МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 2006

УДК 533.6.011.72

 С. К. АСЛАНОВ

К ТЕОРИИ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

Аналитически исследована задача о распространении в однородной среде сферического ударного фронта, возникающего при точечном взрыве с учетом противодавления, на всем бесконечном промежутке его существования. С этой целью произведено сращивание асимптотических представлений избыточного давления в ударной волне вдали и вблизи от точки энерговыделения. Четырехчленное разложение в дальней зоне, включающее в себя произвольные постоянные, удалось аналитически продолжить так, чтобы обеспечить строгое совпадение с четырехчленным степенным разложением решения в особой точке – центре взрыва. Задача определения неизвестных постоянных математически замыкается найденным интегралом энтропийных потерь, выражающим глобальный закон сохранения энергии. Полученная аналитическая зависимость избыточного давления в ударной волне от расстояния достаточно хорошо согласуется с результатами численных расчетов.

Ключевые слова: точечный взрыв, ударная волна, сращивание асимптотических представлений.

Автомодельное решение задачи о точечном взрыве было найдено аналитически [1] в предположении о возможности пренебречь величиной давления в окружающей среде, т.е. ее внутренней энергией. Это остается справедливым для начальной стадии распространения сильной взрывной волны, пока ее фронт еще сохраняет достаточно большую интенсивность. Учет противодавления в первоначально невозмущенной среде был осуществлен в виде поправки к автомодельному решению [2], линеаризованной по обратной величине квадрата числа Маха образующейся ударной волны. Указанная поправка несколько расширяет область применимости достигнутого таким образом аналитического решения задачи о точечном взрыве. Для дальнейшего расчета процесса распространения взрывной волны, утратившего свой автомодельный характер, применялись численные методы. Наиболее полные и точные результаты численного решения обсуждаемой задачи были получены в [3], где начальные условия задавались из автомодельного решения [1] в непосредственной близости от особой точки источника взрыва, а расчет производился практически до акустического вырождения ударной волны.

Асимптотический закон поведения сферической ударной волны вдали от места ее возникновения был получен в [4] на основе построенных асимптотических решений нелинейной системы газодинамических уравнений одномерного неустановившегося течения, содержащих произвольные функции. Это позволило найти для параметров ударного фронта соответствующие асимптотические разложения, с помощью которых открывается возможность учесть характер образования ударной волны и ее первоначальную форму.

В настоящей работе применительно к задаче о точечном взрыве при наличии противодавления удается аналитически продлить такое четырехчленное асимптотическое разложение, справедливое для дальней зоны взрыва, непосредственно в ближнюю (сингулярную) область его источника, так чтобы оно строго совпадало с известным автомодельным решением [1] вместе с линеаризованной поправкой [2]. При этом существенным образом используется интеграл энтропийных потерь в ударной волне на всем бесконечном интервале ее распространения, который был получен ранее [5] и выражает глобально закон сохранения энергии. В результате реализованной процедуры сращивания асимптотических разложений [6] вдали и вблизи от точки взрывного энерговыделения достигнуто единое аналитическое представление для параметров ударного фронта взрывной волны на всем промежутке ее существования, хорошо согласующееся с данными численных экспериментов [3]. При этом оказываются найденными неопределенные величины, входящие в выражение асимптотического закона затухания ударных волн [4].

1. Сращивание асимптотических разложений. Единственной моделью взрывного процесса, для которой известно аналитическое описание, является линеаризованная теория точечного взрыва с противодавлением [1, 2], когда в бесконечно малой области пространства, заполненного однородным идеальным газом постоянного давления p_0 с отношением теплоемкостей γ, происходит мгновенное выделение энергии E_0. На базе строгого автомодельного решения этой задачи [1] и линеаризованной (вблизи центра) поправки к нему [2], в частности, избыточное давление во фронте образующейся взрывной волны выражается следующим образом

$$\Delta p = \frac{p_1}{p_0} - 1 = \frac{Q_1}{R^3} + \frac{2\gamma}{\gamma+1}Q_2 + o(1), \quad Q_1 = \frac{8}{25(\gamma+1)\alpha}$$
$$R = \frac{r_1}{r_d}, \quad r_d = \left(\frac{E_0}{p_0}\right)^{1/3} \tag{1.1}$$

где r_d – динамический радиус, r_1 – расстояние фронта от центра взрыва; p_1 – давление непосредственно за ударным фронтом (максимальное давление во взрывной волне), α – введенный постоянный множитель; для случая $\gamma = 1.4$: $\alpha = 0.851$ [1] и $Q_2 = 0.918$ [2, 7].

Последнее выражение представляет собой главные члены асимптотического разложения решения по степеням $R \ll 1$, т.е. в ближней зоне взрыва (в окрестности особой точки $R = 0$).

С другой стороны, для дальней зоны взрыва ($R \gg 1$) можно воспользоваться соответствующим функциональным законом поведения параметров сферической ударной волны, который найден в [4] непосредственно из решений нелинейной системы одномерной нестационарной газовой динамики в виде асимптотических разложений, включающих произвольные функции. Следуя [4], безразмерная форма асимптотического представления, в частности, для величины избыточного давления в ударном фронте записывается таким образом

$$\Delta p = \frac{A_1}{R\sqrt{\ln R'}} + \frac{A_2}{R[\ln R']^2} + \frac{A_3}{R[\sqrt{\ln R'}]^7} + \frac{A_4}{R^2}\sqrt{\ln R'} + o\left\{\frac{1}{R^2}\sqrt{\ln(R')}\right\}$$
$$R_* = \frac{r_*}{r_d}, \quad R' = \frac{R}{R_*} \tag{1.2}$$

Определение постоянных A_j и R_*, остающихся в качестве неизвестных параметров, требует глобального подхода к рассматриваемой проблеме, учитывающего всю предысторию образования и распространения волны. А это, прежде всего, связано с необходимостью задания характера ее поведения в ближней зоне взрыва, для чего ниже применяется метод сращивания асимптотических разложений [6]. Последний состоит в том, чтобы с помощью аналитического продолжения четырехчленного представления (1.2) непосредственно в область $R \ll 1$ достигнуть строгого совпадения со степенным представлением (1.1), по существу являющимся четырехчленным разложением Δp в окрестности особой точки ($R = 0$). Для реализации указанной процедуры сращивания обобщим асимптотическое разложение (1.2) в виде

$$\Delta p = \frac{A_1}{R\sqrt{\ln(R'+C_1)}} + \frac{A_2}{R[\ln(R'+C_2)]^2} + \frac{A_3}{R[\sqrt{\ln(R'+C_3)}]^7} + \frac{A_4}{R^2}\sqrt{\ln(R'+C_4)},\quad R' = \frac{R}{R*} \tag{1.3}$$

дополнительно введя неизвестные постоянные C_j. Это добавит в разложение (1.2) слагаемые, величина которых оценивается как $O(R^{-2}[\ln(R/R_*]^{-3/2})$ в качестве главного порядка по $R \gg 1$, что находится за пределами используемой четырехчленной асимптотики.

Такая форма разложения для Δp в дальней зоне взрыва позволяет обеспечить пригодность выражения (1.3) во всем диапазоне $0 < R < \infty$, если принять $C_j \geq 1$. В интересах возможности математической замкнутости задачи определения неизвестных постоянных (A, C, R_*) будем считать одинаковыми $C_1 = C_3 = C_4 = C > 1$. Переразлагая выражение (1.3) по степеням $R \ll 1$ в окрестности особой точки $R = 0$, можно достигнуть требуемого характера особенности (1.1) в результате аналитического сращивания, если только предположить $C_2 = 1$, что непосредственно вытекает из вида слагаемых (1.3).

При этом в указанном переразложении (1.3) для области $R \ll 1$ обеспечить исчезновение члена $O\{R^{-2}\}$, который отсутствует в (1.1), оказывается возможным лишь в присутствии слагаемого с A_4. Тем самым подтверждается необходимость использования четырех членов исходной асимптотики (1.2) в дальней зоне взрыва. Потребовав совпадения коэффициентов при R^{-3}, R^{-2}, R^{-1}, 1 в переразложении (1.3) с таковыми из (1.1), приходим к четырем уравнениям, из которых все постоянные выражаются через остальные R_* и C как

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{A_2}{12}\left[\frac{13}{2C\sqrt{\ln C}} - \left(\frac{7}{6}+\frac{1}{C}\right)\sqrt{\ln C}\right] + \frac{2}{3}\frac{\gamma}{\gamma+1}Q_2R_*C(\sqrt{\ln C})^3 \\ A_2 = \frac{A_1}{R_*^2},\quad A_3 = \frac{A_2}{12}(\sqrt{\ln C})^5\left(\frac{6}{C} - \ln C\right) - A_1(\ln C)^3,\quad A_4 = -\frac{Q_1}{R_*\sqrt{\ln C}} \end{gathered} \tag{1.4}$$

2. Определение неизвестных постоянных. Члены переразложения (1.3) по степеням $R \ll 1$, следующие за членом $O(1)$, имеют в таком случае смысл поправки к решению (1.2) линеаризованной задачи о точечном взрыве и представляются в виде

$$\begin{gathered} \delta = D_1R + D_2R^2 \\ D_1 = \frac{1}{R_*^4}\left\{\frac{1}{12}\frac{Q_1}{C^2(\ln C)^2}\left[\frac{7}{2} - \frac{2}{C}\ln C + \frac{9}{C}\left(3 - \frac{1}{\ln C}\right)\right] - \right. \\ \left. -\frac{Q_1}{240} - \frac{\gamma}{\gamma+1}Q_2\frac{R_*^3}{C}\left(1+\frac{5}{\ln C}\right)\right\} \\ D_2 = -\frac{1}{R_*^5}\left\{\frac{1}{12}\frac{Q_1}{C^3(\ln C)^2}\left[\frac{7}{8} + \frac{1}{C}\left(\frac{53}{8} - \frac{\ln C}{2} + \frac{189}{16\ln C} - \frac{191}{32(\ln C)^2}\right) - \right.\right. \\ \left.\left. -\frac{35}{96(\ln C)^2} + \frac{231}{96\ln C}\right] - \frac{Q_1}{240} - \frac{1}{3}\frac{\gamma}{\gamma+1}Q_2\frac{R_*^3}{C^2}\left[2 + \frac{15}{\ln C} + \frac{113}{4(\ln C)^2}\right]\right\} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Чтобы учесть влияние характера предыстории процесса распространения взрывной волны в промежуточной зоне $0 < R < \infty$, воспользуемся законом сохранения энергии в глобальной форме уравнения для интеграла энтропийных потерь в ударной волне на всем интервале ее существования [5]

$$\frac{4\pi}{\gamma-1}\int_0^\infty\left[(1+\Delta p)^{1/\gamma}\frac{2\gamma+(\gamma-1)\Delta p}{2\gamma+(\gamma+1)\Delta p}-1\right]R^2dR = \frac{1}{\gamma} \tag{2.2}$$

С помощью главных членов асимптотик (1.1) и (1.2) для $\Delta p(R)$ при $R \ll 1$ и $R \gg 1$ соответственно нетрудно убедиться в сходимости этого несобственного интеграла. Таким образом, уравнением (2.2) устанавливается связь между постоянными R_* и C, которые остались в качестве неизвестных величин в выражениях (1.4).

Задачу их определения и тем самым окончательного получения зависимости $\Delta p(R)$ можно математически замкнуть, если привлечь следующие соображения. Малая поправка $\delta(R)$ к линеаризованному неавтомодельному аналитическому решению (1.1) принимает отрицательные значения, поскольку согласно (2.1) $D_1 < 0$ и $D_2 > 0$ и обладает минимумом $\delta_m(R_*, C) = -D_1^2/(4D_2)$ при $R = R_m = -D_1/(2D_2)$. С другой стороны, непосредственным сравнением результатов численного решения задачи о точечном взрыве [3] с соответствующими конкретными значениями Δp из (1.1) можно убедиться в том, что аналитические величины Δp превосходят таковые, полученные численным расчетом. А именно: указанное превышение аналитики имеет место более, чем на 1%, а начиная с $R \approx 0.3$ величина этой разницы быстро нарастает с увеличением R. Данное обстоятельство может служить основанием для того, чтобы принять в качестве необходимого дополнительного (замыкающего) условия целесообразное требование – выбрать наименьший из всех минимумов $\delta(R_m) = \delta_m(R_*, C)$ по значениям параметров R_* и C, которые допустимы интегральным соотношением (2.2).

Указанный подход действительно дает возможность однозначно найти неизвестные постоянные R_* и C, которые для случая $\gamma = 1.4$ выражаются следующим образом:

$$R_* = 3.06 \quad \text{и} \quad C = 1.36 \tag{2.3}$$

откуда по (1.4) будем иметь

$$A_1 = 0.264, \quad A_2 = 0.0167, \quad A_3 = -0.00737, \quad A_4 = -0.0923 \tag{2.4}$$

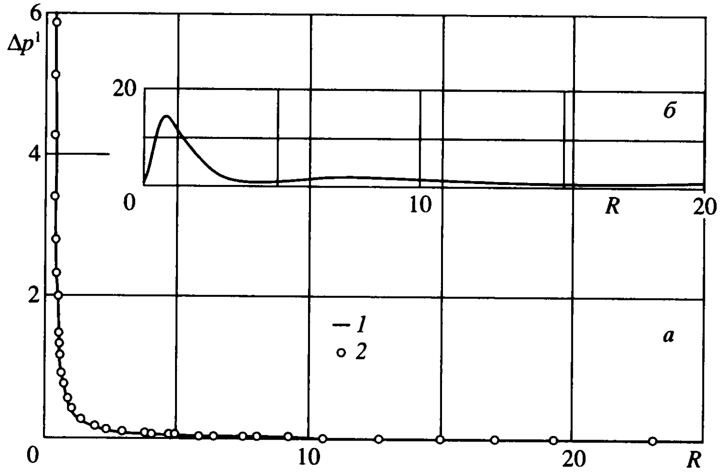
Таким образом, аналитически построенное выражение (1.3) совместно с (2.3), (2.4) приобретает смысл приближенного решения задачи об ударном фронте взрывной волны, возбужденной точечным взрывом с учетом противодавления. Оно представляет в единообразной форме зависимость от R избыточного давления во фронте на всем промежутке его распространения $0 < R < \infty$. Остальные характеристики ударной волны определяются непосредственно через Δp.

На фигуре (*а*) сопоставлены теоретически найденная зависимость $\Delta p(R)$ в виде непрерывной кривой и известные результаты численного анализа [3], а также показано распределение величины $\Delta p'$ их относительного различия (в процентах) (*б*).

Для распространения аналитического приближения (1.3), (2.3), (2.4), полученного выше для $\gamma = 1.4$, на общий случай произвольных значений γ можно предложить достаточно хорошие аппроксимации величин α и Q_2

$$\alpha(\gamma) = \frac{2\gamma+1}{8\gamma(\gamma-1)}, \quad Q_2 = 1-0.3\frac{\gamma-1}{\gamma} \tag{2.5}$$

на базе их известных зависимостей от γ. Так в соответствии с [1] кривая $\alpha(\gamma)$ во всем интервале значений $1.2 \le \gamma \le 3$ представляется формой (2.5) в пределах $(1\div2)$%-й погрешно-



Сопоставление зависимости избыточного давления Δp в ударном фронте от безразмерного расстояния $R - 1$ (1.3) и результатов численного анализа [3] (2) (*а*), относительное отличие $\Delta p'$ (в %) зависимости (1.3) от результатов [3], (*б*)

сти (при $\gamma = 1.4$ – с точностью 0.3%). Табличные данные [7] для $Q_2(\gamma)$ в приведенном интервале $1.1 \le \gamma \le 3$ представляются (2.5) в пределах 1%-й погрешности (при $\gamma = 1.4$ – с точностью 0.2%). Аппроксимировать величины (2.3) можно в виде

$$R_* = (\gamma + 1)\frac{2\gamma - 1}{\gamma}, \quad C = \frac{2\gamma}{\alpha(\gamma + 1)}$$

который позволяет обеспечить при $\gamma = 1.4$ точность 0.8%.

Заключение. Аналитическое приближение для избыточного давления во фронте ударной волны точечного взрыва, найденное методом сращивания асимптотических разложений, строго совпадает в окрестности центра с известным теоретическим результатом решения линеаризованной задачи о точечном взрыве с учетом противодавления.

В дальней зоне взрыва четыре члена асимптотического представления этого аналитического приближения совпадают со всеми членами известного функционального вида, соответствующего асимптотическому решению нелинейной системы газодинамических уравнений сферически симметричного типа.

В промежуточной области расстояний ударного фронта от взрывного центра степень приближения снижена, поскольку обеспечена интегральным законом сохранения энергии для всего бесконечного промежутка существования ударной волны в целом.

Отличие полученного теоретического результата от известных численных расчетов достигает наибольших значений (10–14)% внутри узкого диапазона расстояний $0.7 < R < 0.8$, не превышая 5% при $R \le 0.3$ и $R > 2$.

Асимптотическое представление, вытекающее для дальней зоны взрыва из построенного аналитического приближения, выражает в конкретной количественной форме закон затухания ударной волны вдали от места ее возникновения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
2. *Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В.* Теория точечного взрыва. М.: Физматгиз, 1961. 332 с.

3. *Охоцимский Д.Е., Кондрашева И.Л., Власова З.П., Козакова Р.К.* Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. // Тр. мат. Ин-та АН СССР. 1957. Т. 50. С. 1–156.
4. *Якимов Ю.Л.* Об асимптотических решениях уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа и об асимптотических законах затухания ударных волн // ПММ. 1955. Т. 19. № 6. С. 681–692.
5. *Асланов С.К., Голинский О.С.* Энергия асимптотически эквивалентного точечного взрыва для взрыва заряда конечного объема в совершенном газе // ПМТФ. 1988. № 6. С. 44–51.
6. *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
7. *Коробейников В.П.* Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука, 1985. 400 с.
8. *Ландау Л.Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 4. С.96–103.

Одесса
e-mail: veronika@farlep.net

Поступила в редакцию
25.IV.2005