

УДК 532.5.031:533.6.011.32:533.694.2

© 2006 г. П. А. ВОЛКОВ, Н. Б. ИЛЬИНСКИЙ

## ПОСТРОЕНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУХЭЛЕМЕНТНОГО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОГО ГАЗА

Изложено численно-аналитическое решение задачи построения двухэлементного крылового профиля, обладающего максимальным аэродинамическим качеством при обтекании дозвуковым потоком вязкого газа. С целью приближения теоретических результатов решения к практическим выполнен совместный учет вязкости по теории пограничного слоя и сжимаемости по модели Чаплыгина.

*Ключевые слова:* оптимизация, пограничный слой, газ Чаплыгина, обратная краевая задача аэрогидродинамики, двухэлементный крыловой профиль.

Двухэлементные крыловые профили (профили с закрылками и предкрылками, бипланы) в ряде случаев обладают лучшими аэродинамическими характеристиками по сравнению с одиночными профилями. Важной является задача построения крыловых профилей с оптимальными аэродинамическими характеристиками (максимальной подъемной силой, минимальным сопротивлением, максимальным аэродинамическим качеством). При этом могут использоваться как прямой, так и обратный подходы.

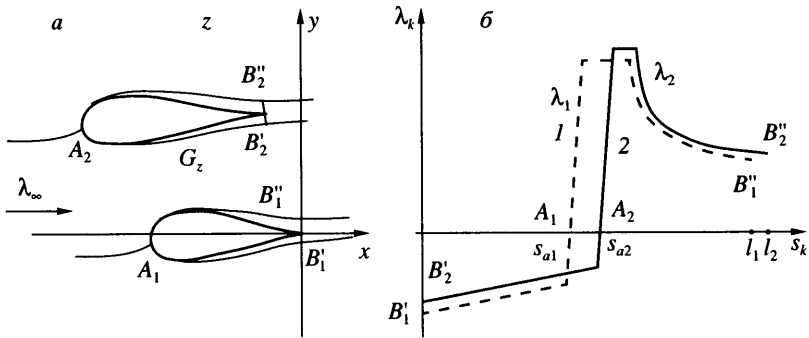
Прямой подход заключается в подборе формы контура путем решения соответствующих краевых задач аэрогидродинамики. Это требует значительных затрат вычислительных средств из-за перебора контуров при различных ограничениях на его форму. Обратный подход к оптимизации форм крыловых профилей состоит в наилучшем выборе исходного распределения скорости и решения соответствующей обратной краевой задачи аэрогидродинамики [1, 2].

В настоящей работе приводится решение задачи оптимизации формы двухэлементного крылового профиля, обладающего максимальным аэродинамическим качеством в дозвуковом потоке вязкого газа. Решение строится с использованием теории обратных краевых задач аэрогидродинамики [3]. Учет вязкости выполнен по теории пограничного слоя, сжимаемости – по модели газа Чаплыгина.

**1. Постановка задачи.** В физической плоскости  $z$  (фиг. 1, *a*) искомые непроницаемые крыловые профили  $A_k B_k$  ( $k = 1, 2$ ), представляющие двухэлементный профиль биплана, обтекаются плоским установившимся дозвуковым потоком вязкого газа с заданными числами Рейнольдса  $Re_\infty$  и Маха  $M_\infty$  на бесконечности; контуры  $L_k$  профилей считаются гладкими за исключением задних кромок  $B_k$ , где внутренний к области течения угол равен  $2\pi$ .

Начало декартовой системы координат выбрано в задней кромке  $B_1$  профиля  $L_1$ , а ось абсцисс параллельна направлению скорости набегающего потока. Периметры профилей известны и равны  $l_k$ .

Предполагая безотрывный характер обтекания и малость толщины пограничного слоя, дуговые абсциссы  $s_k$  контуров профилей и полутел вытеснения на участках  $B'_k A_k B''_k$  будем считать совпадающими и отсчитывать их от нуля в точках  $B'_k$  до  $l_k$  в  $B''_k$



Фиг. 1. Физическая плоскость (а) и распределения приведенной скорости (б) по контурам двухэлементного профиля: 1, 2 – по  $L_1$  и  $L_2$

так, что при возрастании  $s_k$  область течения остается слева. Распределения приведенной скорости  $\lambda_k$  вдоль границ полутел вытеснения  $B'_k A_k B''_k$  в параметрическом виде есть

$$\lambda_k = v_k(s_k, d_j)/a_* = \lambda_k(s_k, d_j), \quad s_k \in [0, l_k], \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, m$$

где  $d_j, (j = 1, \dots, m)$  – свободные параметры,  $a_*$  – критическая скорость. В дальнейшем в записи функции  $\lambda_k$  свободные параметры  $d_j$  будем опускать. Распределения  $\lambda_k(s_k)$  изображены на фиг. 1, б. Функции  $\lambda_k(s_k)$  – кусочно-гладкие, обращающиеся в нуль в точках  $A_k$  разветвления потока  $s_{ak}$  и в них непрерывно дифференцируемы. Знак  $\lambda_k$  связан с направлением обхода, поэтому  $\lambda_k(s_k) < 0$  при  $s_k \in [0, s_{ak})$ ,  $\lambda_k(s_k) > 0$  при  $s_k \in (s_{ak}, l_k]$ .

Кроме вышеперечисленных условий необходимо выполнение ряда требований, ограничивающих выбор распределения скорости. К таким относятся ограничения по конструктивной реализуемости решения (требование замкнутости и простоты искомого контура, ограничения на толщину и кривизну профилей) и по физической реализуемости решения (соответствие решения обратной задачи аэродинамики математической модели, принятая в постановке задачи). Названные ограничения определяют множество гидродинамически целесообразных распределений скорости (см., например [4]), из которого и берутся исходные распределения скорости.

Введем в рассмотрение комплексный потенциал течения  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , где  $z = x + iy$ . Считаем, что известен расход  $q_*$  между контурами полутел вытеснения и разность потенциалов  $\varphi_*$  между точками  $A_2$  и  $A_1$ . Положив  $w(z)$  равным нулю в точке  $A_1$ , имеем

$$\varphi(s_{a1}) = 0, \quad \psi(s_{a1}) = 0, \quad \varphi(s_{a2}) = \varphi_*, \quad \psi(s_{a2}) = q_*$$

Требуется найти форму двухэлементного крылового профиля, обладающего максимальным аэродинамическим качеством.

**2. Решение обратной задачи.** В качестве характерного линейного размера выберем величину  $l = 0.5(l_1 + l_2)$  полусуммы периметров искомого профилей.

Для решения обратной задачи воспользуемся предположениями, что для больших (порядка  $10^5$ – $10^6$ ) значений числа  $Re_\infty$  вязкость будет сказываться лишь в достаточно тонком пограничном слое около профиля, а для дозвуковых скоростей внешнего потока сжимаемостью внутри слоя можно пренебречь. При этом решение сведется к нахождению контуров полутел вытеснения, обтекаемых потоком газа Чаплыгина, зная которые найдем форму искомого профилей, отступив на участках  $B'_k A_k B''_k$  внутрь полутел на

толщину вытеснения  $\delta_k^*(s)$ . Функция  $\delta_k^*(s)$  определяется расчетом любым из известных методов, например, однопараметрическим методом Кочина – Лойцянского [5].

В качестве канонической области в плоскости  $u$  выбираем прямоугольник со сторонами  $\omega_1$  и  $\pi i/2$ . Область изменения комплексного потенциала в плоскости  $w$  для газа Чаплыгина сохраняет тот же вид, что и для идеальной несжимаемой жидкости [6]

$$w(u) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta) = \Lambda\zeta(u - i\alpha) + \bar{\Lambda}\zeta(u + i\alpha) + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \ln \frac{\sigma(u - i\alpha)}{\sigma(u + i\alpha)} + \frac{u}{\omega_1} \left[ -\Gamma_1 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{\alpha\eta_1}{\pi} - (\Lambda + \bar{\Lambda})\eta_1 \right] + \beta$$

$$\frac{dw}{du}(u) \equiv \Omega(u) = -\Lambda\rho(u - i\alpha) - \bar{\Lambda}\rho(u + i\alpha) + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} [\zeta(u - i\alpha) - \zeta(u + i\alpha)] + \frac{1}{\omega_1} \left[ -\Gamma_1 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{\alpha\eta_1}{\pi} - (\Lambda + \bar{\Lambda})\eta_1 \right]$$

$$\varphi_1(\xi_1) = \varphi(\xi_1, \pi i/2), \quad \psi_1(\xi_1) = \psi(\xi_1, \pi i/2)$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \varphi(\xi_2, 0), \quad \psi_2(\xi_2) = \psi(\xi_2, 0), \quad \xi_1, \xi_2 \in [0, \omega_1]$$

где  $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$ ,  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ ,  $\alpha$  – неизвестные постоянные;  $\rho(u)$ ,  $\zeta(u)$ ,  $\sigma(u)$  – функции Вейерштрасса с полупериодами  $\pi i/2$  и  $\omega_1/2$ ;  $\eta_1 = \zeta(u + \omega_1) - \zeta(u)$  – константа, зависящая от  $\omega_1$ ; циркуляции скорости  $\Gamma_k$  по каждому контуру  $L_k$  равны  $\varphi_k(l_k) - \varphi_k(0)$ .

В отличие от случая идеальной несжимаемой жидкости [7] модели газа Чаплыгина соответствует вспомогательная функция

$$\chi(u) = \ln \{ 2|\lambda(u)| [1 + \{1 + 4c^2\lambda^2(u)\}^{1/2}]^{-1} \} - i\theta, \quad c^2 = 0.296$$

имеющая логарифмические особенности в точках  $A_k$  обращения приведенной скорости  $\lambda_\chi$  в нуль. Функцию  $\chi(u)$  представим в виде

$$\chi(u) = \chi^*(u) + \chi_0(u), \quad \chi_0(u) = \ln \left[ \sin \frac{\pi(u - u_{a1})}{\omega_1} \sin \frac{\pi(u - u_{a2})}{\omega_1} \right]$$

где  $\chi^*(u) = S^* - i\theta^*$  – аналитическая, действительная часть которой на границах прямоугольника известна

$$S_k(\xi_k) = S^*(\xi_k, \eta_k) = \ln \left\{ 2|\lambda(s_k(\xi_k))| [1 + \{1 + 4c^2\lambda^2(s_k(\xi_k))\}^{1/2}]^{-1} \right\} - \ln \left| \sin \frac{\pi(\xi_k - \xi_{a1} - 1/2(k-1)\pi i)}{\omega_1} \sin \frac{\pi(\xi_k - \xi_{a2} + 1/2(2-k)\pi i)}{\omega_1} \right|$$

Функцию  $\chi^*$  восстановим по формуле Вилля (см., например [8])

$$\chi^*(u) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\omega_1} \left[ S_1(\xi) \zeta \left( u - \xi - \frac{1}{2}\pi i \right) - S_2(\xi) \zeta(u - \xi) \right] d\xi + \frac{\eta_1 - 2}{2\omega_1} P_1 + iP_2$$

где  $P_2$  – произвольная вещественная постоянная, а для  $P_1$  имеем

$$P_1 = \int_0^{\omega_1} S_1(\xi) d\xi = \int_0^{\omega_1} S_2(\xi) d\xi \tag{2.1}$$

Последнее условие – условие однозначности функции  $\chi^*$ , зная которую, запишем

$$dz = \exp[-\chi(u)]w'(u)du - c^2 \overline{\exp[\chi(u)]w'(u)du} \quad (2.2)$$

где черта – комплексное сопряжение. Интегрируя выражение (2.2) найдем координаты контуров полутел вытеснения.

Контурь искомого двухэлементного профиля, определяемые из (2.2), будут замкнуты, если контурь полутел вытеснения разомкнуты на величину

$$\Delta z_k = -i\delta_{0k}^* \exp(i\theta_{0k}) \quad (2.3)$$

где  $\theta_{0k}$  – аргумент вектора скорости в точках  $B'_k$  и  $B''_k$ ,  $\delta_{0k}^* = \delta_k^*(0) + \delta_k^*(l_k)$ ,  $\delta_k^*(0)$ ,  $\delta_k^*(l_k)$  – значения толщин вытеснения в точках  $B'_k$  и  $B''_k$  соответственно. Кроме того, должны выполняться условия однозначности функции  $\chi^*$  (2.1) и совпадения величины скорости набегающего потока, найденной в ходе решения задачи, с заданным значением  $\lambda_\infty = v_\infty/a_*$

$$\operatorname{Re}\chi(i\alpha) = \ln \left\{ 2\lambda_\infty [1 + \{1 + 4c^2\lambda_\infty^2\}^{1/2}]^{-1} \right\} \quad (2.4)$$

Одним из основных требований гидродинамически целесообразных распределений скорости является требование безотрывности обтекания профиля. Из теории пограничного слоя известно, что отрыв потока может происходить лишь на диффузорных участках, характеризующихся отрицательными градиентами скорости. Поэтому распределение приведенной скорости на возможно большей части контура следует задавать неубывающим, а на оставшейся части дотраивать его так [3], чтобы выполнялось условие безотрывности

$$f_k(s) \geq f_0, \quad f_k(s) = \frac{a\lambda_k^1(s)}{|\lambda_k(s)|^b} \left[ \int_{s_*}^s |\lambda_k(\tau)|^{b-1} d\tau + f_{ik} \right]$$

где  $f_k(s)$  – формпараметр,  $f_0$ ,  $a$ ,  $b$  – эмпирические постоянные,  $f_{ik}$  характеризует вклад в  $f_k$  ламинарных участков. Если пограничный слой на профиле полностью турбулентный, то  $f_{ik} = 0$ ,  $a = 1.17$ ,  $b = 4.75$ ,  $f_0 = -2$ .

**3. Решение задачи оптимизации.** Решение состоит в оптимальном выборе исходных распределений приведенной скорости  $\lambda_k = \lambda_k(s_k, d_j)$ , при которых функционал  $K(d_j) = C_y(\lambda_k(s_k, d_j))/C_x(\lambda_k(s_k, d_j))$  принимает максимальное значение с учетом условий разрешимости (2.1), (2.3), (2.4) и дополнительных линейных ограничений на свободные параметры

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{d} = \mathbf{g}_1 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{d} \leq \mathbf{g}_2 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{d}_l \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}_m \quad (3.3)$$

где матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  и векторы  $\mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_2$ ,  $\mathbf{d}_l$ ,  $\mathbf{d}_m \in R^n$  заданы,  $C_x = C_{x1} + C_{x2}$  – коэффициент сопротивления двухэлементного профиля,  $C_y = C_{y1} + C_{y2}$  – коэффициент подъемной силы.

Исходные распределения приведенной скорости выбираются из класса гидродинамически целесообразных, содержащими участок постоянной скорости (полку), так как по-

лочные распределения являются экстремальными в задаче максимизации площади эпюры безотрывных распределений скорости с заданными значениями формпараметра.

Неизвестная величина коэффициента сопротивления каждого из профилей находится по формуле Сквайра-Юнга

$$C_{xk} = 2(\lambda_{0k}/\lambda_{\infty})^{(5+H_{12})/2} \delta_{0k}^{***} (b_1 + b_2)^{-1}$$

где  $\lambda_{0k} = \lambda_k(l_k)$ ,  $\delta_{0k}^{***}$  – скорость и суммарная толщина потери импульса пограничного слоя в задней кромке соответствующего профиля,  $b_1$ ,  $b_2$  – хорды профилей,  $H_{12} = \delta_k^*(l_k)/\delta_k^{***}(l_k)$ . Величина коэффициента подъемной силы вычисляется по формуле

$$C_{yk} = \oint_{L_k} (c_{fk} dy - c_{pk} dx)$$

где  $c_{fk}$  – местный коэффициент трения, а под  $c_{pk}$  понимают коэффициент давления для адиабатического течения

$$c_{pk} = \frac{2}{\sqrt{M_{\infty}^2}} \left[ \left( \frac{1 - \lambda_k^2 [(v+1)(v-1)]^{-1}}{1 - \lambda_{\infty}^2 [(v+1)(v-1)]^{-1}} \right)^{v/(v-1)} - 1 \right]$$

где  $v = 1.41$  для воздуха.

При решении поставленной оптимизационной задачи применен комбинированный подход, сочетающий в себе метод штрафных функций и метод последовательного квадратичного программирования. В качестве вспомогательного функционала выбран

$$\Phi(d_j) = \varepsilon \Delta z - C_y / C_x \quad (3.4)$$

где  $\Delta z$  – сумма квадратов невязок условий разрешимости (2.1)–(2.4).

Для заданной величины штрафа  $\varepsilon > 0$  решается задача минимизации функционала (3.4) с линейными ограничениями (3.1)–(3.3). Численная реализация решения этой задачи осуществлена на Фортране процедурой, основанной на алгоритме “TOLMIN” [9].

На начальном этапе алгоритм проверяет ограничения-равенства (3.1) на совместимость и переопределенность. Затем на каждой  $n$ -й итерации для приближения  $\mathbf{d} = \mathbf{d}^n$ , удовлетворяющего (3.1), отыскивается решение задачи квадратичного программирования

$$\min \Phi(\mathbf{d}^n) + \mathbf{h}^T \nabla \Phi(\mathbf{d}^n) + 0.5 \mathbf{h}^T \mathbf{B}^n \mathbf{h}$$

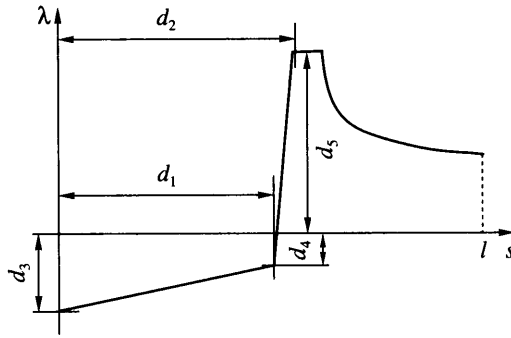
$$\mathbf{a}_j \mathbf{h} = 0, \quad j \in I_n$$

$$\mathbf{a}_j \mathbf{h} \leq 0, \quad j \in J_n$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^n$  – направление линейного поиска;  $\mathbf{B}^n$  – положительно определенная аппроксимация матрицы  $\nabla^2 \Phi(\mathbf{d}^n)$ ;  $J_n$  – набор индексов ограничений-неравенств (3.2), включая простые границы (3.3);  $I_n$  – набор остальных индексов; вектор  $\mathbf{a}_j$  – либо соответствующая строка матриц  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ , либо  $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_i$  для верхней границы  $d_i \leq (d_m)_i$  и  $\mathbf{a}_j = -\mathbf{e}_i$  для нижней границы  $-d_i \leq (-d)_i$ . Вектор  $\mathbf{e}_i$  – единичный для  $i$ -й компоненты и нулевой – в остальных случаях.

Для получения нового приближения проводится линейный поиск. Новая точка  $\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \gamma^n \mathbf{h}^n$  должна удовлетворять условиям

$$\Phi(\mathbf{d}^{n+1}) \leq \Phi(\mathbf{d}^n) + \rho_1 \gamma^n (\mathbf{h}^n)^T \nabla \Phi(\mathbf{d}^n)$$



Фиг. 2. Схема задания свободных параметров  $d_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) в распределениях приведенной скорости

$$(\mathbf{h}^n)^T \nabla \Phi(\mathbf{d}^{n+1}) \geq \rho_2 (\mathbf{h}^n)^T \nabla \Phi(\mathbf{d}^n)$$

В расчетах  $\rho_i$  равны 0.1 и 0.7.

В случае, если одно из условий (3.2), (3.3) ограничивает шаг по направлению  $\gamma^n$ , то оно исключается из набора  $J_n$ . Таким образом, удается предотвратить так называемое явление зигзага, которое можно наблюдать в ряде методов возможных направлений [10].

Итерационный процесс продолжается, пока не будет выполнено условие

$$\|\nabla \Phi(\mathbf{d}^n) - A^n \mu^n\|_2 \leq \phi$$

где  $\mu^n$  – множители Лагранжа,  $\phi$  – заданная точность расчета (равна 0.001),  $\|\cdot\|_2$  – норма Фробениуса.

Расчет задачи минимизации (3.4) выполняется многократно для различных значений штрафа  $\epsilon$ . Величина  $\epsilon$  подбирается так, чтобы уменьшение значений функционала достигалось в соответствии с поставленной задачей за счет увеличения аэродинамического качества  $K = C_y/C_x$ . Затем построенные контуры с максимальным  $K$ , которые как правило получаются разомкнутыми, замыкаются постепенным увеличением  $\epsilon$ . При этом следует избегать резких скачков  $\epsilon$  и как следствие – больших падений  $K$ . Сходимость описанного процесса подтверждена численно.

**4. Результаты расчетов.** Предложенный метод решения оптимизационной задачи реализован в виде программы.

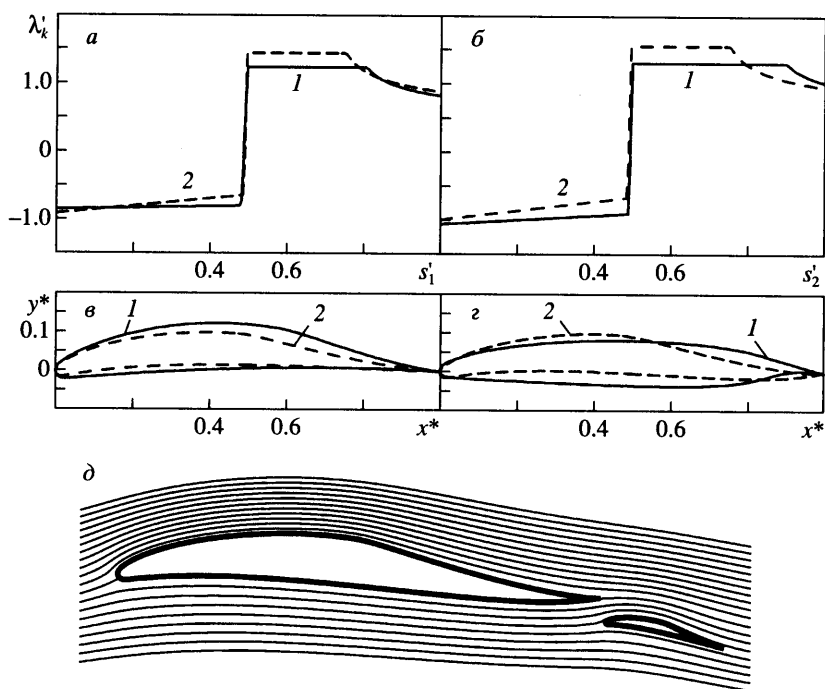
В качестве свободных параметров  $d_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) приведенной скорости  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ) выбраны величины, указанные на фиг. 2.

Рассматривалось обтекание двухэлементного профиля полностью турбулентным потоком. Для расчета пограничного слоя использовался интегральный метод Кочина – Лойцянского [5].

Одним из основных требований гидродинамической целесообразности является требование безотрывности обтекания, с учетом которого осуществлялся выбор длины полки (участок  $\lambda = \lambda_{\max}$ ) и достраивалось распределение  $\lambda_k$  на участке торможения.

Пример численного решения оптимизационной задачи при  $M_\infty = 0.3$  и  $Re_\infty = 1.45 \cdot 10^7$  приведен на фиг. 3.

Из приведенных в таблице результатов следует, что в процессе оптимизации форма профилей, соответствующих исходным  $\lambda_k$ , меняется. Оптимальные в смысле аэродинамического качества  $K$  профили становятся тоньше. При этом увеличиваются расчетные углы атаки  $\alpha_k$ , а рост  $C_y$  сопровождается увеличением величины  $C_x$ .



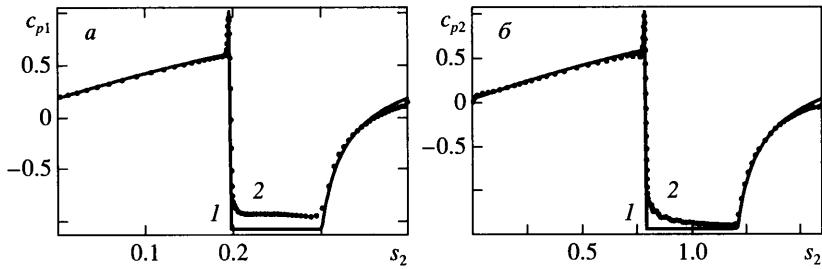
Фиг. 3. Распределения приведенной скорости  $\lambda'_k = \lambda_k/\lambda_\infty$  от  $s'_k = s_k/l_k$  ( $k = 1, 2$ ) (а, б), контуры профилей (в, г) биплана: 1 – исходные, 2 – результат максимизации аэродинамического качества  $K$ ; линии тока (д) обтекания оптимального профиля

Для обоснования достоверности полученных результатов был проведен тестовый расчет полученного оптимального двухэлементного профиля прямым методом. Задавалась геометрия области течения. Решались стационарные уравнения Навье – Стокса совместно с моделью турбулентности Спаларта – Аллмараса [11]. Эта модель менее чувствительна к несовершенству расчетной сетки и, как следствие, к вычислительным погрешностям.

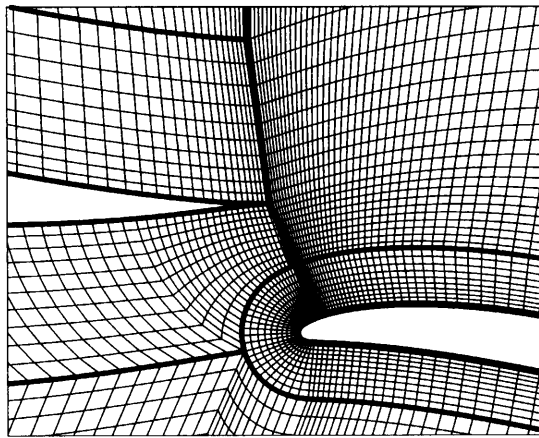
Область течения системы крыловых профилей – двусвязная. След за основным профилем может сливаться с пограничным слоем закрылка. Несоответствие графиков коэффициентов давления  $c_{p1}$  на полочном участке закрылка (фиг. 4, точками отмечены значения  $c_{pk}$ , найденные прямым методом) объясняется взаимодействием пограничных слоев.

На фиг. 5 изображен участок расчетной сетки в окрестности задней кромки основного профиля. Области, прилегающие к контурам, дискретизированы двумя С-сетками. Дискретизация области на бесконечности осуществлена С-сеткой, вложенной в О-сетку, граница которой достигает от 10 до 25 характерных размеров  $l$ . В целом расчетная сетка содержит 36 100 элементов.

№	$b_1$	$\alpha_1$	$C_{x1}$	$C_{y1}$	$b_2$	$\alpha_2$	$C_{x2}$	$C_{y2}$	$C_x$	$C_y$	$K$
1	0.19	5	0.0014	0.13	0.78	-1	0.0078	0.59	0.0092	0.72	78
2	0.20	12	0.0019	0.21	0.78	3	0.0086	0.99	0.0105	1.20	113



Фиг. 4. Зависимости коэффициентов давления  $c_{pk}$  биплана от  $s_k$ : 1, 2 – обратной и прямой задач



Фиг. 5. Участок расчетной сетки в окрестности задней кромки основного профиля

**Заключение.** Изложено численно-аналитическое решение задачи построения двух-элементного крылового профиля, обтекаемого дозвуковым потоком вязкого газа и обладающего максимальным аэродинамическим качеством. Результаты расчетов демонстрируют удовлетворительное согласование с данными, полученными путем решения прямой задачи.

Благодарим Г.Ю. Степанова за советы по обоснованию достоверности результатов числовых расчетов и И.В. Коннова за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦНТП (шифр РИ-112/001/465), Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 03-01-06259, 05-08-01153-а) и НИОКР АНТ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
2. Ormsbee A.I., Chen A.W. Multiple element airfoils optimized for maximum lift coefficient // AIAA Journal. 1972. V. 10. № 12. P. 1620–1624.
3. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.
4. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.



5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
6. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 444 с.
7. *Абзалилов Д.Ф., Волков П.А., Ильинский Н.Б.* Решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики для двухэлементного крылового профиля // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 3. С. 16–24.
8. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
9. *Бартенев О.В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 2. М.: Диалог-МИФИ, 2001. 320 с.
10. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование: теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.
11. *Иванов Н.Г., Николаев М.А., Тельнов Д.С.* Численное моделирование трехмерного течения и теплообмена в трансзвуковой турбинной решетке на основе модели турбулентности Спаларта-Аллмараса // Проблемы газодин. и теплообмена в энергет. устан. М.: Изд-во МЭИ. 2003. Т. 2. С. 70–73.

Казань

Поступила в редакцию  
6.VI.2005