

УДК 532.516.5

© 2006 г. В. И. ГРАБОВСКИЙ

**ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРИСТЫЙ РАДИАЛЬНЫЙ ПОДШИПНИК
С НАИБОЛЬШЕЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТЬЮ**

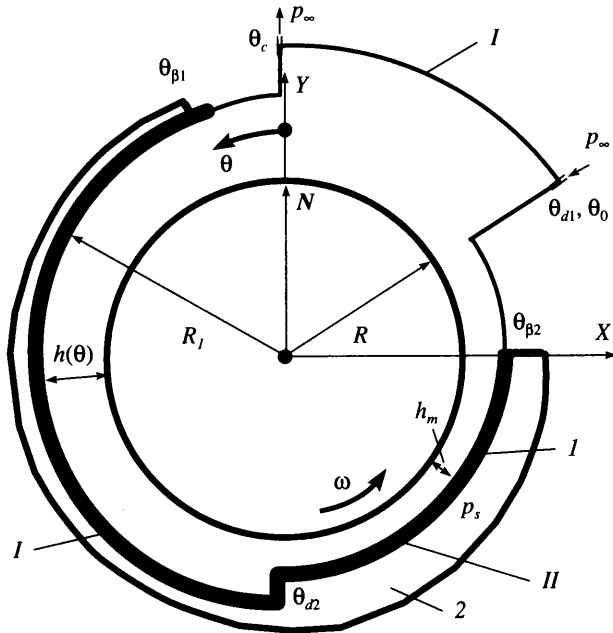
Решена задача об оптимальном по несущей способности бесконечном радиальном подшипнике с изотермической сжимаемой смазкой и пористой втулкой. Найдены оптимальные формы его зазора, размеры и положение втулки при разных свойствах втулки и условиях подачи смазки через нее.

Ключевые слова: оптимальное профилирование, радиальный подшипник, сжимаемая смазка, пористая втулка, давление питания, несущая способность.

Одним из факторов, значительно улучшающих работу газодинамических подшипников скольжения, является принудительная подача (наддув) смазки в их рабочий зазор. При этом улучшаются условия работы подшипника в моменты его пуска и остановки, а также увеличивается несущая способность и жесткость слоя смазки в рабочем режиме. Различные конструкции пористых подшипников и способы подачи смазки в смазочный слой рассматривались в [1–4]. Среди них выделяются подшипники с пористыми втулками при распределенной подаче смазки [1, 2], обладающие, например, повышенной виброустойчивостью. Работа подшипников с такими вставками исследовалась многими авторами, решавшими различные прямые задачи с заданными геометрическими параметрами. Параметрическая оптимизация характеристик пористого радиального подшипника выполнена в [5].

В данной работе формулируется и решается задача определения оптимальных форм зазора пористого бесконечного радиального подшипника, обеспечивающих максимум несущей способности при заданном расходе смазки Q_p , нагнетаемой под давлением из ресивера через пористую втулку. Также находятся наилучшие размер и положение втулки в зависимости от Q_p . Сжимаемая смазка полагается изотермической. Характерным для оптимальных зазоров является разрывность их высоты при наличии участков двустороннего и краевого экстремумов. Исследуется зависимость решения от безразмерных параметров, характеризующих проницаемость втулки, давление питания и сжимаемость смазки. Для удаления излишков смазки при выполнении балансного соотношения для ее окружного расхода вводится узкая дренажная щель с заданными геометрическими характеристиками. Ее наилучшее положение относительно втулки определяется из решения. В качестве граничного условия для давления используется известное условие питающей щели, положение которой также находится.

1. Для решения задачи выбираются цилиндрические координаты r, θ, z с осью z , направленной по оси вала, радиуса R и бесконечно большой длины. Вал вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω , а цилиндрический подшипник, уравнение поверхности которого $r = R_1(\theta)$, неподвижен. Вводится высота зазора $h(\theta) = R_1 - R$, удовлетворяющая неравенству $h_m \leq h \ll R$ (на фиг. 1 зазор показан в увеличенном масштабе), и координата $y = r - R$. Форма зазора определяется функцией $h(\theta)$. Задается величина минимально допустимой высоты зазора h_m , появляющаяся из-за запрета касания движущихся относительно друг друга поверхностей. Изотермическая смазка с плотностью ρ , пропорциональной давлению p , имеет постоянную вязкость μ_c . Из ресивера с давлением



Фиг. 1. К постановке задачи. I, II – участки оптимальности, 1 – пористая втулка, 2 – ресивер

питания $p_s > p$ в рабочий зазор через пористую втулку постоянной проницаемости k_p и толщиной $D \gg h_m$ нагнетается сжимаемая смазка с теми же свойствами. Угловой размер втулки может изменяться в пределах $0 < (\theta_{\beta 2} - \theta_{\beta 1}) < 2\pi$.

Далее с целью упрощения анализа принимается, что для давления в пористом слое p_p справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial p_p}{\partial y} \right| \gg \left| \frac{\partial p_p}{R \partial \theta} \right|$$

При его выполнении смазка течет по пористому слою и на выходе из него в радиальном направлении y . В дополнении к этому примем, что ее течение в порах втулки подчиняется закону Дарси [1, 2]. Тогда плотность радиального потока смазки j_p в этом слое определится уравнением

$$j_p(\theta) = -k_p \mu_c^{-1} \rho \frac{\partial p_p}{\partial y}$$

Если изотермическая смазка – совершенный газ с газовой постоянной R_T , то интегрирование этого уравнения через пористый слой дает соотношение

$$j_p = k_p (2R_T T \mu_c D)^{-1} (p^2 - p_s^2)$$

Здесь T – абсолютная температура, принимаемая постоянной, а $p(\theta)$ – давление в зазоре. Уравнение баланса расхода смазки в зазоре подшипника следует из уравнения неразрывности и имеет вид [1, 2]

$$Q' + j_p = 0, \quad Q = \int_0^h \rho u dy$$

Здесь штрих обозначает производную по θ , а u – окружная компонента скорости смазки. Окружной расход Q выражается через p, p' и h известным образом [1, 2] и в безразмерном виде приводится ниже. Расход смазки, нагнетаемой через втулку, определяется следующим образом

$$Q_p = \int_{\theta_{\beta 1}}^{\theta_{\beta 2}} j_p d\theta$$

Зазор посредством тонкой дренажной щели координаты θ_c сообщается с внешним пространством, где давление p_∞ . Через нее из зазора вытекают излишки смазки. Таким образом осуществляется баланс смазки в окружном направлении. Условие баланса на щели – необходимое для бесконечного подшипника, и оно содержит параметр, зависящий от радиальной длины дренажной щели $l_c \gg h_m$, ее ширины $d_c \ll l_c$, давлений p_c и p_∞ . Это условие имеет вид

$$\sigma_c(p_c^2 - P_\infty^2) = (q_{c-} - q_{c+}) > 0 \quad (1.1)$$

Выражение записано в безразмерном виде согласно безразмерным переменным, для которых вводятся масштабы: 2π – для координаты θ , h_m – для u и h , $\gamma\rho_\infty U^2$ – для давления и U – для скорости, где $U = \omega R$, а $\gamma = 12\pi R\mu_c(\rho_\infty U h_m^2)^{-1}$. В безразмерных переменных уравнения для определения давления, коэффициенты расхода q и q_p в зазоре подшипника и условие питательной щели следующие

$$q' + f_\beta(p^2 - P_s^2) = 0, \quad p' = (h - qp^{-1})h^{-3}, \quad p(x_{0+}) = p(x_{0-}) = P_\infty$$

$$f_\beta = \beta, \quad x_{\beta 1} < x < x_{\beta 2}; \quad f_\beta = 0, \quad x < x_{\beta 1}, \quad x_{\beta 2} < x; \quad x = \frac{\theta}{2\pi}, \quad q = \frac{2Q}{\chi\rho_\infty U h_m}, \quad q_p = \frac{2Q_p}{\chi\rho_\infty U h_m} \quad (1.2)$$

Здесь и в (1.1) дополнительные нижние индексы – и + вводятся для обозначения параметров до и после соответствующего сечения, а также на разрывах этих параметров. В уравнениях (1.2) штрих обозначает производную по x . Координата x_0 отвечает питающей щели. Безразмерные комплексы (параметры подобия) в (1.1) и (1.2) имеют вид

$$\beta = 6k_p(2\pi R)^2 h_m^{-3} D^{-1}, \quad P_s = p_s(\gamma\rho_\infty U^2)^{-1}, \quad P_\infty = p_\infty(\gamma\rho_\infty U^2)^{-1} = \chi^{-1}, \quad \chi = \gamma M^2$$

$$M^2 = \rho_\infty U^2 p_\infty^{-1}, \quad \sigma_c = (d_c/h_m)^3 2\pi R l_c^{-1}$$

Как будет показано, высоты оптимальных зазоров претерпевают разрыв в нескольких сечениях x_{di} . При x_c претерпевает разрыв коэффициент расхода q , а в сечениях $x_{\beta 1}$ и $x_{\beta 2}$ рвется функция f_β . Решение задачи (1.2) зависит от четырех параметров подобия: β , P_s , χ и σ_c – характеризующих проницаемость материала втулки, давление питания, сжимаемость смазки и дренажную щель соответственно. При $\sigma_c < \infty$ неизвестные заранее величины p_c и q_p определяются в ходе решения.

Коэффициент несущей способности подшипника C_N , его составляющие (в декартовой системе координат X, Y (фиг. 1)) на единицу длины подшипника и угол нагрузки θ_N выражаются так

$$C_N = \frac{N}{2\pi R \gamma \rho_\infty U^2} = (C_X^2 + C_Y^2)^{0.5}, \quad C_Y = -\int_0^1 p \cos \theta dx, \quad C_X = \int_0^1 p \sin \theta dx \quad (1.3)$$

$$\theta_N = \arcsin(-C_X C_N^{-1})$$

Таким образом, при заданных параметрах подобия, геометрических характеристиках подшипника задача определения несущей способности решается.

2. Для определения формы зазора, положения и протяженности пористой втулки при максимуме C_N необходимо решить вариационную задачу. Полагаем наличие ограничения на минимально возможную высоту зазора $h \geq 1$, а также заданность q_p (коэффициента расхода смазки, нагнетаемой через втулку). Считаем, что величина q_p определяется характеристикой дренажной щели, т.е. параметром σ_c .

Для решения этой задачи с учетом (1.1), (1.2) и (1.3) составляется функционал Лагранжа J следующего вида

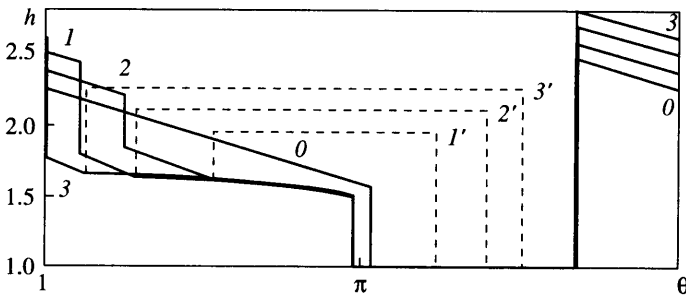
$$J = C_N + \int_0^1 \{ \lambda (ph - q - ph^3 p') + \mu [q' + f_\beta (p^2 + P_s^2)] \} dx + \xi [\sigma_c (p_c^2 - P_\infty^2) - q_{c-} + q_{c+}] \quad (2.1)$$

где λ и μ – переменные, а ξ – постоянный множители Лагранжа. Для определения необходимых условий оптимальности функционал J варьируется согласно известным правилам [6]. Если зазор оптимален, т.е. реализует максимум C_N , то вариации $\Delta C_N = \Delta J \leq 0$ при любых вариациях δh , удовлетворяющих ограничению на минимальную величину h , и при любых вариациях координат концов пористой втулки $\Delta \chi_{\beta 1}$ и $\Delta \chi_{\beta 2}$.

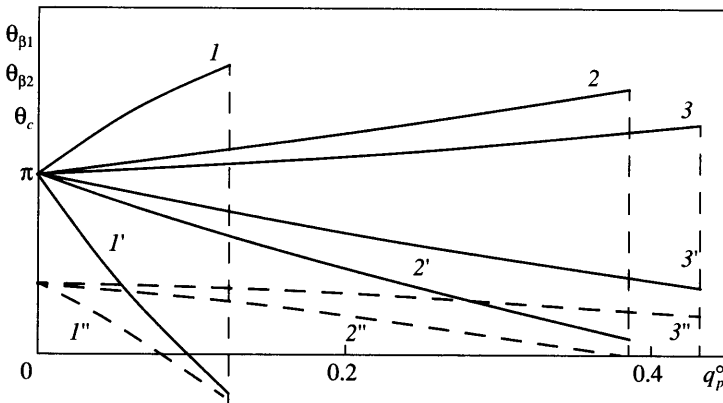
Из анализа уравнений смазки и полученных условий оптимальности (см. Приложение) следует структура решения. Функция $h(x)$ состоит из двух участков оптимальности: I (участок двустороннего экстремума) и II (участок краевого экстремума) – которые стыкуются разрывным образом (см. фиг. 1). Высота зазора терпит разрыв и на участке I в сечении $x = x_c$. Решение задачи сводится к численному расчету λ и μ из дифференциальных уравнений (П.3) и (П.4), p , q и h из уравнений (1.2) и (П.7) на каждом из указанных участков, то есть при выполнении соответствующих условий оптимальности. Затем вычисляется максимальный коэффициент C_N . Условия оптимальности позволяют определить все характерные координаты: разрывов $h - x_{d1}$ и x_{d2} , дренажной щели x_c , концов пористой втулки $x_{\beta 1}$ и $x_{\beta 2}$, а также ξ . Величина q_p , равная расходу смазки через втулку, выражается как $q(x_{\beta 2}) - q(x_{\beta 1})$ и определяется параметром дренажной щели σ_c , согласно условию баланса потоков смазки на ней.

3. Используемая модель отвечает дозвуковым течениям. Несжимаемая смазка соответствует $M^2 \ll 1$, $\chi \ll 1$, а сильно сжимаемая – $M^2 < 1$, $\chi \gg 1$. Случай $\beta = 0$ отвечает подшипнику без пористой втулки. Оценим параметры для реальных случаев. Если $n = 3 \cdot 10^3$ об/с, $R = 10^{-2}$ м, $h_m = 2 \cdot 10^{-5}$ м, $T = 300$ К, $\mu_c = 1.75 \cdot 10^{-5}$ Па · с, $p_\infty = 0.98 \cdot 10^5$ Па, $\rho_\infty = 1.3 \cdot 10^3$ г · м⁻³, $D = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $k_p = 10^{-14}$ м², $d_c = h_m$, $l_c = 2D$, то $\beta \approx 5$, $\gamma \approx 10^2$, $M^2 \approx 0.5$, $\chi \approx 50$, $P_\infty \approx 0.02$ и $\sigma_c \approx 5$.

Представим результаты расчетов при $\chi = 10$ ($P_\infty = 0.1$), $P_s = 2P_\infty$, $\beta = 1, 5, 10$ и разных σ_c , соответствующих разным q_p . Случай непроницаемого подшипника ($\beta = 0$, $q_p = 0$ – задача Рэлея для радиального подшипника) при том же значении χ исследован, например, в [7]. На фиг. 2 показаны формы оптимальных зазоров для $\beta = 5$. Кривая 0 – оптимальный зазор Рэлея с $q = q_R = 0.1649$ и $C_N = C_{NR} = 0.01213$. Увеличение номера кривых соответствует росту относительного параметра $q_p^\circ = q_p/q_R$ ($1 - q_p^\circ = 0.18$, $\sigma_c = 8.2$; 2 – 0.30, 21; 3 – 0.38, 44). Для каждого случая оптимальные положения и размер пористых втулок показаны штриховыми отрезками $1' - 3'$. Характерно, что во всех случаях втулки включают в себя один из разрывов h , находящийся в нижней части подшипника. Зависимости оптимальных координат концов втулки $\theta_{\beta 1}$, $\theta_{\beta 2}$ и дренажной щели θ_c от q_p° показаны на фиг. 3. Угловой размер втулки определяется разностью $\Delta \theta_\beta = \theta_{\beta 2} - \theta_{\beta 1}$. Кривые 1, 1' и 1'' относятся к случаю $\beta = 1$, кривые 2, 2' и 2'' – $\beta = 5$ (соответственно фиг. 2), а 3, 3' и 3'' – $\beta = 10$. Номера без штрихов отвечают координате $\theta_{\beta 1}$, с одним штрихом – $\theta_{\beta 2}$ и с двумя



Фиг. 2. Оптимальные формы смазочных зазоров при $\chi = 10$, $\beta = 5$, $P_s = 2P_\infty$ и разных относительных расходах q_p° , штриховые отрезки показывают соответствующие оптимальные положения втулок

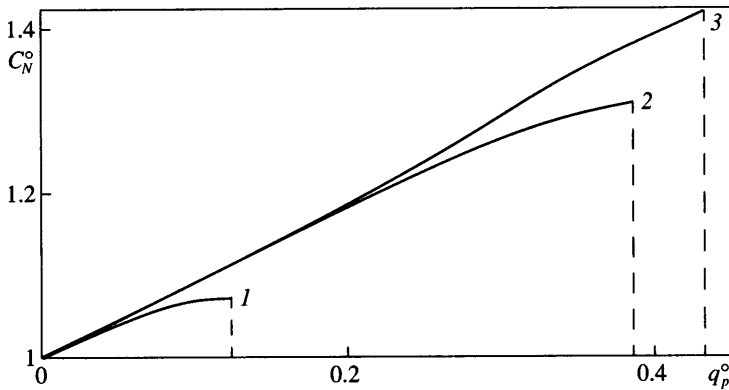


Фиг. 3. Зависимость координат характерных сечений от q_p° при $\chi = 10$, $P_s = 2P_\infty$ и разных β , номера без штрихов – $\theta_{\beta 1}$, с одним штрихом – $\theta_{\beta 2}$ и с двумя штрихами – θ_c

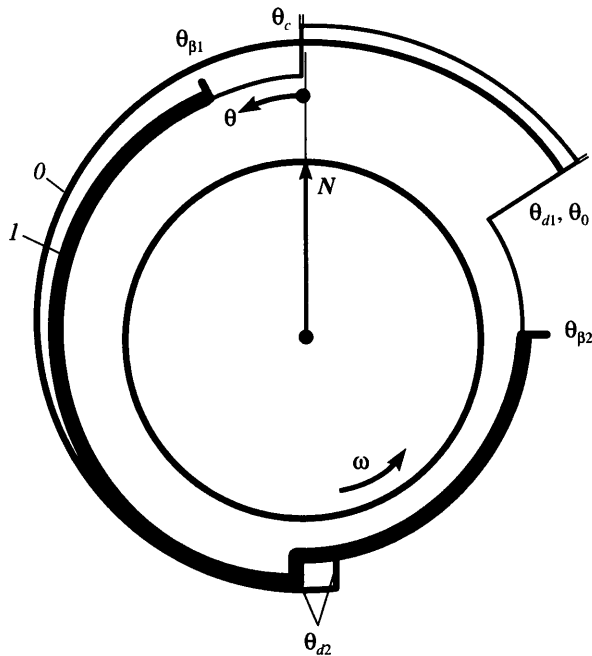
штрихами – θ_c . Дренажная щель находится всегда вне втулки и впереди нее. При фиксированном значении q_p° для больших β требуется втулка меньшего углового размера $\Delta\theta_\beta$. Существует предельное значение $q_{p, \max}^\circ$ (вертикальные штриховые линии) с соответствующим предельным значением $\Delta\theta_\beta$, когда возможен рост несущей способности. Это предельное значение больше для больших β . Дальнейший рост q_p , сопровождаемый увеличением размера втулки, приводит к уменьшению C_N .

На фиг. 4 в соответствии с фиг. 3 показаны зависимости $C_N^\circ(q_p^\circ)$ (кривая 1 – $\beta = 1$, 2 – 5 и 3 – 10), где $C_N^\circ = C_N/C_{NR}$. Видно, что для достижения больших C_N необходимо увеличивать β или q_p .

Для сравнения оптимальных форм на фиг. 5 представлены подшипник Рэля (0) и подшипник (1) с формой 3 из фиг. 2 ($\beta = 5$, $C_N^\circ = 1.3$, $q_p^\circ = 0.38$, $\sigma_c = 44$). Несущая способность последнего на 30% большая по сравнению с C_{NR} . Это увеличение вызвано как профилированием зазора, так и наилучшим выбором положения и размера втулки. Причем влияние, как выяснено, второго фактора оказывается решающим.



Фиг. 4. Относительные несущие способности – от относительного расхода q_p^0 при $\chi = 10$, $P_s = 2P_\infty$ и разных β



Фиг. 5. Оптимальные подшипники при $\chi = 10$, $\beta = 5$, $P_s = 2P_\infty$ и $q_p^0 = 0$ (0) и 0.38 (1)

Заключение. Сформулирована и решена задача определения оптимальных форм смазочного зазора радиального бесконечного подшипника с пористой втулкой и с изотермической сжимаемой смазкой, обеспечивающих наибольшую несущую способность N . Показано, что оптимальный зазор имеет разрывную высоту, а втулка не полностью охватывает подшипник и характеризуется оптимальными положением и размером. Она большей частью расположена в нижней части подшипника. Решение зависит от параметров задачи: сжимаемости смазки χ , пористости β , параметров питания P_s и дренажной щели σ_c . Существует предельное значение N , которое можно реализовать при фиксиро-

ванных параметрах χ , β и P_s увеличением расхода смазки через втулку. Наибольший вклад в рост несущей способности оказывает выбор местоположения и размера втулки.

Автор благодарит А.Н. Крайко за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00846) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2124.2003.1).

Приложение. Варьирование функционала (2.1) проводится с учетом непрерывности p и q всюду, включая сечения x_{di} возможных разрывов h и сечения $x_{\beta 1}$ и $x_{\beta 2}$. При $x = x_c$ расход q рвется. В указанных сечениях могут претерпевать разрывы и множители Лагранжа. Положение их неизвестно и определяется в процессе решения. Пропедев необходимые выкладки, для вариации $\Delta C_N = \Delta J$ получим

$$\begin{aligned} \Delta C_N = & \sum_{x_{di}, x_{\beta 1}, x_{\beta 2}, x_c} \{ - [(\lambda h^3)'_- - (\lambda h^3)'_+] p \Delta p + [(\lambda p h^3 p')_- - (\lambda p h^3 p')_+ - \mu_- q'_- + \mu_+ q'_+] \Delta x \} + \\ & + (\mu_- - \mu_+)_{d-} \Delta q_{d-} + (\mu_- - \mu_+)_{\beta 1-} \Delta q_{\beta 1-} + (\mu_- - \mu_+)_{\beta 2-} \Delta q_{\beta 2-} + \\ & + (\mu \Delta q)_{c-} - (\mu \Delta q)_{c+} + \xi (\Delta q_+ - \Delta q_- + 2 \sigma_c p \Delta p)_{c-} + \int_0^1 [P \delta p + B \delta h - (\lambda + \mu') \delta q] dx \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

$$P \equiv p(\lambda h^3)' + \lambda h - \cos(\theta - \theta_N) + 2\mu f_{\beta} p, \quad B = \lambda(3qh^{-1} - 2p) \quad (\text{П.2})$$

Здесь Δp , Δq и Δx – разности p , q и x в соответствующих сечениях для проварьированного и непроварьированного зазоров, а δh , δp и δq – разности тех же функций при фиксированных x .

Согласно выражению (П.1) формулируются следующие взаимосвязанные задачи для множителей Лагранжа λ и μ для любых (в том числе неоптимальных) зазоров, которые могут быть образованы кусочно-непрерывной функцией $h(x)$, и для любых положений втулки

$$(\lambda h^3)' + [\lambda h - \cos(\theta - \theta_N)] p^{-1} + 2\mu f_{\beta} = 0 \quad (\text{П.3})$$

$$(\lambda h^3)_{d-} = (\lambda h^3)_{d+}, \quad \lambda_{\beta 1-} = \lambda_{\beta 1+}, \quad \lambda_{\beta 2-} = \lambda_{\beta 2+}, \quad \lambda_{c-} = (\lambda_{c+} h_{c+}^3 + 2\xi \sigma_c) h_{c-}^{-3}$$

$$\mu' + \lambda = 0$$

$$\mu_{d-} = \mu_{d+}, \quad \mu_{\beta 1-} = \mu_{\beta 1+}, \quad \mu_{\beta 2-} = \mu_{\beta 2+}, \quad \mu_{c-} = \mu_{c+} = \xi \quad (\text{П.4})$$

Как показали анализ и последующее решение, сечение x_c не совпадает с другими характерными сечениями, и $x_c < x_{\beta 1} < x_{\beta 2}$. В нем претерпевает разрыв функция $h(x)$. Сечений x_{di} , где также рвется h , – два, и на одном из них находится питающая щель x_0 . Условия для множителей Лагранжа из (П.3) и (П.4) – как явные, так и неявные, поэтому численное решение соответствующей системы уравнений должно проводиться итерациями. При этом прямая задача определения давления и расхода также может быть решена интегрированием системы уравнений (1.2) с условиями периодичности и условием на дренажной щели (1.1).

Для λ и μ , удовлетворяющих уравнениям и условиям (П.3) и (П.4), выражение (П.1) принимает вид

$$\Delta C_N = \sum_{x_{di}, x_{\beta 1}, x_{\beta 2}, x_c} \{ [(\lambda p h^3 p')_- - \mu q'_- - (\lambda p h^3 p')_+ + \mu q'_+] \Delta x \} + \int_0^1 B \delta h dx \quad (\text{П.5})$$

в котором все вариации и приращения можно считать независимыми. Так как для каждого из сечений x_{di} , $x_{\beta 1}$, $x_{\beta 2}$ и x_c значение Δx может быть любым, то при их оптималь-

ном положении соответствующие коэффициенты при Δx должны обращаться в нуль. Отсюда с учетом условий (П.3) и (П.4), дифференциальных уравнений (1.2) и непрерывности p получаются дополнительные соотношения

$$\mu_{\beta 1+} = 0, \quad \mu_{\beta 2-} = 0, \quad \lambda_{d-} = 0, \quad \lambda_{c-} = \lambda_{c+}(p_c h_{c+} - q_{c+}) / (p_c h_{c-} - q_{c-})$$

определяющее оптимальное положение характерных сечений зазора. Таким образом, множители λ и μ могут быть как непрерывными, так и разрывными.

В той части зазора, где $h > 1$, вариации δh произвольны (двусторонний экстремум) и соответствующее условие оптимальности, согласно (П.5) и (П.2), следующее

$$\lambda(3qh^{-1} - 2p) = 0 \quad (\text{П.6})$$

Уравнение (П.6), отвечая участку двустороннего экстремума I , позволяет определить высоту зазора на нем

$$h = 1.5qp^{-1} \quad (\text{П.7})$$

В той части, где $h = 1$ (участок II), допустимые вариации $\delta h > 0$ (краевой экстремум). Поэтому здесь условие максимума C_N формулируется, в соответствии с (П.5), в виде неравенства

$$\lambda(3qh^{-1} - 2p) \leq 0$$

Таким образом, все необходимые условия оптимальности определены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Константиnescу В.Н. Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
2. Шейнберг С.А., Жедь В.П., Шишеев М.Д. Опоры скольжения с газовой смазкой. М.: Машиностроение, 1969. 334 с.
3. Пинегин С.В., Табачников Ю.Б., Сипенков И.Е. Статические и динамические характеристики газостатических опор. М.: Наука, 1982. 265 с.
4. Пешти Ю.В. Газовая смазка. М.: Изд-во. МГТУ, 1993. 381 с.
5. Marinkovic A., Rosoc B., Jankovic M. Optimum design for porous metal bearing // Intern. J. Appl. Mech. and Engineering. 2002. V. 7. № 3. P. 875–885.
6. Крайко А.Н. Изопериметрическая задача о профилировании оптимального зазора бесконечного плоского ползуна // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 222–233.
7. Грабовский В.И. Оптимальный радиальный газовый подшипник с минимумом момента сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 63–75.

Москва

Поступила в редакцию
24.IV.2005