu \langle q_j \rangle + \dots, \quad p_j = \mu^0 p_j + \mu q_j + \dots \\ \langle \varphi_j \rangle &= \mu^0 \langle \varphi_j \rangle + \mu \langle \psi_j \rangle + \dots, \quad \varphi_j = \mu^0 \varphi_j + \mu \psi_j + \dots \\ \langle \xi \rangle &= \mu^0 \langle \xi \rangle + \mu \langle \zeta \rangle + \dots, \quad \xi = \mu \xi + \mu^2 \zeta + \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

Наибольшее влияние вибрационное воздействие будет оказывать в случае, когда отношение малых параметров  $\mu$  и  $\delta$  конечно:  $G \equiv \delta/\mu = O(1)$ . Параметры  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  также будем предполагать конечными.

Подставляя разложения (1.6) в систему уравнений и граничных условий (1.2)–(1.5) и собирая слагаемые одного порядка, получаем цепочку уравнений. В первом порядке для пульсационной задачи имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j'}{\partial \tau} + \alpha_j \varphi_j' + \beta_j p_j' + x e^{i\tau} &= 0 \\ \Delta \varphi_j' &= 0, \quad \frac{\partial \xi'}{\partial \tau} = G \frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \quad \left[ \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right]_{\langle \xi \rangle} = 0, \quad [p']_{\langle \xi \rangle} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Соотношения (1.7) записаны в комплексной форме, так что

$$\varphi_j = \text{Re}(\varphi_j'), \quad p_j = \text{Re}(p_j'), \quad \xi = \text{Re}(\xi')$$

В дальнейшем штрихи будут опущены.

Представим  $\varphi_j$  и  $p_j$  в виде:  $\varphi_j = \Phi_j e^{it}$ ,  $p_j = P_j e^{it}$ , где  $\Phi_j$ ,  $P_j$  не зависят от быстрого времени. Тогда из (1.7) получим

$$P_j = -\frac{x + (i + \alpha_j)\Phi_j}{\beta_j}; \quad \Delta\Phi_j = 0, \quad \xi = -iG \frac{\partial\Phi}{\partial x} e^{it} \quad (1.8)$$

$$\left[ \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right]_{\langle \xi \rangle} = 0, \quad [P]_{\langle \xi \rangle} = 0$$

В первом порядке для осредненных полей получаем систему уравнений и граничных условий

$$\alpha_j \langle \varphi_j \rangle + \beta_j \langle p_j \rangle = 0$$

$$\frac{\partial \langle \xi \rangle}{\partial t_0} = \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial x} + G \left( \overline{\frac{\partial^2 \varphi \xi}{\partial x^2}} - \overline{(\nabla \varphi \nabla \xi)} \right)$$

$$\left[ \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial x} + G \left( \overline{\frac{\partial^2 \varphi \xi}{\partial x^2}} - \overline{(\nabla \varphi \nabla \xi)} \right) \right]_{\langle \xi \rangle} = 0, \quad \left[ \langle p \rangle + G \overline{\frac{\partial p \xi}{\partial x}} \right]_{\langle \xi \rangle} = 0$$

После проведения осреднения получим замкнутую систему уравнений и граничных условий

$$\alpha_j \langle \varphi_j \rangle + \beta_j \langle p_j \rangle = 0, \quad \Delta \langle \varphi_j \rangle = 0$$

$$\frac{\partial \langle \xi \rangle}{\partial t_0} = \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial x} + \frac{G^2}{2} \text{Im} \left( \nabla_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \nabla_2 \Phi^* \right), \quad \nabla_2 = \nabla - \frac{\partial}{\partial x} \gamma \quad (1.9)$$

$$\left[ \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial x} + \frac{G^2}{2} \text{Im} \left( \nabla_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \nabla_2 \Phi^* \right) \right]_{\langle \xi \rangle} = 0$$

$$\left[ \langle p \rangle + \frac{G^2}{2\beta} \left( \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|^2 - \text{Im} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right]_{\langle \xi \rangle} = 0$$

Здесь  $\nabla_2$  – оператор градиента в плоскости ортогональной оси вибраций, звездочкой обозначено комплексное сопряжение, а амплитуда потенциала  $\Phi$  должна быть найдена из решения пульсационной задачи.

**2. Плоский фронт, высокочастотные вибрации.** На основе системы уравнений и граничных условий (1.8) и (1.9), полученных в предыдущей части, рассмотрим задачу устойчивости движения плоского фронта вытеснения, движущегося с постоянной скоростью  $U$ , при действии высокочастотных вибраций, нормальных к фронту. Направление движения совпадает с осью вибраций. Параметры, относящиеся к вытесняющей жидкости, будем обозначать индексом 1, а вытесняемой – индексом 2.

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью невозмущенного фронта, для чего сделаем замену

$$\langle \varphi_j \rangle \rightarrow \langle \varphi_j \rangle + x/\varepsilon, \quad \langle \xi \rangle \rightarrow \langle \xi \rangle + t/\varepsilon$$

Начало системы координат совпадает с положением невозмущенного фронта.

Уравнения и граничные условия (1.8) и (1.9) допускают следующее основное состояние, описывающее решение однородного вытеснения

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \Phi_j = 0, \quad P_j = -\frac{x}{\beta_j}, \quad \langle \varphi_j \rangle = 0, \quad \langle p_j \rangle = -\frac{\alpha_j}{\varepsilon \beta_j} x$$

Для исследования устойчивости движения плоского фронта внесем в (1.8) и (1.9) возмущения потенциала, давления и положения границы раздела:

$$\langle \xi \rangle = \langle \zeta \rangle, \quad \langle \varphi_j \rangle = \langle \psi_j \rangle, \quad \langle p_j \rangle = \langle p_j \rangle + \langle q_j \rangle, \quad \Phi_j = \Psi_j, \quad P_j = P_j + Q_j$$

В линейном по малым возмущениям приближении получим следующую задачу:

$$\Delta \Psi_j = 0, \quad \Delta \langle \psi_j \rangle = 0 \tag{2.1}$$

$$Q_j = \frac{-1}{\beta_j} ((i + \alpha_j) \Psi_j), \quad \alpha_j \langle \psi_j \rangle + \beta_j \langle q_j \rangle = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \langle \zeta \rangle}{\partial t_0} = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$x = 0: \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial x} \right] = 0, \quad \left[ Q + \frac{\partial P}{\partial x} \langle \zeta \rangle \right] = 0 \tag{2.4}$$

$$\left[ \langle q \rangle + \frac{\partial \langle q \rangle}{\partial x} \langle \zeta \rangle - \frac{G^2}{2\beta} \text{Im} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] = 0 \tag{2.5}$$

Уравнения (2.1) и граничные условия (2.4) допускают решение в виде нормальных возмущений, экспоненциально затухающих при удалении от фронта

$$\Psi_1 = A e^{\lambda_0 t_0} e^{ikz} e^{kx}, \quad \Psi_2 = -A e^{\lambda_0 t_0} e^{ikz} e^{-kx} \tag{2.6}$$

$$\langle \psi_1 \rangle = B e^{\lambda_0 t_0} e^{ikz} e^{kx}, \quad \langle \psi_2 \rangle = -B e^{\lambda_0 t_0} e^{ikz} e^{-kx} \tag{2.7}$$

где  $k$  – волновое число возмущений, предполагаемое положительным, а  $\lambda_0$  – инкремент возмущений.

Выражая из (2.2) амплитуды пульсационного давления, и учитывая (2.6) и (2.7), имеем

$$Q_l = \frac{(-1)^l}{\beta_l} (i + \alpha_l) A e^{\lambda_0 t_0} e^{ikz} e^{kx}, \quad (l = 1, 2) \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в граничное условие (2.4), получим

$$\beta_2 (\langle \zeta \rangle + (i + \alpha_1) \Psi_1) = \beta_1 (\langle \zeta \rangle + (i + \alpha_2) \Psi_2) \tag{2.9}$$

Из (2.3) с учетом (2.7) следует

$$\langle \zeta \rangle = \frac{k}{\lambda_0} \langle \psi_1 \rangle \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.9), учитывая (2.6) и (2.7), находим связь между амплитудами  $A$  и  $B$

$$A = \frac{k}{\lambda_0 \beta_2 (i + \alpha_1) + \beta_1 (i + \alpha_2)} B$$

Выражая из (2.2) возмущение осредненного давления  $\langle q_j \rangle$  и подставляя в (2.5), получим

$$\left[ \frac{\alpha}{\beta} (\langle \psi \rangle + \varepsilon^{-1} \langle \zeta \rangle) + \frac{G^2}{2\beta} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right]_{x=0} = 0 \quad (2.11)$$

Учитывая (2.6), (2.7) и (2.10), граничное условие (2.11) можно записать как

$$\beta_2 \left( \alpha_1 \left( B + \frac{k}{\varepsilon \lambda_0} B \right) + \frac{Ek^2}{\lambda_0} B \right) = \beta_1 \left( \alpha_2 \left( -B + \frac{k}{\varepsilon \lambda_0} B \right) + \frac{Ek^2}{\lambda_0} B \right) \quad (2.12)$$

$$E \equiv \frac{1}{2} \frac{G^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2}$$

Выражая  $\lambda_0$  из (2.12), получим

$$\lambda_0 = \frac{(\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1) k}{(\beta_2 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2) \varepsilon} + \frac{G^2 (\beta_1 - \beta_2) (\beta_2^2 - \beta_1^2) (\beta_2 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2)^{-1}}{2 ((\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2)} k^2 \quad (2.13)$$

В размерном виде выражение (2.13) примет вид

$$\lambda_0 = - \frac{U \eta_1 - \eta_2 k}{\varepsilon \eta_2 + \eta_1} k - \frac{2a^2 \omega^2 K (\rho_1 + \rho_2) (\rho_1 - \rho_2)^2}{\varepsilon (\eta_1 + \eta_2) [(\rho_1 + \rho_2)^2 + \varepsilon^2 (\eta_1 + \eta_2)^2 K^{-2} \omega^{-2}]} k^2 \quad (2.14)$$

Первое слагаемое в выражении (2.14) описывает инкременты возмущений плоского фронта вытеснения в отсутствие вибраций. При этом устойчивость фронта определяется только знаком разности динамических вязкостей (устойчивость, если более вязкая жидкость вытесняет менее вязкую, и неустойчивость, если менее вязкая вытесняет более вязкую), что является хорошо известным фактом [5]. Второе слагаемое, определяющее влияние вибраций на устойчивость фронта, знакоопределенно и отрицательно. Таким образом, вибрации повышают устойчивость фронта.

В случае, когда менее вязкая жидкость вытесняет более вязкую, вибрационным воздействием удастся стабилизировать только коротковолновую часть спектра возмущений. Существует некоторое критическое волновое число, такое, что все возмущения с большими волновыми числами затухают со временем

$$k_{cr} = \frac{U (\eta_2 - \eta_1) [(\rho_1 + \rho_2)^2 + \varepsilon^2 (\eta_1 + \eta_2)^2 K^{-2} \omega^{-2}]}{2a^2 \omega^2 K (\rho_1 + \rho_2) (\rho_1 - \rho_2)^2} \quad (2.15)$$

Следует отметить, что вибрации стабилизируют возмущения, которые в случае отсутствия вибрационного воздействия были бы наиболее быстро растущими. В отсутствие вибраций спектр инкрементов не ограничен сверху, возмущения нарастают за сколь угодно малое время. Оценка характерного времени роста  $T$  наиболее быстро растущих возмущений при наличии вибраций, соответствующих  $k = k_{cr}/2$ , дает

$$T = \frac{2a^2 \omega^2 K \varepsilon (\eta_1 + \eta_2) (\rho_1 - \rho_2)^2}{U^2 (\eta_1 - \eta_2)^2 (\rho_1 + \rho_2) [1 + \varepsilon^2 (\eta_1 + \eta_2)^2 K^{-2} \omega^{-2} (\rho_1 + \rho_2)^{-2}]} \quad (2.16)$$

Для системы вода–нефть, насыщающей глинистый грунт (см. таблицу), характерное время (2.16) составляет 22.4 мин. Несмотря на то, что не удастся стабилизировать фронт

Жидкость	$\eta$ , г/см · с	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$a$ , см	$\omega$ , 1/с	$U$ , см/с	$K$ , см <sup>2</sup>	$\varepsilon$
Вода	0.01	1.0					
Нефть	0.015	0.7	0.2	100	0.05	$10^{-5}$	0.3

вытеснения полностью, вибрации значительно увеличивают характерные времена нарастания возмущений.

**3. Плоский фронт, конечные частоты вибраций.** Если принять за характерный размер в данной задаче величину  $k^{-1}$ , то для коротковолновых возмущений нарушается условие  $\mu^2 = U/L\omega \ll 1$ , и метод осреднения не применим.

Для изучения динамики поведения мелкомасштабных возмущений, а также влияния конечных частот вибраций, рассмотрим задачу устойчивости движения плоского фронта вытеснения, движущегося с постоянной скоростью  $U$ , под действием вибраций конечной частоты. Перейдем в движущуюся систему отсчета, для этого совместим начало координат с фронтом вытеснения, при этом ось  $x$  направим перпендикулярно, а ось  $z$  вдоль фронта

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \frac{v_j}{K} (\varphi_j + Ux) + \frac{p_j}{\rho_j} + a\omega^2 x \cos \omega t = 0, \quad \Delta \varphi_j = 0 \quad (3.1)$$

$$[p]_{\zeta} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{\zeta} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.2)$$

Уравнение Лапласа допускает следующие решения, затухающие на бесконечности

$$\varphi_1 = A e^{ikz} e^{kx}, \quad \varphi_2 = -A e^{ikz} e^{-kx} \quad (3.3)$$

Кинематическое условие (3.2) дает

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \dot{B} e^{ikz} e^{kx}, \quad \dot{B} = \frac{k}{\varepsilon} A \quad (3.4)$$

Здесь точка означает производную по времени.

Подставляя (3.1) в граничное условие (3.2) и учитывая (3.3) и (3.4), получим

$$\ddot{B} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{K(\rho_1 + \rho_2)} \varepsilon \dot{B} + kB \left( \frac{U\eta_1 - \eta_2}{K\rho_1 + \rho_2} + a\omega \frac{2\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cos \omega t \right) = 0 \quad (3.5)$$

Введем безразмерное время и приведем (3.5) к виду уравнения Матье с диссипативным слагаемым

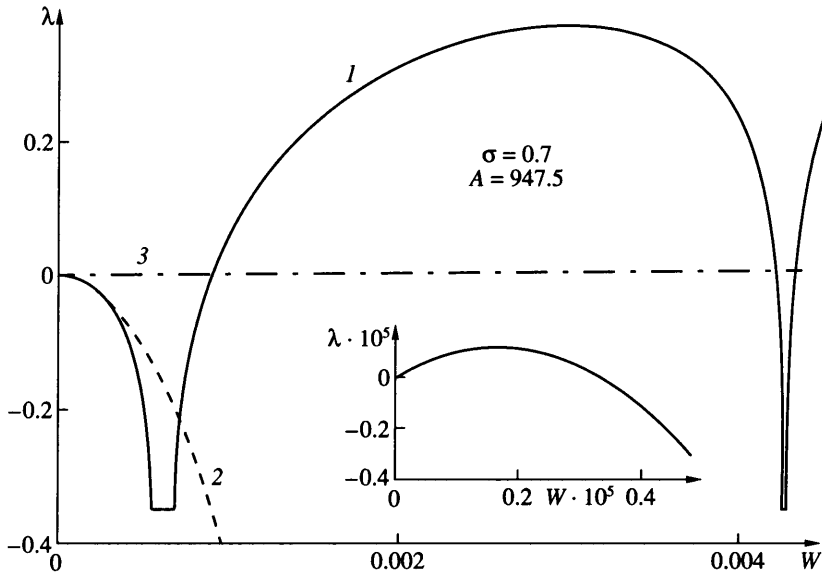
$$\ddot{B} + \sigma \dot{B} - W(1 + A \cos t)B = 0 \quad (3.6)$$

$$\sigma = \frac{(\eta_1 + \eta_2)\varepsilon}{K(\rho_1 + \rho_2)\omega}, \quad A = \frac{a\omega^2(\rho_1 - \rho_2)K}{U(\eta_1 - \eta_2)}, \quad W = \frac{U(\eta_2 - \eta_1)k}{K(\rho_1 + \rho_2)\omega^2} \quad (3.7)$$

В высокочастотном пределе, применяя стандартную процедуру осреднения к уравнению (3.6), получим

$$\lambda = \frac{W}{\sigma} - \frac{W^2 A^2}{2\sigma(1 + \sigma^2)} \quad (3.8)$$

Выражение (3.8) идентично ранее полученной формуле (2.14).



Фиг. 2. Зависимость  $\lambda$  от  $W$ , для  $A = 947.5$ ,  $\sigma = 0.7$ : 1 – конечные частоты, 2 – высокочастотный предел, 3 – отсутствие вибрационного воздействия

Для конечных значений частот вибраций решение уравнения (3.6) с периодически-ми коэффициентами проводилось численно, методом построения фундаментальной системы [7].

Численные расчеты были проведены на основе физических параметров для системы вода-нефть, насыщающей глинистый грунт (см. таблицу).

Оценка управляющих параметров (3.7) дает

$$\sigma = 0.7, \quad A = 947.5, \quad W = 3.7 \times 10^{-5} k \text{ (см}^{-1}\text{)}$$

На фиг. 2 представлена зависимость инкремента возмущений от параметра  $W$ . Результаты, полученные в высокочастотном пределе и для случая конечных частот вибраций, совпадают при малых значениях  $W$ , т.е. в той области, где применим метод осреднения. Во всем диапазоне использованных параметров наблюдалось согласие в значениях критических волновых чисел (2.15) и характерных времен роста возмущений (2.16), полученных различными методами.

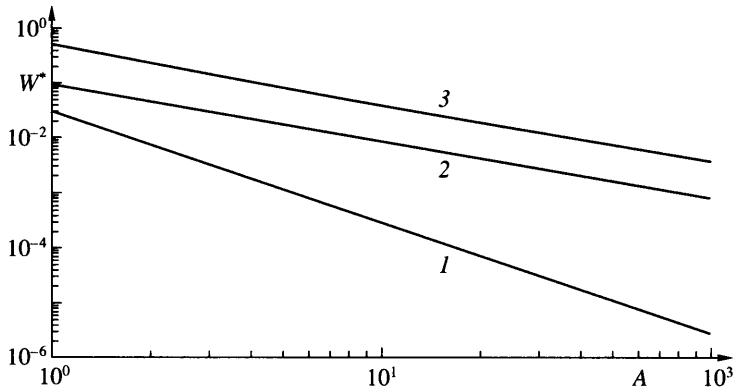
При больших значениях параметра  $W$  (большие волновые числа) для конечно-частотных вибраций удастся найти область параметрической неустойчивости. Зависимости критических значений  $W^*$  от параметра  $A$  для  $\sigma = 0.7$  изображены на фиг. 3.

Уравнение Дарси (1.1) не применимо для описания мелкомасштабных возмущений (длина волны порядка характерного размера пор). Это накладывает ограничение на верхнее значение параметра  $W$

$$W \ll \frac{2\pi U(\eta_2 - \eta_1)}{K^{3/2}(\rho_1 + \rho_2)\omega^2}$$

**Заключение.** Построена теоретическая модель, позволяющая описать поведение системы двух жидкостей, насыщающих пористую среду, в поле линейно поляризованных вибраций. Найдено критическое волновое число, такое, что все возмущения с больши-





Фиг. 3. Зависимость критических значений  $W^*$  от  $A$ , для  $\sigma = 0.7$ : 1 – граница основной зоны неустойчивости, 2, 3 – левая и правая границы первой резонансной области. Область устойчивости – область между линиями 1 и 2

ми волновыми числами затухают со временем. Оценено характерное время роста для наиболее быстро растущих возмущений. Используя метод построения фундаментальной системы, проведены численные расчеты для случая конечно-частотных вибраций. Найдены области параметрической неустойчивости. Вибрациями конечной частоты не удается стабилизировать коротковолновые возмущения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке из средств Гранта PE-009-0 Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР), в рамках Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96112) и гранта 04-01-96A068 Российского фонда фундаментальных исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.
2. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
3. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal vibrational convection. N.Y.: etc. Wiley, 1998. 358 p.
4. Любимов Д.В., Черепанов А.А. О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 8–13.
5. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
6. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
7. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Пермь

Поступила в редакцию  
19.VII.2005