

УДК 532.546 : 532.59

© 2006 г. Д. Н. МИХАЙЛОВ

## РАЗЛИЧИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ФРЕНКЕЛЯ–БИО В ВОДОНАСЫЩЕННОЙ И ГАЗОНАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Теоретически рассматривается задача о распространении продольных волн Био в насыщенной слабосжимаемой жидкостью (водой) и газонасыщенной пористой среде. С помощью численных расчетов исследованы частотные зависимости фазовых скоростей и коэффициентов затухания. Доказано, что при определенном соотношении параметров пористой среды и насыщающего флюида существует “критическая” частота, на которой обе продольные волны обладают идентичными свойствами. Получено аналитическое выражение для указанной “критической” частоты.

Показано, что для газонасыщенной пористой среды на некоторой частоте происходит смена типа относительного движения газ – пористая матрица в обеих продольных волнах. Предполагая, что поведение насыщающего газа соответствует адиабатическому уравнению состояния, получена оценка пороговой величины порового давления, необходимого для перестройки структуры относительного движения.

Обосновано, что волна, связанная с деформацией матрицы, обладает высоким коэффициентом затухания в насыщенной слабосжимаемой жидкостью (в рассматриваемом случае – водой) пористой среде, но является слабозатухающей волной в газонасыщенной пористой среде.

*Ключевые слова:* пористая среда, линейные волны, дисперсионное соотношение, волны Френкеля – Био.

Модели, описывающие распространение продольных волн в насыщенной пористой среде [1, 2], предсказали существование продольных волн двух типов – быстрой слабозатухающей (волна первого рода) и медленной сильнозатухающей (волна второго рода). Классификация, указанная в скобках, введена в работе [2], поэтому в литературе также общепринятым является термин волны Био первого и второго рода. В предельном случае невязкого насыщающего флюида аналитически показано, что медленная волна характеризуется противофазным движением матрицы и насыщающего флюида, а быстрая волна – синфазным [2]. Общее дисперсионное уравнение, характеризующее поведение продольных волн в пористой среде, насыщенной вязкой жидкостью, решалось численно [2]. Показано, что характерной особенностью низкочастотных медленных волн является зависимость их скорости и коэффициента затухания как корень квадратный от частоты, т.е. медленная волна в низкочастотной области по сути волна диффузионного типа.

На основе концепции эффективных напряжений в [3] объединена модель динамики насыщенной пористой среды Френкеля – Био и классической механики грунтов [4]. В обычных седиментационных породах одна продольная волна (медленная) определяется преимущественно деформацией матрицы (“волна по матрице”), а другая – сжимаемостью внутрипорового флюида и материала матрицы (быстрая волна) [3]. При полном водонасыщении деформация матрицы развивается только при условии перетекания жидкости между порами, что и обуславливает противофазное движение матрицы и насыщающего флюида в медленной волне. Возникающее при этом вязкое сопротивление (по Дарси) приводит к сильному затуханию волны. В то же время быстрая волна деформирует матрицу незначительно и, следовательно, ей присуще синфазное движение матрицы и внутрипоровой жидкости, а также малый коэффициент затухания.

Поведение продольных волн в газонасыщенной породе может быть существенно иным [3]. Действительно, сжимаемость воздуха велика, и для обеспечения деформации пористой матрицы вовсе не обязательно его перемещение из одних пор в другие – воздух просто-напросто сожмется. При этом характерно синфазное движение газа и пористой матрицы. Волна, связанная с деформацией матрицы (медленная волна), становится слабозатухающей [5] и именно она регистрируется экспериментально как сейсмическая волна.

Подобный механизм срабатывает и при наличии в насыщающей жидкости пузырьков газа [6]. Газовые пузырьки изменяют характер движения жидкости в поровом пространстве. В этом случае в продольной волне Био второго рода колебания пористой матрицы и пузырьков становятся синфазными, причем в окрестности резонансной частоты газовых пузырьков традиционные волны Био “обмениваются” своим поведением [6–9].

Логично предположить, что при определенной газонасыщенности пористой среды обе продольные волны будут распространяться в пористой среде, а их свойства будут близки. Данная гипотеза косвенно подтверждается экспериментами [10] по прохождению акустических волн через флюидонасыщенные пористые среды.

В предлагаемой статье проведен анализ условий, при которых свойства обеих продольных волн совпадают. Исследовано поведение продольных волн в газонасыщенных пористых средах в зависимости от порового давления; показано, какими параметрами пористой среды определяется волна с малым затуханием (т.е. экспериментально регистрируемая волна) в полностью водо- и газонасыщенной среде.

Аналитически и численно рассмотрено два предельных случая – полностью водонасыщенная и газонасыщенная порода – и дано сравнение характеристик продольных волн Френкеля – Био.

**1. Математическая модель.** Рассмотрим распространение продольных волн в насыщенной пористой среде. Согласно классической теории [1, 2], подобная среда представляется в виде сжимаемой пористой матрицы, поровое пространство которой полностью заполнено сжимаемой жидкостью или газом. При перетекании насыщающей жидкости (или газа) в поровом пространстве действует сила вязкого сопротивления, определяемая в соответствии с законом Дарси [3]. У пористой матрицы в общем случае модули упругости отличны от модулей составляющего ее материала, из-за наличия контактов между частичками материала, составляющего матрицу [3].

Пусть волна распространяется вдоль оси  $x$  (одномерный случай). Тогда система уравнений для продольных волн в линейном приближении имеет вид [3]

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} - \beta_1 \frac{\partial \sigma_{ef}}{\partial t} + (1 - m_0) \frac{\partial v_1}{\partial x} + m_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$(1 - m_0) \rho_{10} \frac{\partial v_1}{\partial t} + (1 - m_0) \frac{\partial}{\partial x} p = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{ef} + \frac{m_0^2 \mu}{k} (v_2 - v_1) \quad (1.2)$$

$$m_0 \rho_{20} \frac{\partial v_2}{\partial t} + m_0 \frac{\partial}{\partial x} p = -\frac{m_0^2 \mu}{k} (v_2 - v_1) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ef} = K_p e_1 + \varepsilon p, \quad K_p = K_b + 4/3 G, \quad \varepsilon = \beta_1 K_b, \quad \beta = (1 - m_0) \beta_1 + m_0 \beta_2 \quad (1.4)$$

Здесь индексы “1”, “2” – твердая фаза и насыщающая жидкость (газ);  $\rho_{j0}$  – плотности фаз;  $v_i$  – массовые скорости;  $e_1$  – продольная деформация матрицы;  $\sigma_{ef}$  – эффективное напряжение Терцаги;  $p$  – давление в насыщающем флюиде;  $m_0$  – пористость;  $k$  – проницаемость;  $\mu$  – вязкость флюида;  $K_b$  – модуль объемной упругости пористой матрицы;  $G$  – модуль сдвига пористой матрицы;  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – сжимаемости материала, составляющего пористую матрицу, и насыщающего флюида.

Уравнение (1.1) есть суммарный закон сохранения массы обеих фаз, (1.2) – баланс импульса матрицы, (1.3) – жидкой фазы, (1.4) – реологический закон для пористой матрицы.

Если частота распространяющейся волны превышает критическую частоту Био, т.е.  $\omega_c = \mu m_0 / (k \rho_{20})$ , то необходимо учитывать дополнительную корректирующую функцию [2]. Однако, как показали численные расчеты (см., например [12]), такая корректирующая функция существенна для коэффициента затухания, но почти не изменяет величину скорости. Здесь корректирующая функция не учитывается.

Будем искать решение системы (1.1)–(1.4) в виде гармонического сигнала

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & p & \sigma_{ef} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta v_1 & \delta v_2 & \delta p & \delta \sigma_{ef} \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - \xi x)] \quad (1.5)$$

где  $\omega$  – частота,  $\xi$  – волновое число.

Подставляя выражения (1.5) в систему (1.1)–(1.4), находим дисперсионное соотношение, которое имеет вид биквадратного уравнения относительно  $\xi$

$$a_1 \xi^4 - (a_2 \omega^2 - i a_3 \omega) \xi^2 + a_4 \omega^4 - i a_5 \omega^3 = 0$$

$$a_1 = K_p m, \quad a_2 = m K_p \rho_2 \beta_2 + (1 - m)(m \rho^* - \epsilon \rho_2), \quad a_3 = b[1 + K_p \beta - (\epsilon + K_p \beta_1)] \quad (1.6)$$

$$a_4 = \rho_1 \rho_2 (1 - m)[\beta - \epsilon \beta_1], \quad a_5 = b \rho_0 [\beta - \epsilon \beta_1]$$

$$\rho_0 = \rho_{10}(1 - m_0) + \rho_{20} m_0, \quad \rho^* = \rho_{10} + (1 - m_0) \rho_{20} / m_0, \quad b = \mu m / k$$

Два решения  $\xi_{\pm}^2$  уравнения (1.6) характеризуют две различные продольные волны

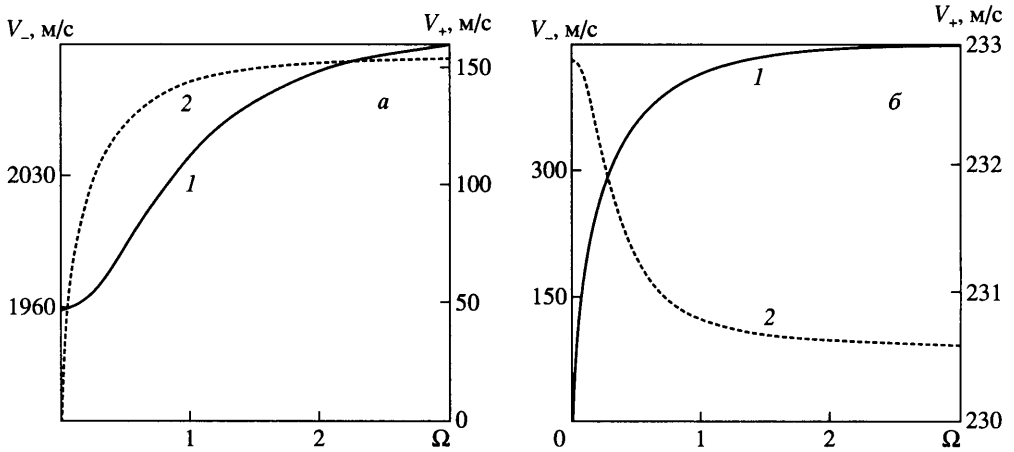
$$\xi_{\pm}^2 = \frac{(a_2 \omega^2 - i a_3 \omega) \pm \sqrt{(a_2 \omega^2 - i a_3 \omega)^2 - 4 a_1 (a_4 \omega^4 - i a_5 \omega^3)}}{2 a_1} \quad (1.7)$$

Для определения волны, характеризваемой решениями  $\xi_+^2$  и  $\xi_-^2$ , рассмотрим случаи водо- и газонасыщенной пористой среды, параметры которой указаны в таблице.

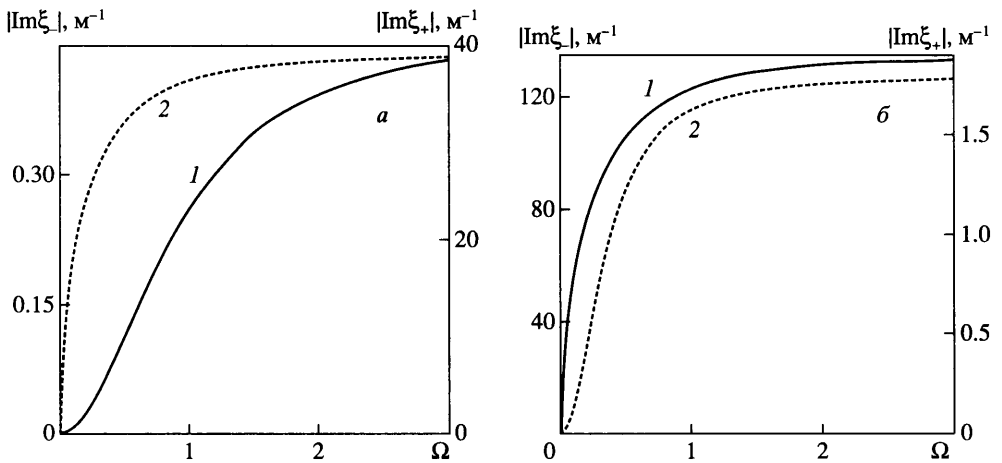
В случае водонасыщенной пористой среды волна, соответствующая решению  $\xi_-$ , обладает высокой скоростью (фиг. 1, а), малым коэффициентом затухания (фиг. 2, а) и почти синфазным (фиг. 3, а) движением вода – пористая матрица ( $\max \Delta \varphi \approx 25^\circ$  при  $\omega \approx \omega_c$ ). Это волна первого рода. Волна, соответствующая решению  $\xi_+$ , является сильнозатухающей медленной волной (фиг. 1, а и 2, а) – это волна второго рода. Насыщающая вода и пористая матрица движутся в противофазе (фиг. 3, а).

В газонасыщенной породе при заданных параметрах (см. таблицу) подобного разделения не наблюдается: волна  $\xi_-$  медленная в низкочастотном, но быстрая в высокочастотном диапазонах (фиг. 1, б). Ее скорость  $V_- \approx \sqrt{\omega / \omega_c} \rightarrow 0$  при  $\omega / \omega_c \rightarrow 0$ , а в высокочастотном пределе выходит на константу ( $\approx 460$  м/с). Затухание указанной волны велико (фиг. 2, б). Скорость волны  $\xi_+$  слабо зависит от частоты ( $V_+ \approx 232$  м/с, фиг. 1, а), а ее коэффициент затухания не велик (фиг. 2, б), и в высокочастотном пределе выходит на константу ( $\sim 1.6 \text{ м}^{-1}$ ).

Параметр  $\Delta \varphi^+$ , характеризующий относительное движение газа и пористой матрицы в продольных волнах Био, существенно зависит от частоты. На некоторой частоте происходит смена типа (фиг. 3, б) относительного движения газ–матрица в обеих волнах  $\xi_+$  и  $\xi_-$ . Например, волне  $\xi_-$  присуще синфазное движение газ–матрица на высоких ( $\omega \gg \omega_c$ ) частотах, но противофазное движение – на низких ( $\omega \ll \omega_c$ ).



Фиг. 1. Зависимости фазовых скоростей от нормированной частоты ( $\Omega = \omega/\omega_c$ ) для решений  $\xi_-$  (1) и  $\xi_+$  (2) для водонасыщенной (а) и газонасыщенной (б) пористой среды



Фиг. 2. Зависимости коэффициентов затухания  $|\text{Im}\xi_{\pm}|$  от нормированной частоты ( $\Omega = \omega/\omega_c$ ). Обозначения те же, что на фиг. 1

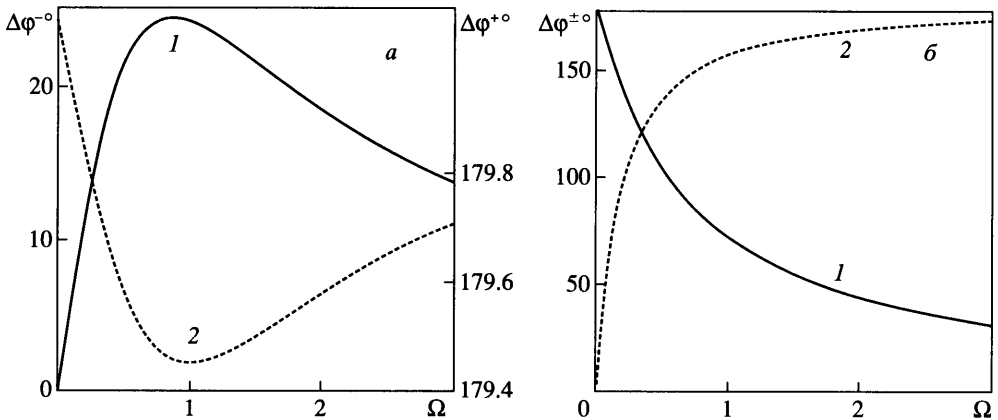
**2. Условие совпадения свойств волн Био первого и второго рода.** Рассмотрим возможность обращений в ноль детерминанта уравнения (1.6)

$$F(\omega) = (a_2\omega^2 - ia_3\omega)^2 - 4a_1(a_4\omega^4 - ia_5\omega^3) \quad (2.1)$$

$$\text{Re}F(\omega) = (a_2^2 - 4a_1a_4)\omega^4 - a_3^2\omega^2, \quad \text{Im}F(\omega) = 2\omega^3(2a_1a_5 - a_2a_3) \quad (2.2)$$

При частоте, отличной от нуля

$$\text{Im}F(\omega) = 0, \Rightarrow a_2a_3 = 2a_1a_5; \quad \text{Re}F(\omega) = 0, \Rightarrow \omega = \omega_* \equiv \frac{a_3}{\sqrt{a_2^2 - 4a_1a_4}} \quad (2.3)$$



Фиг. 3. Зависимости фазовой отстройки  $\Delta\phi^\pm$  относительного смещения насыщающего флюида и пористой матрицы от нормированной частоты ( $\Omega = \omega/\omega_c$ ). Обозначения те же, что на фиг. 1

Таким образом, если  $a_2a_3 = 2a_1a_5$ , то при “критической” частоте  $\omega = \omega_*$  биквадратное уравнение (1.6) имеет единственное решение ( $\xi_+ = \xi_-$ ), т.е. в пористой среде распространяется одна волна.

Поскольку параметры газа существенно зависят от давления, исследуем влияние порового давления на условия (2.3) в случае газонасыщенной пористой среды. Зафиксируем параметры пористой матрицы (см. таблицу) и положим, что среда насыщена газом с адиабатическим уравнением состояния

$$p = p_0 \left( \frac{U_0}{U} \right)^\gamma, \quad \rho_2 = \rho_{20} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \quad \beta_g = -\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial p} = (\gamma p_0)^{-1} \tag{2.4}$$

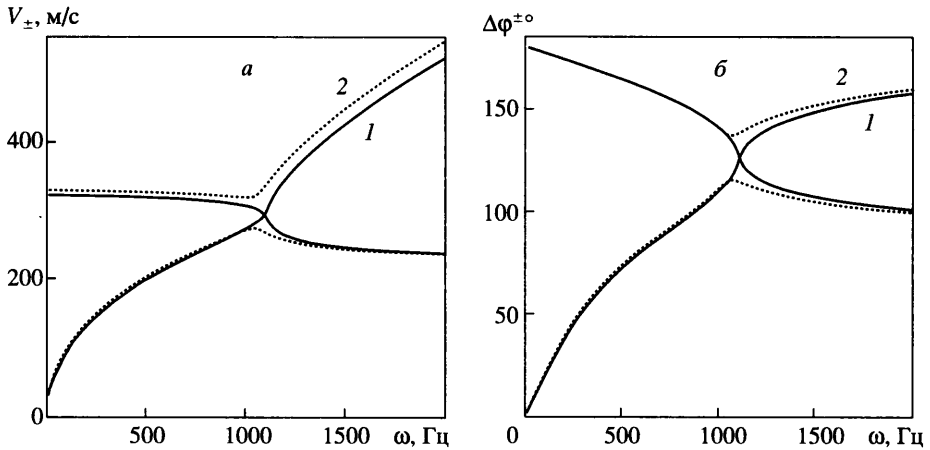
где  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $p$  и  $U$  – текущая величина давления и объема газа, нижним индексом “0” обозначено начальное состояние,  $\beta_g$  – сжимаемость газа.

Подставляя параметры пористой матрицы (см. таблицу) и выражение для сжимаемости газа (2.4) в соотношение  $a_2a_3 = 2a_1a_5$ , получаем оценку для критических значений  $P_* \approx 5.6 \cdot 10^6$  Па,  $\omega_* \approx 1074$  Гц,  $\rho_2^* \approx 5.3$  кг/м<sup>3</sup> и  $\beta_2^* \approx 4 \cdot 10^{-8}$  Па<sup>-1</sup>. При этом средняя сжимаемость  $\beta_* = (1 - m_0)\beta_1 + m_0\beta_2^* \sim 10^{-8}$ , т.е. перестройка характера продольных волн в газонасыщенной пористой среде происходит при условии  $K_p\beta \sim 1$ .

Указанная величина критического давления вполне достижима в условиях месторождений углеводородов, где поровое давление может быть весьма высоким и достигать нескольких сотен атмосфер.

Изменение характера частотных зависимостей скоростей продольных волн и относительного движения газ–пористая матрица при варьировании опорного давления относительно критической величины  $P_*$  продемонстрировано на фиг. 4.

$m_0$	$k_0, \text{м}^2$	$K_b, \text{Па}$	$\beta_1, \text{Па}^{-1}$	$\rho_{10}, \text{кг/м}^3$	$\beta_2, \text{Па}^{-1}$		$\rho_{20}, \text{кг/м}^3$		$\mu, \text{Па} \cdot \text{с}$	
					Вода	Газ	Вода	Газ	Вода	Газ
0.25	$1.8 \cdot 10^{-11}$	$10^8$	$2 \cdot 10^{-10}$	2500	$2 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	1000	2	$10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$



Фиг. 4. Изменение характера частотных зависимостей фазовых скоростей (а) и фазовой отстройки (б) при варьировании порового давления относительно критического значения  $P_* = 6 \cdot 10^6$  Па. Газонасыщенная среда:  $p_0 = 5 \cdot 10^6$  Па  $< P_*$  (линия 1),  $p_0 = 7 \cdot 10^6$  Па  $> P_*$  (линия 2)

При  $p_0 > P_*$  волна  $\xi_-$  является быстрой волной и характеризуется преимущественно синфазным движением газ – пористая матрица во всем диапазоне частот (фиг. 4, линии 2). При  $p_0 < P_*$  указанные свойства (фиг. 4, линии 1) присущи волне  $\xi_-$  только в области высоких частот ( $\omega > \omega_*$ ). В области низких частот это медленная волна, где газ и пористая матрица движутся в противофазе. Наоборот, в волне  $\xi_+$  при  $p_0 < P_*$  газ и пористая матрица в низкочастотной области движутся в фазе, а в высокочастотной – в противофазе.

В низкочастотном диапазоне фазовая скорость и коэффициент затухания пропорциональны корню от частоты для волны  $\xi_+$  при  $p_0 > P_*$ , а для волны  $\xi_-$  при  $p_0 < P_*$ . При этом  $\text{sign}(a_2 a_3 - 2a_1 a_5) = \text{sign}(p_0 - P_*)$ .

**3. Асимптотический анализ решений.** Проведем асимптотический анализ характеристик продольных волн Био в пределе высоких ( $\omega \gg \omega_*$ ) и низких ( $\omega \ll \omega_*$ ) частот, исходя из уравнения (1.6). Для упрощения рассмотрим случай “мягких грунтов”, что соответствует равенству нулю коэффициента сцементированности ( $\epsilon = 0$ ).

Исследуем также, какими параметрами пористой матрицы и насыщающего флюида определяется поведение волн, соответствующих решениям  $\xi_+$  и  $\xi_-$  в водо- и газонасыщенных пористых средах.

В пределе высоких частот  $\omega/\omega_* \rightarrow \infty$  решения уравнения (1.6) запишем в виде

$$(\xi_{\infty})_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{2a_1} \left\{ \left( a_2 - i\sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_4} \frac{\omega_*}{\omega} \right) \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_4} \sqrt{1 - 2i \frac{a_2 a_3 - 2a_1 a_5}{a_3 \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_4}} \left( \frac{\omega_*}{\omega} \right)} \right\} \quad (3.1)$$

При этом выражения для асимптотических значений фазовых скоростей и коэффициентов затухания принимают вид

$$V_{\pm}^2 \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} (V_{\pm}^{\infty})^2 = \frac{2a_1}{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_4}} \quad (3.2)$$

$$D_{\pm} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} D_{\pm}^{\infty} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{a_3 \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_4} \pm (a_2 a_3 - 2a_1 a_5)}{\sqrt{a_1} \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_4} \sqrt{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_4}}} \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) содержит комбинацию  $a_2a_3 - 2a_1a_5$ , которая в зависимости от соотношения параметров пористой матрицы и насыщающего флюида может быть как положительной, так и отрицательной.

Для водонасыщенной пористой среды  $a_2a_3 > 2a_1a_5$ , а для газонасыщенной при  $p_0 < P_*$  верно обратное  $a_2a_3 \leq 2a_1a_5$  (см. таблицу). Соотношение величин  $D_+$  и  $D_-$  определяются знаком указанной комбинации коэффициентов, причем  $D_+ > D_-$ , если  $a_2a_3 > 2a_1a_5$  и  $D_+ \leq D_-$ , если  $a_2a_3 \leq 2a_1a_5$ . Таким образом, волну с меньшим коэффициентом затухания для водонасыщенной пористой среды представляет решение  $\xi_-$ , а для газонасыщенной при  $p_0 < P_*$  решение  $\xi_+$ . Вязкость насыщающего флюида и проницаемость пористой матрицы на соотношение коэффициентов  $a_2a_3$  и  $a_1a_5$  не влияют.

Перейдем к анализу фазовых скоростей. Подставим коэффициенты  $a_i$  в выражение (3.2)

$$(V_{\pm}^{\infty})^2 = \frac{1}{\rho_2\beta_2} \frac{Z}{1+Z} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Z}{(1+Z)^2} A} \right]^{-1} \quad (3.4)$$

$$\rho^* = \rho_{10} + (1 - m_0)\rho_{20}/m_0, \quad Z = \frac{\rho_2}{(1-m)\rho^*} K_p \beta_2, \quad A = \frac{\rho_1}{m\rho^*} \frac{\beta}{\beta_2}$$

Если среда насыщена слабо сжимаемой, достаточно плотной жидкостью (в рассматриваемом случае – водой), то верны следующие оценки:

$$\frac{\rho_2}{(1-m)\rho^*} \approx \frac{\rho_1}{m\rho^*} \approx 1, \quad \frac{\beta}{\beta_2} \approx 1, \quad K_p \beta_2 \ll 1$$

Соответственно,  $Z \ll 1$  и  $ZA \ll 1$ .

По этим комбинациям можно проводить разложения в ряд Тейлора, сохранив только члены первого порядка малости

$$(V_{\pm}^{\infty})^2 \approx \frac{2K_p}{(1-m)\rho^*} \left[ 1 \pm \left\{ 1 - \frac{2\rho_1\rho_2}{m(1-m)\rho^{*2}} K_p \beta \right\} \right]^{-1} \quad (3.5)$$

Согласно (3.5), в высокочастотном пределе решение  $\xi_+$  определяет медленную волну, связанную с деформацией пористой матрицы, а решение  $\xi_-$  определяет быструю волну, связанную со сжимаемостью фаз:

$$(V_+^{\infty})^2 \approx \frac{K_p}{(1-m)\rho^*} \equiv C_*^2; \quad (V_-^{\infty})^2 \approx \frac{1}{\beta\rho_{\infty}} \equiv C_{\infty}^2, \quad \frac{1}{\rho_{\infty}} = \left[ \frac{m}{\rho_2} + \frac{1-m}{\rho_1} \right] \quad (3.6)$$

Если пористая среда насыщена хорошо сжимаемым воздухом, то  $K_2\beta \gg 1$ ,  $K_p\beta \gg 1$ , и плотность воздуха мала ( $\rho_2 \gg \rho_1$ ), т.е. априори неясно соотношение подкоренных слагаемых в (3.4).

Численная оценка в случае данных из таблицы и параметров воздуха при атмосферном давлении показывает, что  $K_p\beta_2 \approx 240$ ,  $K_p\beta \approx 59.5$ ,  $\rho_2/\rho_1 \approx 10^{-3}$ . Поэтому  $Z \approx ZA \approx 0.25$ .

Проведенное выше разложение в ряд Тейлора, вообще говоря, утрачивает силу, однако главным членом в подкоренных выражениях остается единица, и перестройки волнового механизма не происходит. Фазовые скорости равны соответственно  $V_-^{\infty} \sim 458.9$  м/с,

$V_+^{\infty} \sim 230.6$  м/с, что подтверждает результаты расчетов (фиг. 1, б).

Подчеркнем, что волна, связанная с деформацией пористой матрицы, в случае газонасыщенной пористой среды (при умеренном давлении) обладает более низким коэф-

фициентом затухания, чем волна, связанная со сжимаемостями фаз. Наоборот, для водонасыщенной пористой среды данная волна становится сильнозатухающей.

Выясним различный характер (фиг. 1–3) поведения волн  $\xi_+$  и  $\xi_-$  в водо- и газонасыщенных пористых средах в низкочастотном пределе ( $\omega/\omega_* \rightarrow 0$ ).

Представим решения уравнения (1.6) в виде

$$\xi_{\pm}^2 = i \frac{a_3}{2a_1} \omega \left\{ - \left( 1 + i \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - 4a_1a_4}} \frac{\omega}{\omega_*} \right) \mp \sqrt{1 + 2i \frac{a_2a_3 - 2a_1a_5}{a_3\sqrt{a_2^2 - 4a_1a_4}} \frac{\omega}{\omega_*}} \right\} \quad (3.7)$$

Для низкочастотного предела ( $\omega/\omega_* \rightarrow 0$ ) разложим в ряд Тейлора подкоренное выражение в (3.7) по малому параметру  $\omega/\omega_*$ . Сохраним члены вплоть до второго порядка малости. Тогда с учетом формулы (2.3) для критической частоты  $\omega_*$  получим

$$V_- \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} V_-^0 \approx \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \approx C_0^2 + \frac{K_p}{\rho_0} = C_0^2(1 + K_p\beta), \quad V_+ \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} V_+^0 \approx \frac{a_1}{a_3} \sqrt{\omega} \approx \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \frac{C_*}{\sqrt{1 + K_p\beta}} \quad (3.8)$$

$$\alpha = \frac{\mu}{(1 - m_0)k\rho_*}, \quad C_0^2 = (\beta\rho_0)^{-1}, \quad \rho_0 = \rho_{10}(1 - m_0) + \rho_{20}m_0$$

В насыщенной жидкостью пористой среде (где как правило  $K_p\beta \ll 1$ ), скорость  $V_-$  фактически равна  $C_0$ , т.е. решение  $\xi_-$  определяет волну, связанную со сжимаемостью фаз. В газонасыщенной пористой среде в силу высокой сжимаемости газа член  $K_p\beta \gg 1$ . Поскольку  $\rho_{20} \ll \rho_{10}$ , тогда  $\rho_0 \approx (1 - m_0)\rho_{10}$  и  $\rho_* \approx \rho_{10}$ , а скорость  $V_-^2 \approx K_p/\rho_0 \approx K_p/((1 - m_0)\rho_{10}) = C_*^2$ , т.е. волна определяется деформацией матрицы.

Для волны  $V_+$  наблюдается противоположная ситуация. В насыщенной жидкостью пористой среде  $K_p\beta \ll 1$  и  $V_+ \rightarrow C_*$  при  $\omega \approx \alpha$ . Для газонасыщенной среды  $V_+ \rightarrow C_0$  при  $\omega \approx \alpha$ , т.е. волна определяется уже сжимаемостями фаз.

Из (3.8) следует, что перестройка свойств волн происходит при условии  $K_p\beta \sim 1$ , что полностью согласуется с условием  $a_2a_3 = 2a_1a_5$  (см. разд. 2).

Решение  $\xi_+$  в области низких частот определяет волну, обладающую корневой зависимостью фазовой скорости от частоты.

Условие  $a_2a_3 = 2a_1a_5$  при этом является “пороговым” – если  $a_2a_3 > 2a_1a_5$ , то свойства продольных волн сохраняются постоянными во всем частотном диапазоне (фиг. 1, а, 2, а, 3, а), а если  $a_2a_3 < 2a_1a_5$ , то на определенной частоте свойства волн меняются (фиг. 1, б, 2, б, 3, б).

В частности, при  $a_2a_3 < 2a_1a_5$  характер относительного движения насыщающий флюид – пористая матрица в обеих продольных волнах меняется при переходе от низкочастотного ( $\omega/\omega_* \ll 1$ ) к высокочастотному ( $\omega/\omega_* \gg 1$ ) пределу (фиг. 3, б).

Физически перестройка волновых характеристик объясняется изменением характера движения флюида в поровом пространстве. Действительно, реализация волны, связанной со значительной деформацией матрицы (волны второго рода [3]), в полностью водонасыщенной породе возможна только при интенсивных перетоках жидкости между порами (противофазное движение матрицы и насыщающего флюида). Действующее при этом затухание по Дарси приводит к сильному затуханию данной волны.

В газонасыщенной породе ситуация иная – сжимаемость газа велика, и для обеспечения деформации матрицы не обязательно его перемещение из одних пор в другие – газ сожмется. Данный процесс характеризуется синфазным движением насыщающего газа и матрицы – “волна по матрице” становится слабозатухающей. На высоких частотах ( $\omega > \omega_*$ ) преобладают силы инерции и газ сжаться не успевает.



Определим частоту  $\omega_i$ , при которой фазовые скорости в газонасыщенной пористой среде равны (фиг. 1, б). Исходя из равенства  $\text{Re}[\xi_+] = \text{Re}[\xi_-]$  решений (1.7) получим

$$4ACG = C^2 + 4BG^2 \quad (3.9)$$

$$A = a_2\omega^2, \quad B = (a_2^2 - 4a_1a_4)\omega^4 - a_3^2\omega^2, \quad C = 2(2a_1a_5 - a_2a_3)\omega^3, \quad G = -a_3\omega$$

Из (3.9) следует

$$\omega_i^2 = \frac{a_3^4}{4(a_1a_5)^2 - (a_2a_3)^2 + a_3^2[a_2^2 - 4a_1a_4]} \quad (3.10)$$

Причем, если выполнено условие  $a_2a_3 = 2a_1a_5$ , то формула (3.10) совпадает с (2.3), т.е. искомая частота равна  $\omega_i = \omega_*$ .

Для параметров среды, приведенных в таблице (газ предполагается при атмосферном давлении  $p_0 = 10^5$  Па),  $\omega_i = 19079.5$  Гц, а нормированная частота  $\Omega_i = \omega_i/\omega_c \sim 0.153$  (см. фиг. 1, б).

**Заключение.** Для газонасыщенной пористой среды относительное движение газа и пористой матрицы в продольных волнах существенно зависит от частоты. При некоторой частоте происходит смена типа относительного движения газ–пористая матрица в обеих продольных волнах. Если волне присуще синфазное движение газ – пористая матрица в области низких частот, то на высоких частотах эта волна характеризуется практически противофазным движением газа и пористой матрицы.

Перестройка волновых характеристик объяснена изменением характера движения флюида в поровом пространстве. Обосновано, что волна, связанная с деформацией матрицы (волна второго рода по терминологии [3]), обладает высоким коэффициентом затухания в насыщенной слабосжимаемой жидкостью (в рассматриваемом случае – водой) пористой среде и низким коэффициентом затухания в газонасыщенной среде.

Доказано, что при определенном соотношении параметров пористой среды и насыщающего флюида существует “критическая” частота, на которой обе продольные волны обладают идентичными свойствами. Для нее получено аналитическое выражение через параметры среды.

В случае адиабатического процесса в газе получена оценка пороговой величины сжимаемости, необходимой для перестройки структуры волнового процесса. Путем численных расчетов продемонстрировано изменение частотных зависимостей скоростей продольных волн и относительного движения газа – пористая матрица при варьировании порового давления относительно порогового значения.

Автор выражает искреннюю благодарность В.Н. Николаевскому за полезные обсуждения и ценные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. 1944. Т. 8. № 4. С. 133–150.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated solid. I. Low frequency range // J. Acoust. Soc. America. 1956. V. 28. P. 168–178. II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. America. 1956. V. 28. P. 179–191.
3. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 447 с.
4. Терцаги К. Теоретическая механика грунтов. М.: Стройиздат, 1961. 507 с.
5. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
6. Dunin S.Z., Mikhailov D., Nikolaevskiy V. P-waves in realistic formations: gas bubbles effect // Proc. 2nd Biot Conf. Poromechanics. II. Grenoble, France, 2002. Lisse: Swets and Zeitlinger B.V., 2002. P. 633–638.

7. *Smeulders D.M.J.* On wave propagation in saturated and partly saturated porous media. PhD Thesis. Eindhoven: Techn. University, 1992. 130 p.
8. *Smeulders D.M.J., van Dongen M.E.H.* Wave propagation in porous media containing a dilute gas-liquid mixture: theory and experiment // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 343, P.351–373.
9. *Bedford A., Stern M.* A model for a wave propagation in gassy sediments // *J. Acoust. Soc. America.* 1983. V. 73. № 2. P. 409 – 417.
10. *Логинов К.И., Верецагина Т.Н., Логинов И.В.* Нелинейные акустические свойства пористых проницаемых флюидонасыщенных сред // *Физические основы сейсмического метода. Нетрадиционная геофизика / Ред. Николаев А.В., Галкин И.П.* М.: Наука, 1991. С. 134–143.
11. *Nakagawa K., Soga K., Mitchell J.K.* Observation of Biot compressional wave of the second kind in granular soils // *Geotechnique.* 1997. V. 47. № 1. P.133–147.
12. *Van der Grinten J.G.M.* An experimental study of shock-induced wave propagation in dry, water-saturated, and partially saturated porous media. Ph.D. Thesis. Eindhoven: Univ. Technology, 1987. 180 p.

Москва

Поступила в редакцию  
2.II.2005