

УДК 533.951:537.5:519.6

© 2006 г. А. В. ЛАТЫШЕВ, А. А. ЮШКАНОВ

ПЛАЗМА В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ С ЗЕРКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ГРАНИЦЕ

Получено аналитическое решение линеаризованной задачи о поведении столкновительной газовой плазмы в полупространстве во внешнем переменном электрическом поле. Предполагается, что электроны отражаются зеркально от границы плазмы. Решение используется для нахождения экранированного поля. Отдельно исследован случай, когда частота внешнего поля близка к плазменной.

Ключевые слова: столкновительная плазма, полупространство, зеркальное отражение, высокочастотное поле, резонанс.

Задача о колебаниях бесстолкновительной газовой плазмы (см. [1]) в полупространстве, находящемся во внешнем продольном (перпендикулярно поверхности) электрическом поле, для случая чисто зеркального отражения электронов от границы впервые аналитически решена Ландау [2]. Более общий случай граничных условий рассмотрен в работах [3, 4]. В [3] задача была решена с использованием диффузных граничных условий и с применением интегральных преобразований Фурье. В [4] был проведен общий анализ поведения электрического поля на большом расстоянии от границы плазмы. В этой же работе указывалось на особое значение анализа поля вблизи плазменного резонанса.

В настоящей работе аналитически найдены функция распределения электронов и экранированное электрическое поле внутри полупространства газовой плазмы, когда вне полупространства существует внешнее переменное электрическое поле.

Настоящий анализ примыкает к работам [5, 6], где рассматривалась задача о поведении плазмы в полупространстве металла и с диффузным отражением электронов от границы.

Цель данной работы – исследование отклика электронов в полупространстве на продольное переменное электрическое поле, приложенное перпендикулярно поверхности полупространства. Требуется найти отклик электронов внутри плазмы на это поле и провести его исследование вблизи резонанса.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Будем считать поле достаточно слабым, чтобы было применимо линейное приближение [2]. Откликом ионов на внешнее электрическое поле будем пренебрегать [2]. Для описания поведения электронов будем использовать уравнение Больцмана с интегралом столкновений в форме Бхатнагара – Гросса – Крука (БГК) и уравнение Пуассона для электрического поля в плазме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu(f_{\text{eq}} - f)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi e_0 \int (f - f_0) d^3 v$$

$$f_{\text{eq}} = n_{\text{eq}} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v^2}{2k_B T} \right), \quad n_{\text{eq}} = \int f d^3 v \quad (1.1)$$

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

Здесь $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ – функция распределения электронов по скоростям, ν – эффективная частота столкновений электронов с частицами плазмы, f_{eq} – равновесная функция распределения, m – масса электрона, T – температура плазмы, E – напряженность электрического поля, e_0 – заряд электрона, \mathbf{p} – импульс электрона, k_B – постоянная Больцмана, f_0 – максвелловская функция распределения.

Пусть плазма занимает полупространство $x > 0$. Внешнее электрическое поле вне плазмы перпендикулярно границе плазмы и меняется по закону $E_0 e^{-i\omega t}$. Отражение электронов от границы плазмы будем предполагать зеркальным. Электрическое поле считаем ограниченным вдали от поверхности плазмы. Ввиду линейности задачи функцию распределения можно представить в следующем виде $f = f_0(1 + h e^{-i\omega t})$, $|h| \ll 1$.

Выпишем на основании (1.1) линеаризованные уравнения для функции распределения и электрического поля:

$$-i\omega h + \mathbf{v} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} - e_0 E \frac{v_x}{k_B T} + \nu h = \frac{\nu}{n_0} \int f_0 h d^3 v \tag{1.2}$$

$$E'(x) = 4\pi e_0 \int f_0 h d^3 v$$

При данной постановке задачи электрическое поле зависит от одной пространственной координаты, а функция h – от одной скоростной и от одной пространственной координаты. Введем следующие безразмерную переменную и параметры:

$$x' = x \nu \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{1/2}, \quad \mu = v_x \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{1/2}, \quad e(x) = \frac{E(x)}{E_0}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m}}, \quad \varphi = \frac{\nu}{e_0 E_0} \sqrt{\frac{m k_B T}{2}} h$$

Здесь ω_p – плазменная (ленгмюровская) частота. Далее штрих у координаты будем опускать.

С помощью введенных безразмерных величин на основании (1.2) получим систему уравнений, описывающих данную задачу

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi + k \varphi(x, \mu) = \mu e(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \varphi(x, \mu') d\mu' \tag{1.3}$$

$$e'(x) = \frac{2\omega_p^2}{\nu^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \varphi(x, \mu') d\mu', \quad k = 1 - i \frac{\omega}{\nu}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} e(0) &= 1, \quad e(\infty) = \text{const} \\ \varphi(0, \mu) &= \varphi(0, -\mu), \quad -1 < \mu < 1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. Собственные функции и собственные значения

Будем искать решение граничной задачи (1.3) и (1.4) в виде

$$\varphi_\eta(x, \mu) = \exp\left(-k \frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad e_\eta(x) = \exp\left(-k \frac{x}{\eta}\right) E(\eta) \tag{2.1}$$

Тогда получаем характеристическую систему уравнений

$$\begin{aligned}
 (\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) &= \frac{1}{k}\eta\mu E(\eta) + \frac{1}{k\sqrt{\pi}}\eta n(\eta) \\
 E(\eta) &= -\frac{2\omega_p^2}{kv^2\sqrt{\pi}}\eta n(\eta), \quad n(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\Phi(\eta, \mu)d\mu.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Исключим из уравнений (2.2) выражение $\eta n(\eta)$. Вводя обозначения

$$\eta_1^2 = \frac{\varepsilon c}{2}, \quad \varepsilon = \frac{v}{\omega_p}, \quad c = \varepsilon - i(1 + \gamma), \quad \gamma = \frac{\omega - \omega_p}{\omega_p}$$

получаем, что функции $\Phi(\eta, \mu)$ и $E(\eta)$ связаны уравнениями:

$$\begin{aligned}
 k(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) &= E(\eta)(\mu\eta - \eta_1^2) \\
 \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)\Phi(\eta, \mu')d\mu' &= -\frac{kv^2}{2\omega_p^2}E(\eta)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Далее будем рассматривать лишь убывающие (по переменной x , $x > 0$) решения исходной системы. Согласно (2.1), убывающими решения являются тогда и только тогда, когда $\eta \in (0, +\infty)$; это значит, что полуось $0 < \eta < +\infty$ является непрерывным спектром граничной задачи.

Пусть $\eta \in (-\infty, +\infty)$. Тогда из уравнений (2.3) в пространстве обобщенных функций [7] найдем собственные функции характеристической системы:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\eta, \mu) &= k^{-1}F(\eta, \mu)E(\eta) \\
 F(\eta, \mu) &= P\frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}c^2 \exp(\eta^2)E(\eta)\frac{\lambda(\eta)}{\eta}\delta(\eta - \mu)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\lambda(z) = 1 - \frac{2z}{c^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\frac{\mu z - \eta_1^2}{\mu - z}d\mu$$

В равенстве (2.4) $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\lambda(z)$ называется дисперсионной функцией задачи, Px^{-1} – символ главного значения интеграла от x^{-1} . Собственные решения исходной задачи даются равенствами (2.1) с учетом (2.4).

Выразим дисперсионную функцию $\lambda(z)$ через дисперсионную функцию Ван Кампена [8] $\lambda_0(z)$,

$$\lambda_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\frac{\mu d\mu}{\mu - z}$$

$$\lambda(z) = \lambda_1 + 2c^{-2}(\eta_1^2 - z^2)\lambda_0(z), \quad \lambda_1 = 1 - \varepsilon c^{-1}$$

Граничные значения дисперсионной функции сверху и снизу на действительной оси вычисляются согласно формулам Сохоцкого:

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = -4\sqrt{\pi}ic^{-2}\mu(\mu^2 - \eta_1^2)\exp(-\mu^2)$$

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \lambda(\mu) \mp 2i\sqrt{\pi}c^{-2}\mu(\mu^2 - \eta_1^2)\exp(-\mu^2)$$

$$\lambda(\mu) = \lambda_1 + 2c^{-2}(\eta_1^2 - \mu^2)\lambda_0(\mu), \quad \lambda_0(\mu) = 1 - 2\mu \exp(-\mu^2) \int_0^{\mu} \exp(u^2) du$$

3. Собственные функции дискретного спектра. Существование плазменной моды. По определению, дискретным спектром характеристического уравнения является множество нулей дисперсионного уравнения $g(z) \equiv \lambda(z)/z = 0$.

Приступим к отысканию этих нулей. Разложим дисперсионную функцию в асимптотический ряд в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\lambda(z) = \lambda_{\infty} + \frac{\lambda_2}{z^2} + \frac{\lambda_4}{z^4} + \dots, \quad z \rightarrow \infty \tag{3.1}$$

$$\lambda_{\infty} = \lambda(\infty) = 1 - \frac{\epsilon}{c} + \frac{1}{c^2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \epsilon c}{2c^2}, \quad \lambda_4 = \frac{15 - 3\epsilon c}{4c^2}, \dots$$

Отсюда видно, что дисперсионное уравнение в качестве нуля имеет бесконечно удаленную точку $\eta_i = \infty$, которой отвечают дискретные собственные решения исходной системы:

$$\varphi_{\infty}(x, \mu) = \frac{E_{\infty}}{k}\mu, \quad e_{\infty}(x) = E_{\infty}$$

Это решение естественно назвать модой Друде [2, 3].

Остановимся кратко на вопросе существования плазменной моды. Найдем число N конечных комплексных нулей дисперсионной функции. Воспользуемся принципом аргумента. В силу четности дисперсионной функции и согласно принципу аргумента

$$N = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} d \arg G(\tau), \quad G(\tau) = \frac{\lambda^+(\tau)}{\lambda^-(\tau)} \tag{3.2}$$

Нетрудно видеть, что $G(0) = 1$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = 1$. Следовательно, равенство (3.2) означает,

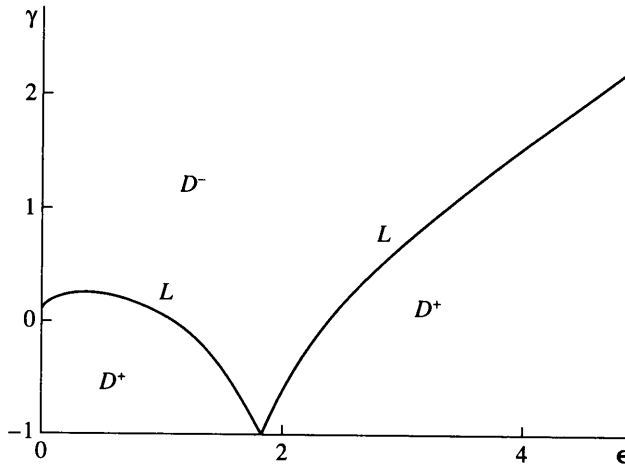
что искомое число нулей дисперсионной функции равно удвоенному числу оборотов, совершаемых кривой γ ($\gamma: z = G(\tau)$, $0 \leq \tau \leq +\infty$) вокруг начала координат.

Из уравнений $\text{Re} G(\tau) = 0$, $\text{Im} G(\tau) = 0$ находим параметрическое представление границы L области D^+ (D^- – ее внешность), такой, что если $(\gamma, \epsilon) \in D^+$, то число нулей N дисперсионной функции равно двум – плазменная мода существует, а если $(\gamma, \epsilon) \in D^-$, то конечных нулей у дисперсионной функции нет – плазменная мода отсутствует. Граница L области D^+ (см. фиг. 1) имеет вид

$$L: \gamma = -1 \pm \sqrt{L_1(\tau)}, \quad \epsilon = \sqrt{L_2(\tau)}, \quad 0 \leq \tau \leq +\infty$$

$$L_1(\tau) = \frac{2\tau^2[s^2(\tau) + \lambda_0(\tau)(1 + \lambda_0(\tau))]^2}{\lambda_0(\tau)[s^2(\tau) + (1 + \lambda_0(\tau))^2]}$$

$$L_2(\tau) = \frac{2\tau^2 s^2(\tau)}{\lambda_0(\tau)[s^2(\tau) + (1 + \lambda_0(\tau))^2]}$$



Фиг. 1

При переходе через эту кривую индекс функции $G(\mu)$ на положительной полуоси меняется скачком. В работе [9] разработан метод исследования граничного режима, когда $(\gamma, \epsilon) \in L$.

В силу четности дисперсионной функции ее нули различаются лишь знаком. Обозначим эти нули $\pm\eta_0$, причем за η_0 возьмем такой нуль, у которого $\text{Re } \eta_0 > 0$. Нулю η_0 отвечает следующее решение

$$\varphi_{\eta_0}(x, \mu) = \exp\left(-k \frac{x}{\eta_0}\right) \frac{E_0 \eta_0 \mu - \eta_1^2}{k \eta_0 - \mu}, \quad e_{\eta_0}(x) = \exp\left(-k \frac{x}{\eta_0}\right) E_0$$

Это решение естественно назвать модой Дебая (плазменная мода).

4. Функция распределения электронов и электрическое поле. Покажем, что задача (1.3), (1.4) имеет решение, представимое в виде разложения по собственным функциям характеристической системы

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) = & \frac{E_\infty}{k} \mu + \frac{E_0 \eta_0 \mu - \eta_1^2}{k \eta_0 - \mu} \exp\left(-k \frac{x}{\eta_0}\right) + \\ & + \frac{1}{k} \int_0^\infty \exp\left(-k \frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) E(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$e(x) = E_\infty + E_0 \exp\left(-k \frac{x}{\eta_0}\right) + \int_0^\infty \exp\left(-k \frac{x}{\eta}\right) E(\eta) d\eta \quad (4.2)$$

Здесь E_0 и E_∞ – неизвестные коэффициенты, отвечающие дискретному спектру (амплитуды Дебая и Друде), $E(\eta)$ – неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра.

При $(\gamma, \epsilon) \in D^-$ в разложениях (4.1) и (4.2) следует положить $E_0 = 0$.

Подставим разложения (4.1) и (4.2) в граничные условия. Получаем следующую систему уравнений:

$$2E_\infty \mu + E_0 \Phi_0(\mu) + \int_0^\infty F(\eta, \mu) E(\eta) d\eta - \int_0^\infty F(\eta, -\mu) E(\eta) d\eta = 0 \quad (4.3)$$

$$E_{\infty} + E_0 + \int_0^{\infty} E(\eta) d\eta = 1 \quad (4.4)$$

$$\varphi_0(\mu) = \frac{\eta_1^2 - \eta_0\mu}{\mu - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0\mu}{\mu + \eta_0}$$

Продолжим функцию $E(\eta)$ в отрицательную полуось $(-\infty, 0)$ четным образом: $E(\eta) = E(-\eta)$. Тогда $\Phi(-\eta, -\mu) = \Phi(\eta, \mu)$. Преобразуем уравнение (4.3) к виду:

$$2E_{\infty}\mu + E_0\varphi_0(\mu) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta, \mu)E(\eta) d\eta = 0 \quad (4.5)$$

Подставим в уравнение (4.5) собственные функции. Получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [10] на всей действительной оси $-\infty < \mu < +\infty$:

$$2E_{\infty}\mu + E_0\varphi_0(\mu) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) d\eta - \sqrt{\pi}\eta_1^2 \exp(\mu^2) \frac{\lambda(\mu)}{\mu} E(\mu) = 0 \quad (4.6)$$

Введем вспомогательную функцию

$$M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\eta - \eta_1^2}{\eta - z} E(\eta) d\eta \quad (4.7)$$

для которой на всей действительной оси выполняются равенства

$$M^+(\mu) - M^-(\mu) = 2\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)E(\mu),$$

$$\frac{1}{2}[M^+(\mu) + M^-(\mu)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu z - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) d\eta \quad (4.8)$$

С помощью (4.7) и (4.8) преобразуем сингулярное уравнение (4.6) к краевой задаче Римана на всей действительной оси:

$$\frac{M^+(\mu) + 2E_{\infty}\mu + E_0\varphi_0(\mu)}{M^-(\mu) + 2E_{\infty}\mu + E_0\varphi_0(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \quad (4.9)$$

Задача (4.9) имеет решение:

$$M(z) = -2E_{\infty}z - E_0 \left(\frac{\eta_1 - \eta_0 z}{z - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0 z}{z + \eta_0} \right) + \frac{C_1 z}{\lambda(z)} \quad (4.10)$$

Полюс у решения (4.10) в точках $\pm\eta_0$ устраняется в силу четности дисперсионной функции одним условием: $C_1 = 2E_{\infty}\lambda_{\infty}$, где $\lambda_{\infty} = \lambda(\infty)$.

Амплитуда Дебая находится при устранении полюсов в точках $\pm\eta_0$ условием

$$E_0 = \frac{C_1 \eta_0}{(\eta_1^2 - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0)} \quad (4.11)$$

Коэффициент непрерывного спектра найдем, если подставим решение (4.10) в формулу Сохоцкого (4.8):

$$E(\mu) = \frac{C_1 \mu}{2\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)} \left(\frac{1}{\lambda^+(\mu)} - \frac{1}{\lambda^-(\mu)} \right) = \frac{2C_1 \mu^2 \exp(-\mu^2)}{\sqrt{\pi} c^2 \lambda^+(\mu) \lambda^-(\mu)} \quad (4.12)$$

Осталось найти амплитуду Друде E_∞ . Для нахождения E_∞ воспользуемся уравнением (4.4), которое перепишем с учетом четности $E(\eta)$ и с учетом (4.11) и (4.12):

$$E_\infty + \frac{2\lambda_\infty\eta_0 E_\infty}{(\eta_1^2 - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0)} + \frac{\lambda_\infty E_\infty}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} \right) \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \eta_1^2} = 1 \quad (4.13)$$

Интеграл из (4.13)

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E(\eta) d\eta = E_\infty \lambda_\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} \right) \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - \eta_1^2}$$

можно вычислить аналитически.

Рассмотрим интеграл

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(z) dz, \quad \varphi(z) = \frac{z}{\lambda(z)(z^2 - \eta_1^2)} \quad (4.14)$$

Здесь контур Γ_ε представляет собой границу области, состоящей из двух полуокружностей Γ_ε^+ и Γ_ε^- радиуса $R = 1/\varepsilon$, лежащих соответственно в верхней и нижней полуплоскостях и отстоящих от действительной оси на расстоянии $\varepsilon > 0$.

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в интеграле (4.14) и применяя теорию вычетов, получаем равенство:

$$J \equiv \frac{E_\infty \lambda_\infty}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^+(\mu)} - \frac{1}{\lambda^-(\mu)} \right) \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - \eta_1^2} = \quad (4.15)$$

$$= E_\infty \lambda_\infty [\text{Res}_{\infty} + \text{Res}_{\eta_1} + \text{Res}_{-\eta_1} + \text{Res}_{\eta_0} + \text{Res}_{-\eta_0}] \varphi(z)$$

Замечая, что

$$\text{Res}_{\pm\eta_0} \varphi(z) = \frac{\eta_0}{\lambda'(\eta_0)(\eta_0^2 - \eta_1^2)}, \quad \text{Res}_{\pm\eta_1} \varphi(z) = \frac{1}{2\lambda_1}, \quad \text{Res}_{\infty} \varphi(z) = -\frac{1}{\lambda_\infty}$$

на основании (4.15) получаем

$$J = \frac{2\eta_0 E_\infty \lambda_\infty}{\lambda'(\eta_0)(\eta_0^2 - \eta_1^2)} + \frac{E_\infty \lambda_\infty}{\lambda_1} - E_\infty$$

Подставляя это равенство в (4.13), получаем, что $E_\infty = \lambda_1/\lambda_\infty$, $C_1 = 2\lambda_1$. Таким образом, разложения (4.1) и (4.2) установлены. Структура электрического поля в общем случае такова:

$$e(x) = e_d(x) + e_c(x)$$

$$e_d(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1\eta_0}{\lambda'(\eta_0)(\eta_1^2 - \eta_0^2)} \exp\left(-k\frac{x}{\eta_0}\right) \quad (4.16)$$

$$e_c(x) = \frac{4\lambda_1}{c^2\sqrt{\pi_0}} \int_0^\infty \frac{\eta^2 \exp(-\eta^2)}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)} \exp\left(-k\frac{x}{\eta}\right) d\eta \quad (4.17)$$

Формула (4.16) справедлива при $(\gamma, \epsilon) \in D^+$. В случае $(\gamma, \epsilon) \in D^-$ нуль η_0 дисперсионной функции отсутствует. Следовательно, можно считать, что в этом случае $\eta_0 = 0$. Второе слагаемое в (4.16) в этом случае пропадает.

5. Анализ решения. В формулах (4.16) и (4.17) перейдем к исходным параметрам задачи γ и ϵ :

$$e_d(x) = \frac{(1 + \gamma)(1 + \gamma + i\epsilon)}{2\gamma + i\epsilon + \gamma(\gamma + i\epsilon)} - \frac{4(1 + \gamma)\eta_0 \exp(-kx/\eta_0)}{(1 + \gamma + i\epsilon)\lambda'(\eta_0)(2\eta_0^2 + i\epsilon(1 + \gamma + i\epsilon))} \quad (5.1)$$

$$e_c(x) = -\frac{4(1 + \gamma)}{(1 + \gamma + i\epsilon)^3} \int_0^\infty \frac{\eta^2 \exp(-\eta^2 - kx/\eta)}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)} d\eta \quad (5.2)$$

Теперь будем считать параметры γ и ϵ малыми:

$$\epsilon = \frac{\nu}{\omega_p}, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad \gamma = \frac{\omega - \omega_p}{\omega_p}, \quad |\gamma| \ll 1$$

В основе проводимого ниже анализа лежит идея отыскать в явном виде нуль дисперсионной функции $\eta_0 = \eta_0(\gamma, \epsilon)$. При $\omega \rightarrow \omega_p$ и $\epsilon \rightarrow 0$ (вблизи резонанса) оказывается, что $\eta_0(\gamma, \epsilon) \rightarrow \infty$.

Воспользуемся разложением (3.1). Отбрасывая члены, начиная с η_0^{-6} , из уравнения $\lambda(\eta_0) = 0$ в рассматриваемом приближении находим, что

$$\eta_0^2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_\infty} + \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \Rightarrow \quad (5.3)$$

$$\eta_0^2 = \frac{3 + i\epsilon - \epsilon(\epsilon - i\gamma)}{2[2\gamma + i\epsilon + \gamma(\gamma + i\epsilon)]} + \frac{15 + 3i\epsilon(1 + \gamma + i\epsilon)}{6 + 2i\epsilon(1 + \gamma + i\epsilon)}$$

Из (5.3) видно, что вблизи резонанса модуль дисперсионной функции быстро возрастает, но остается конечной величиной даже при $\gamma = 0$, ибо для столкновительной плазмы $\epsilon > 0$. Представим основные параметры решения как функции двух малых параметров ϵ и γ . При сделанных предположениях

$$\lambda_\infty = \frac{2\gamma + i\epsilon + \gamma(\gamma + i\epsilon)}{(1 + \gamma + i\epsilon)^2}, \quad k = -i \frac{1 + \gamma + i\epsilon}{\epsilon}$$

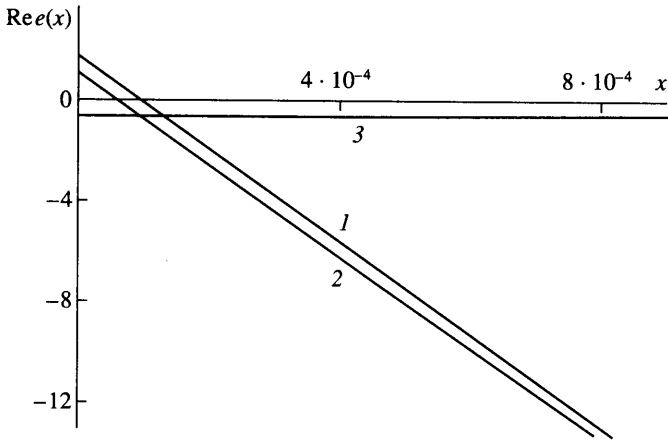
$$\eta_1^2 = \frac{\epsilon c}{2} = -i \frac{\epsilon}{2}(1 + \gamma + i\epsilon), \quad \eta_1 = \frac{1 - i}{2} \sqrt{\epsilon(1 + \gamma + i\epsilon)}$$

Оценим величины $k\eta_0^{-1}$ и k при $\gamma = 0$ и $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{k}{\eta_0} = (1 - i) \sqrt{\frac{2}{3\epsilon}}, \quad k = -\frac{i}{\epsilon} (\gamma = 0, \epsilon \rightarrow 0) \quad (5.4)$$

Из (5.2) для непрерывного спектра с учетом асимптотики (5.4) видно, что соответствующая часть электрического поля имеет коэффициент убывания по x , пропорциональный $(\sqrt{\epsilon})^{-1}$. Из выражения (5.1) для дискретного спектра с учетом асимптотики k видно, что соответствующая часть поля имеет коэффициент убывания, пропорциональный ϵ^{-1} .

Это означает, что существуют два слоя $0 \leq x \leq \epsilon$ и $\epsilon \leq x \leq \sqrt{\epsilon}$, примыкающие к границе плазмы. В первом слое следует учитывать вклад в электрическое поле, обусловленный и непрерывным и дискретным спектрами (фиг. 2).



Фиг. 2. Распределение действительной части электрического поля в первом слое при $\gamma = 0$, $\epsilon = 0.001$; кривые 1, 2 – дискретный и непрерывный спектры, 3 – их сумма

Во втором слое решающий вклад в электрическое поле вносит второе слагаемое из (5.1) с амплитудой Дебая. Второй слой при $x \sim \sqrt{\epsilon}$ переходит в область сплошной среды, где определяющий вклад в электрическое поле вносит первое слагаемое – амплитуда Друде.

Переходя к размерным координатам, получим, что первый слой соответствует области $0 \leq x \leq l\epsilon$, а второй слой – области $l\epsilon \leq x \leq l\sqrt{\epsilon}$. Учитывая определение ϵ , получаем для первого слоя область $0 \leq x \leq r_D$, а для второго слоя – область $r_D \leq x \leq \sqrt{l r_D}$. Здесь r_D – дебаевский радиус экранирования поля $r_D \sim v_T \omega_p^{-1}$, v_T – тепловая скорость электронов.

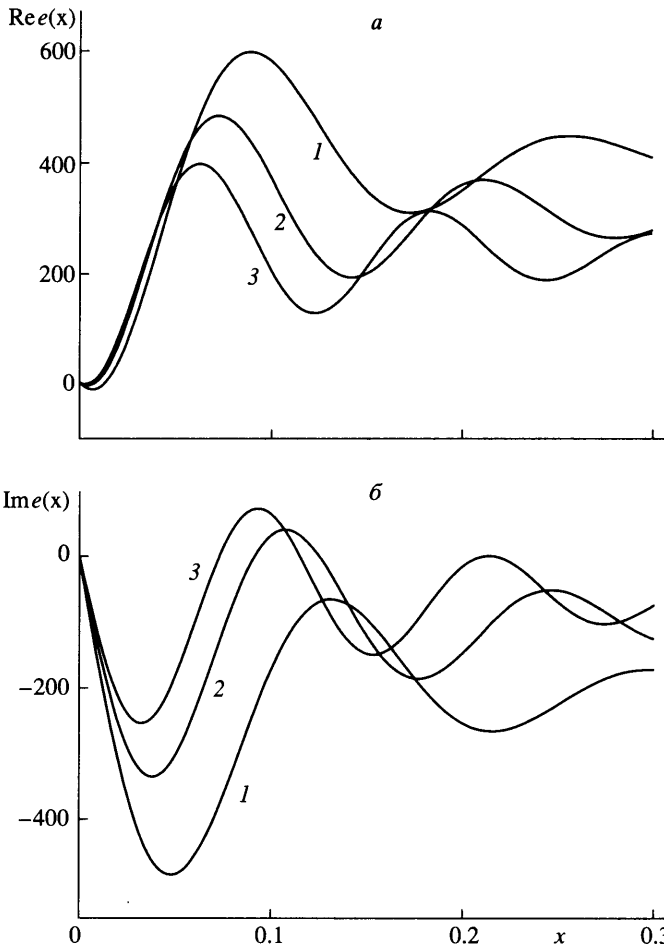
Третий слой соответствует области $\sqrt{l r_D} \leq x \leq +\infty$. В этой области мода Дебая и волны Ван Кампена [11] затухают и доминирует объемное решение Друде; следовательно, третий слой – это область, где справедлива электродинамика сплошной среды.

Взаимное расположение и характерные размеры слоев для рассматриваемого резонансного случая существенно отличаются от низкочастотного случая, когда $\omega \ll \omega_p$, $\omega \ll \nu$. Анализ общего выражения для поля (4.16) показывает, что и в этом случае первый слой имеет размер порядка r_D . Второй же слой соответствует области $r_D \leq x \leq l$. Таким образом, второй слой в этом случае существенно (в $\sqrt{l/r_D}$ раз) шире, а влияние моды Дебая в низкочастотном случае пренебрежимо мало, в отличие от резонансного случая.

Особо отметим, что вклад непрерывного спектра в электрическое поле при больших $|\eta_0|$ имеет тот же порядок в первом слое, что и порядок дискретного спектра. При переходе из первого слоя во второй вклад непрерывного спектра становится близким к нулю (см. фиг. 2). Этот факт объясняется тем обстоятельством, что интеграл из (4.16) начинает быстро осциллировать с ростом x ; а интеграл от быстро осциллирующей функции начинает исчезать с ростом частоты осцилляции.

Отыщем величину вклада непрерывного и дискретного спектров в величину электрического поля. Дифференцируя (3.1) в точке η_0 , находим

$$\lambda'(\eta_0) = -\frac{2\lambda_2}{\eta_0^3} - \frac{4\lambda_4}{\eta_0^4} - \dots \quad (5.5)$$



Фиг. 3. Распределение электрического поля при $\epsilon = 0.001$, $\gamma = 0.001$, $\gamma = 0.0025$, $\gamma = 0.005$ (кривые 1-3; а - $Re e$, б - $Im e$)

Следовательно, при больших $|\eta_0|$ величина электрического поля, отвечающая дискретному спектру, равна

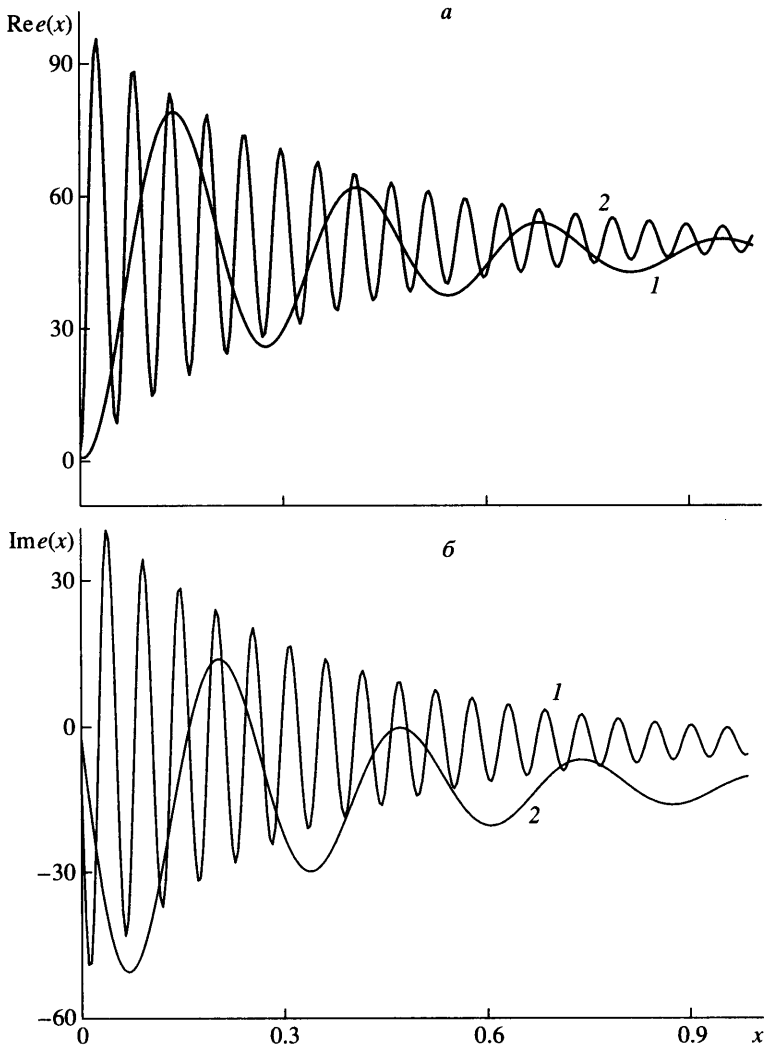
$$e_d(x) = \frac{1}{\lambda_\infty} - \frac{2}{\eta_0 \lambda'(\eta_0)} \exp\left(-k \frac{x}{\eta_0}\right)$$

или, используя соотношение (5.5)

$$e_d(x) = -\frac{\eta_0^2}{\lambda_2} \left[1 - \frac{\exp(-kx/\eta_0)}{1 + 2\lambda_4/(\lambda_2 \eta_0^2)} \right]$$

Отсюда получаем, что вблизи резонанса

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} e_d(x) = -2 \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 3. (3)$$



Фиг. 4. Распределение электрического поля при $\epsilon = 0.001$, $\gamma = 0.001$, $\gamma = 0.005$ – кривые 1, 2; а – $\text{Re} e$, б – $\text{Im} e$

Учитывая, что $e_d(0) + e_c(0) = 1$, имеем: $e_c(0) = -2$. (3). Таким образом, вклад в электрическое поле вблизи границы плазмы от непрерывного спектра составляет 41.2%, а от дискретного – 58.8%, т.е. эти величины сопоставимы. Это означает, что вклад непрерывного спектра вблизи поверхности (в первом слое) следует учитывать, ибо величины $e_d(0)$ и $e_c(0)$ имеют одинаковый порядок при $\eta_0 \rightarrow \infty$. Из приведенных ниже графиков видно, что затухание волн Ван Кампена сопровождается осцилляциями.

Итак, вне первого слоя поведение электрического поля определяется в основном дискретным спектром. Интересно заметить, оба составляющих электрического поля $e_d(0)$ и $e_c(0)$ на границе газовой плазмы остаются конечными при всех значениях малых параметров γ ($|\gamma| \ll 1$) и ϵ ($0 < \epsilon \ll 1$). Этот факт совпадает с аналогичной ситуацией в случае плазмы в металле [5, 6].

На рисунках (см. фиг. 3, 4) приведены графики зависимости электрического поля (ее действительной и мнимой частей) от расстояния до границы плазмы (точнее, до грани-

цы первого слоя). Из фиг. 3, 4 видно, что при положительных значениях величины γ наблюдается убывающий осцилляционный режим, т. е. поле осциллирует, амплитуды осцилляции убывают, приближаясь к своему асимптотическому значению при $x \rightarrow +\infty$. Этот осцилляционный режим становится все более выраженным по мере роста величины γ .

При $\gamma = 0$ и $\gamma < 0$ осцилляции не наблюдаются. При этом величина поля в объеме плазмы при малых значениях γ и ϵ значительно превышает величину поля на поверхности, что естественно для рассматриваемого резонансного случая.

Продольная диэлектрическая проницаемость ϵ_{\parallel} , согласно [2], связана с ω и ω_p соотношением: $\epsilon_{\parallel} = 2(1 - \omega_p \omega^{-1}) = 2\gamma(1 + \gamma)^{-1}$. При малых γ отсюда имеем: $\epsilon_{\parallel} = 2\gamma$. Вдали от границы плазмы (при $x \gg 1$), согласно [2], при малых отрицательных ϵ_{\parallel} имеем

$$e(x) = \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{|\epsilon_{\parallel}|}{3}}\right) \right] \quad (5.6)$$

Здесь a – дебаевский радиус.

Из (5.6) видно, что поле монотонно возрастает с ростом x до амплитуды Друде $1/\epsilon_{\parallel}$; этот факт совпадает с результатом данной работы для столкновительной плазмы.

Убывающая часть дискретной моды (мода Дебая) для резонансного случая $\omega = \omega_p$ (или $\gamma = 0$), согласно (5.1), может быть представлена в виде

$$e_D(x) = \frac{i}{\epsilon} \exp\left(-\gamma_0 \frac{1-i}{\sqrt{\epsilon}} x\right), \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5.7)$$

Для сравнения отметим, что наблюдается согласие с [4] для случая плазмы в полупространстве металла, в которой получена также формула (5.7), но с коэффициентом $\gamma_0 = \sqrt{5/6}$.

Заключение. Аналитически решена классическая задача о колебаниях электронной плазмы в полупространстве, находящемся во внешнем переменном электрическом поле. В явном виде найдены функция распределения электронов и экранированное электрическое поле внутри плазмы.

Исследован случай, когда частота колебаний внешнего поля близка к собственной частоте плазменных колебаний.

Оказалось, что на плоскости параметров задачи (γ, ϵ) (где $1 + \gamma = \omega/\omega_p$, $\epsilon = v/\omega_p$) существует область, для точек которой мода Дебая исчезает.

В плазме можно выделить три области с существенно различным поведением электрического поля. К поверхности плазмы примыкает слой ($0 \leq x \leq r_D$, r_D – дебаевский радиус экранирования), в котором поведение поля определяется тремя слагаемыми – модами Друде, Дебая (обе отвечают дискретному спектру задачи) и Ван Кампена (непрерывный спектр).

Во втором слое ($r_D \leq x \leq \sqrt{lr_D}$, l – длина свободного пробега электронов) поведение поля определяется модами Друде и Дебая, причем мода Дебая является основной характеристикой, ответственной за осцилляционный режим.

Третий слой ($\sqrt{lr_D} \leq x \leq +\infty$) – область сплошной среды, в которой мода Друде определяет поведение поля. Эта мода может быть найдена из уравнений сплошной среды и уравнений Максвелла, не прибегая к решению кинетического уравнения.

Работа выполнена по гранту РФФИ (№ 03-01-00281).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. Вып. 3. С. 291–318.
2. Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы // Собрание трудов. М.: Наука, 1969. Т. 2. С. 7–25. (См. также ЖЭТФ. 1946. Т. 16. Вып. 7. С. 574–586.)
3. Keller J.M., Fuchs R., Kliewer K.L. p-polarized optical properties of a metal with a diffusely scattering surface // Physical Review B. 1975. V. 12. № 6. P. 2012–2029.
4. Гохфельд В.М., Гулянский М.А., Каганов М.И., Плявенек А.Г. Неэкспоненциальное затухание электро-магнитного поля в нормальных металлах // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 3(9). С. 985–1001.
5. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о поведении электронной плазмы в полупространстве металла в переменном электрическом поле // Поверхность. Физика. Химия. Механика. 1993. № 2. С. 25–32.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Электронная плазма в полупространстве металла в переменном электрическом поле // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41. № 8. С. 1229–1241.
7. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2003. 399 с.
8. Ван Кампен. Дисперсионное уравнение для волн в плазме // Колебания сверхзвуковых частот в плазме. Сб. статей // Под ред. Г.А. Бернштейнского и З.С. Чернова 1961. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. С. 57–70.
9. Латышев А.В., Юшканов А.А. Нестационарная граничная задача для модельных кинетических уравнений при критических параметрах // Теорет. и мат. физика. 1998. Т. 116. № 2. (август). С. 305–320.
10. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО “Янус”, 1995. 519 с.
11. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 300 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.VII.2005