

УДК 532.546:517.53

© 2006 г. Ж. Э. Р. МУАНГУ

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗ КАНАЛА. СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ И ОЦЕНКА РАСХОДА

Методами функционального анализа исследованы проблемы, возникающие при расчете фильтрации грунтовых вод из земляного канала, рассмотрена задача об оценке фильтрационных потерь. Предложены новые идеи, позволяющие преодолеть трудности, связанные с решением вариационных задач о фильтрации из каналов. Получена точная (не улучшаемая) оценка сверху фильтрационных потерь из земляных каналов, найдена соответствующая оптимальная форма канала среди всех каналов, имеющих заданную длину контура поперечного сечения.

Ключевые слова: фильтрация из канала, функция течения, однолиственность решения, степень подпора, оценка расхода, оптимальная форма канала, вариационный метод.

Рассматривается фильтрация из земляного канала. Фильтрационные потери из каналов могут достигать 50% подаваемой воды, что существенно снижает эффективность оросительных систем. Поэтому важны задачи оптимизации контуров каналов и оценки возможных потерь при различных гидрологических условиях. Оценки фильтрационных потерь из канала заданной площади поперечного сечения снизу впервые получены в [1]. Впоследствии был разработан ряд топологических методов, которые позволяют делать выводы о характере течения и давать качественные оценки фильтрационных потерь [2–4], но новые точные оценки не были найдены, если не считать тривиальную оценку $Q \geq kb$ [3], где Q – потери, b – ширина дна канала, K – коэффициент фильтрации.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу об установившейся фильтрации несжимаемой жидкости из канала в однородном изотропном несжимаемом грунте. При таких допущениях процесс фильтрации описывается законом Дарси и уравнением неразрывности:

$$\mathbf{V} = -k \text{grad}(h), \quad h = \frac{P - P_a}{\rho g} + y, \quad \text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{V} – скорость фильтрации, k – коэффициент фильтрации, h – напор, P_a – атмосферное давление, ρ – плотность, y – вертикальная координата.

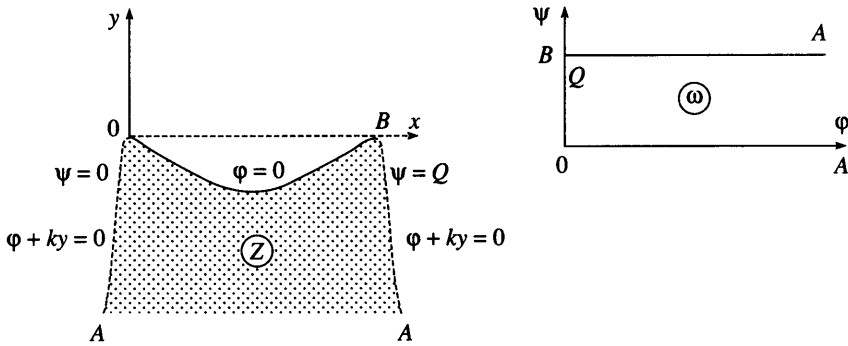
Область фильтрации в рассматриваемой задаче ограничена границей водоема и свободной поверхностью – линией депрессии, которая представляет границу между грунтами, заполненными жидкостью и воздухом (фиг. 1). Поэтому вдоль нее давление считают равным атмосферному, и она должна быть линией тока.

$$P = P_a, \quad V_n = 0 \quad (1.2)$$

Линия свободной поверхности заранее неизвестна. Одной из важнейших задач теории движения грунтовых вод является ее определение.

На границе водоема (дренажа). Требуется равенство нулю касательной составляющей скорости (условие протекания)

$$V_T = 0 \quad (1.3)$$



Фиг. 1. Постановка задачи; Z – физическая плоскость, ω – область комплексного потенциала

Из (1.1) в силу (1.3) следует, что вдоль границы напор $h = \text{const}$, т.е. давление распределяется по гидростатическому закону. Так и есть всякий раз при больших размерах водного бассейна, когда скорость истечения можно считать малой. В дальнейшем ради математического описания будем называть границей водоемов (дренажей) любой контур, вдоль которого выполнено условие (1.3). Эти границы либо должны быть известны (задано уравнение контура), либо задано еще одно условие. Например: распределение скоростей, эпюр давления, информация о том, что контур обладает данным оптимальным свойством...

Скорость на бесконечности будем считать конечной и направленной вниз. Тогда оказывается (это будет доказано), что скорость на бесконечности либо равна нулю (фильтрация с подпором), либо равна коэффициенту фильтрации (фильтрация без подпора).

Согласно уравнению (1.1) скорость фильтрации имеет потенциал $\varphi(x, y) = -kh$, который является гармонической функцией. Область определения φ – область фильтрации Z будем считать односвязной. Физически это означает, что не допускаем существования источников и твердых тел (стенки).

Гармоническая функция $\varphi = \varphi(x, y)$ в односвязной области Z имеет гармоническую сопряженную $\psi = \psi(x, y)$, связанную с $\varphi(x, y)$ условиями Коши – Римана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Пусть (U, V) – компоненты вектора скорости фильтрации, тогда

$$d\varphi = Udx + Vdy; \quad d\psi = -Vdx + Udy$$

$$d\varphi = V_\tau ds; \quad d\psi = V_n ds$$

где перемещение $ds = (dx, dy)$ направлено по τ и (τ, n) – ортонормированный базис. Объемный расход жидкости через произвольную линию AB равен

$$Q = \int_{AB} V_n ds = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$$

и не зависит от формы кривой AB . С помощью функций ψ условия на свободной поверхности и границе водоема запишем в виде

$$\varphi + ky = 0, \quad \psi = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}$$

Задача решена, если найдем комплексный потенциал $w(z) = \varphi + i\psi$, $z = x + iy$. Так как распределения скорости и давление выражаются через него

$$V = \frac{dw}{dz}, \quad \frac{P - P_a}{\rho g} = -\text{Im}\left(z + \frac{iw}{k}\right)$$

Рассмотрим фильтрацию в области ограниченной двумя депрессионными кривыми OA , BA и линией равного потенциала OB (фиг. 1). Эта область заранее неизвестна ввиду наличия свободных границ AO и AB , подлежащих определению.

Не ограничивая общность, будем считать скорость фильтрации $k = 1$, полный расход $Q = \pi$, удельный вес $\rho g = 1$ (можно, таким образом, выбирать масштаб трех основных единиц измерений). А примем далее атмосферное давление $P_a = 0$. Для построения решения воспользуемся функцией Жуковского $\theta = z + iw$, которая в безнапорной задаче фильтрации характеризует давление ($-P = \text{Im}(\theta)$), и являясь гармонической функцией, принимает нулевое значение на линии депрессии.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} = 0; \quad P(\psi = 0) = P(\psi = \pi) = 0 \quad (1.4)$$

Решая задачу (1.4) методом разделения переменных, находим

$$P(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{n\varphi} - a_n e^{-n\varphi}) \sin n\psi \quad (1.5)$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{nw} + a_n e^{-nw}) + \frac{a_0}{2}$$

$$z(w) = -iw + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{nw} + a_n e^{-nw}) \quad (1.6)$$

Подобное выражение было получено методом функциональных уравнений в (5). Данная формула более адаптирована для фильтрации, ограниченной двумя свободными поверхностями. Все a_n , b_n действительны и из условий при $y \rightarrow -\infty$ скорость конечна, а $V_y < 0$ следует, что $b_1 \leq 0$; $b_n = 0$ при $n > 1$. Действительно

$$\frac{dz}{dw} = -i + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n b_n \tau^n - n \frac{a_n}{\tau^n} \right), \quad \tau = e^w$$

Из конечности V_∞ следует, что бесконечно удаленная точка не должна быть существенно особой точкой, а потому главная часть – полином некоторой степени N . Тогда

$$\frac{dz}{dw} \approx N b_N \tau^N; \quad \tau \rightarrow \infty \Rightarrow \arg\left(\frac{dz}{dw}\right) \approx \arg b_N + N \arg \tau$$

$$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right) \in (\arg(b_N), \arg(b_N) + N\pi)$$

Поскольку скорость V_∞ направлена вниз, то этот интервал содержится в $(\pi; 2\pi)$, что возможно, только если $b_N \leq 0$ и $N = 1$. Итак, полагая $C = -b_1$, получаем

$$z(w) = -iw + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nw} - C e^w; \quad C \geq 0 \quad (1.7)$$

Функция $z(w)$ в форме (1.7) определяет комплексный потенциал $w(z)$ и удовлетворяет граничным условиям на линии депрессии для нефиксированного профиля канала. Коэффициенты a_n должны определяться из уравнения профиля или условия, определяющего его. Формула (1.7) для комплексного потенциала без оценки $C \geq 0$ получится, если вместо условий на V_∞ принять однолиственность функции Жуковского или годографа скоростей. Для этого, как известно из теорий функций комплексного переменного, точка $\tau = \infty$ должна быть полюсом порядка не выше первого, следовательно, $b_n = 0$, $n > 1$. Так как контур канала линия равного потенциала $\phi = 0$, то из (1.7) получаем параметрические уравнения контура:

$$\begin{aligned} x(\psi) &= \psi + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\psi - C \cos \psi \\ y(\psi) &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\psi - C \sin \psi \end{aligned} \quad 0 \leq \psi \leq \pi \quad (1.8)$$

Функции $x(\psi)$, $y(\psi)$ называются эпюрами просачивания, их естественно считать элементами пространства Соболева $H^1(0, \pi)$.

При заданном в (1.8) $x(\cdot)$ или $y(\cdot)$ a_n находим как коэффициенты Фурье:

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x(t) - t) \cos t dt + C, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x(t) - t) \cos nt dt, \quad n \neq 1 \quad (1.9)$$

или

$$a_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(t) \sin t dt - C, \quad a_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(t) \sin nt dt, \quad n > 1 \quad (1.10)$$

Подставляя эти выражения в (1.7) и учитывая [6], что

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-nw} \cos mt &= \frac{shw}{chw - cost} \\ 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-nw} \sin mt &= \frac{\sin t}{chw - cost} \end{aligned} \quad \operatorname{Re}(w) > 0 \quad (1.11)$$

получим интегральные представления функции течения $z(w)$.

$$z(w) = -iw + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi shw \frac{x(t) - t}{chw - cost} dt - 2Cshw \quad (1.12)$$

или

$$z(w) = -iw - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin ty(t)}{chw - cost} dt - 2Cchw + \frac{a_0}{2}$$

Аналог первой из этих формул был получен в [7] методом обратных краевых задач.

Вместо формы ОВ контура канала априори задается одна из функций $x(t)$, $y(t)$ как “инструмент управления фильтрацией”. Между ними существует связь, которую можно

выразить, введя в $L_2(0, \pi)$ линейный полуунитарный [8] оператор A , положив по определению

$$A(\cos nt) = \sin nt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.13)$$

$$(AA^* = E, A^*A = E - P) \quad (1.14)$$

Здесь E – единичный оператор, P – оператор проектирования на $\text{Ker}A = \{1\}$.

Пусть $f, g \in L_2(0, \pi)$, $R(t) = \sqrt{[(\cos t - \cos a)(\cos t - \cos b)]}$, тогда следующие утверждения эквивалентны [9]

$$g = A(f), \quad g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t f(s)}{\cos s - \cos t} ds$$

$$\int_a^b \frac{g(t)}{R(t)} dt = \int_0^a \frac{f(t)}{R(t)} dt - \int_b^\pi \frac{f(t)}{R(t)} dt, \quad \forall (a, b) \subset (0, \pi) \quad (1.15)$$

$$\left[\int_0^a - \int_b^\pi \frac{\sin t f(s)}{\pi(\cos s - \cos t) R(s)} ds - \int_a^b \frac{\sin t g(s)}{\pi(\cos s - \cos t) R(s)} ds \right] R(t) =$$

$$= \begin{cases} g(t), & t \in (0, a) \\ f(t), & t \in (a, b), \quad 0 < a < b < \pi \\ -g(t), & t \in (b, \pi) \end{cases}$$

Система (1.8) допускает компактную запись

$$y = A(t - x) - 2C \sin(t) \quad (1.16)$$

Это важнейшее соотношение называется далее уравнением связи. Коэффициент C определяет характер течения на бесконечности, что видно из асимптотики, вытекающей из (1.7):

$$z(w) \approx -iw - Ce^w, \quad w \rightarrow \infty \quad (1.17)$$

При $C \neq 0$ скорость на бесконечности $V_\infty = 0$ – имеем течение с подпором; при $C = 0$ $V_\infty = k = 1$ (k – коэффициент фильтрации) – течение без подпора [5]. Будем называть C степенью подпора.

Как в задаче об обтекании тел задача фильтрации из канала в грунте бесконечной мощности (течение с подпором) содержит неопределенный параметр (см. ниже). Целесообразно использовать асимптотическое соотношение (1.17), чтобы выразить неизвестный параметр через степень подпора C . Рассмотрим для этого простые примеры.

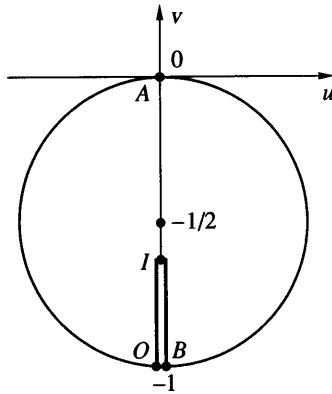
В случае плоского бесконечно тонкого горизонтального канала ($y = 0$) характеристическая функция согласно (1.12) имеет вид

$$z(w) = -iw - 2Cch(w)$$

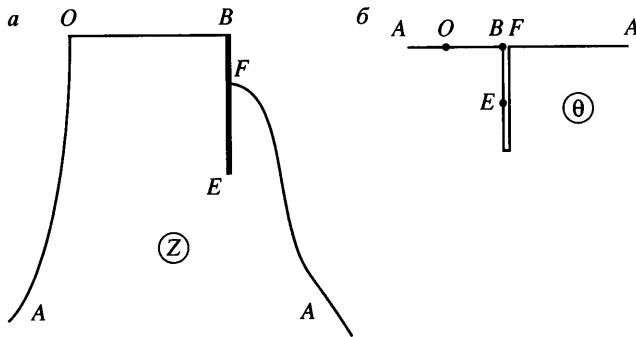
Для фильтрации без подпора ($C = 0$)

$$z = -iw, \quad \theta \equiv 0, \quad \frac{dz}{dw} = -i, \quad P = P_a, \quad V = k$$

т.е. давление и скорость всюду внутри потока величины постоянные, при этом эпюра просачивания $x(\psi) = \psi$, а ширина дна канала $B = \pi$. При $C \neq 0$ область функции Жуков-



Фиг. 2. Годограф скоростей бесконечно тонкого плоского горизонтального канала



Фиг. 3. Обтекание непроницаемой шпунтовой завесы: *a* – физическая плоскость, *б* – область функции Жуковского

ского есть нижняя полуплоскость $\text{Im}(\theta) \leq 0$ (фиг. 2), а минимальная скорость вдоль контура канала и расход определяются формулами

$$v_{\min} = \frac{1}{1+2C}, \quad Q = \frac{KB}{1+4C} \tag{1.18}$$

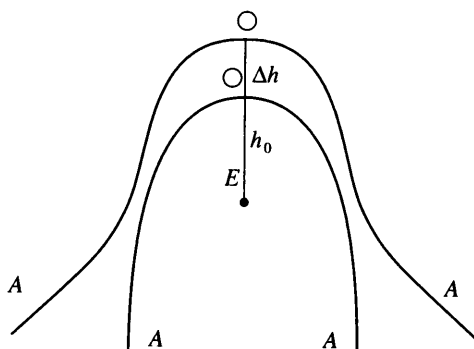
При том же расходе ($Q = \pi$) ширина канала увеличивается: $B = \pi + 4C$. Депрессионные кривые поднимаются и тем выше, чем больше величина C .

Далее поместим внутри потока вертикальный шпунт. Если это обстоятельство безразлично для фильтрации без подпора, то при наличии подпора получаем задачу об обтекании непроницаемой завесы. На области функции Жуковского появляется вертикальный разрез (фиг. 3), характеристическая функция и сила давления на шпунте выражаются формулами ($BF = \delta$).

$$z(w) = -iw - 2C\sqrt{(chw + 1)(chw + ch\delta)}$$

$$F = 2C \int_0^{\delta} \sqrt{(ch\delta - ch\varphi)(ch\varphi - 1)} d\varphi = 4C \left(-\text{sh} \frac{\delta}{2} + \text{ch}^2 \frac{\delta}{2} \arctg \frac{\delta}{2} \right)$$

Таким образом можно говорить о степени подпора C как о величине, характеризующей давление на шпунте.



Фиг. 4. Схема фильтрации из источника, без подпора и с подпором

В случае фильтрации из источника при отсутствии подпора ($C = 0$) характеристическая функция $z(w)$ получается из (1.7) при следующих условиях

$$z(w) = -iw - \pi/2 + \arcsin(e^{-w})$$

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1} C_{-1/2}^n, \quad C = 0$$

Область комплексного потенциала (w): $0 < \text{Im}(w) < \pi$. Начало координат в физической плоскости (z) взято в наивысшей точке потока (фиг. 4). Точка $z = -i\ln(2)$ (образ $w = -\infty$) единственная особая точка внутри потока для функции $z(w)$, простой полюс с вычетом $1/2$. Иными словами, если в однородной среде с коэффициентом фильтрации $K = 1$ и степенью подпора $C = 0$ поместить источник с интенсивности $Q = \pi$, то вода поднимется на высоту $h_0 = \ln 2$.

При наличии подпора ($C \neq 0$) функция течения будет

$$z = -iw - \pi/2 + \arcsin(e^{-w}) - C\sqrt{e^{2w} - 1}$$

При этом уровень поднятия будет больше

$$h = \lim_{w \rightarrow -\infty} |z| = \ln 2 + c, \quad \Delta h = h - h_0 = C$$

$$C = \ln 2 \frac{\Delta h}{h_0} \tag{1.19}$$

Величина C априори не зависит от интенсивности источника Q и коэффициента фильтрации k , поскольку из них нельзя составить безразмерный параметр, а зависит только от геометрии среды на бесконечности.

2. Оптимизация. Для практики важна задача о построении контура, обладающего некоторыми заданными свойствами (например, свойством оптимальности). При оптимизации задается интегральный критерий, а объект (в данном случае форма канала) определяется в ходе решения наравне с полем фильтрационных параметров.

Задача оптимизации формы канала была решена в классе произвольных профилей для различных схем течения [7]. В качестве критерия выбирался фильтрационный расход Q , а изопериметрическим ограничением была площадь поперечного сечения S , при этом как сам контур OB , так и свободные границы AB и AO (фиг. 1) отыскивались в процессе решения. В результате для потерь была найдена оценка снизу.

В данной статье решена подобная задача, когда в качестве изопериметрического ограничения фиксирована длина L поперечного сечения контура. Это позволяет найти для по-

тери оценку сверху. Не легко подобрать критерии ограничения, которые обеспечивали бы решение задачи [8]. К тому же все фильтрационные задачи оптимизации могут трактоваться как оценочные лишь в том случае, если найдены глобальные экстремали [9].

По принципу обратимости задача допускает следующую формализацию:

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \rightarrow \text{extr}, \quad y = A(t - x) \quad (2.1)$$

Т. е. среди всех каналов, имеющих расход $Q = \pi$ в среде с $k = 1$ и степенью подпора $C = 0$ найти тот, для которого длина контура максимальна.

Решение $x(t)$ или $y(t)$ естественно искать в пространстве $KC^1(0, \pi)$, тем не менее будем решать задачу в соболевском пространстве $H^1(0, \pi)$.

Продифференцируем второе равенство из (2.1) и скалярно умножим на $\cos(nt)$. Получим с учетом $A \cos(nt) = \sin(nt)$:

$$\dot{y} = -A^*(1 - \dot{x}), \quad \int_0^{\pi} \dot{y} \cos(nt) dt = - \int_0^{\pi} (1 - \dot{x}) \sin(nt) dt$$

отсюда

$$\int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \int_0^{\pi} \dot{x} \sin(nt) - \dot{y} \cos(nt) dt \quad (2.2)$$

Введем полярные координаты $r > 0$ и $\theta \in (0, 2\pi)$ по формулам

$$\dot{x} = r \sin \theta, \quad \dot{y} = -r \cos \theta$$

Из (2.1) и (2.2) получим

$$L = \int_0^{\pi} r dt, \quad \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \int_0^{\pi} r \cos(nt - \theta) dt \quad (2.3)$$

$$n = 1: \int_0^{\pi} \sin t dt = \int_0^{\pi} r \cos(t - \theta) dt \leq \int_0^{\pi} r dt = L$$

Т.е. $2 \leq L$ (знак равенства имеет место при $\theta \equiv t$), это означает, что

$$2Q/K\pi \leq L, \quad Q \leq (\pi/2)KL \quad (2.4)$$

Оценка (2.4) глобальная, верная для всех каналов. Она позволяет оценить расход при заданной длине контура. Остается показать, что она не улучшаемая, т.е. существует реальный канал, для которого (2.4) превращается в равенство.

Положим в (2.3) $\theta = t$ и представим

$$\sin(nt) = \sin t \cos(n-t)t + \cos t \sin(n-1)t = \sin t \cos(n-1)t + \cos t A \cos(n-1)t$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt &= \int_0^{\pi} (\sin t \cos(n-1)t + \cos t A \cos(n-1)t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} (\sin t + A^* \cos t) \cos(n-1)t dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.5) в силу полноты системы $\{\cos(n-1)t\}$; $n = 1, 2, \dots$ находим $r = \sin t + A^* \cos t$
Вычисления дают

$$A^* \cos t = -\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cos t \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

$$\dot{x} = \left(-\frac{2}{\pi} + \sin t + \frac{2}{\pi} \cos t \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right) \sin t \quad (2.6)$$

$$\dot{y} = -\left(-\frac{2}{\pi} + \sin t + \frac{2}{\pi} \cos t \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right) \cos t$$

Интегрируя, получим параметрические уравнения контура

$$x = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\cos t}{\pi} + \frac{\sin^2 t}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$y = \frac{2 \sin t}{\pi} - \frac{\sin^2 t}{2} - \frac{2}{\pi} \int_0^t \cos^2 t \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \quad (2.7)$$

что имеет вид в каноническом представлении (1.8)

$$x(\psi) = \psi + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(2n-1)\psi}{(2n-1)^2(2n+1)}$$

$$y(\psi) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(2n-1)\psi}{(2n-1)^2(2n+1)}$$

Найдем параметры канала: ширину B , глубину H , площадь сечения S .

$$B = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}, \quad H = \frac{2G-1}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad S = \frac{7\zeta(3)}{4\pi} + \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2\pi}, \quad L = 2$$

где $G = 0.915965\dots$ – постоянная Каталана, $\zeta(3) = 1.202056$.

При наличии подпора ($C \neq 0$) аналогично изложенному для параметров канала имеем

$$B' = B + 2C, \quad H' = H + C, \quad S' = S + \frac{\pi C^2}{2} + 2C, \quad L' = L + \pi C$$

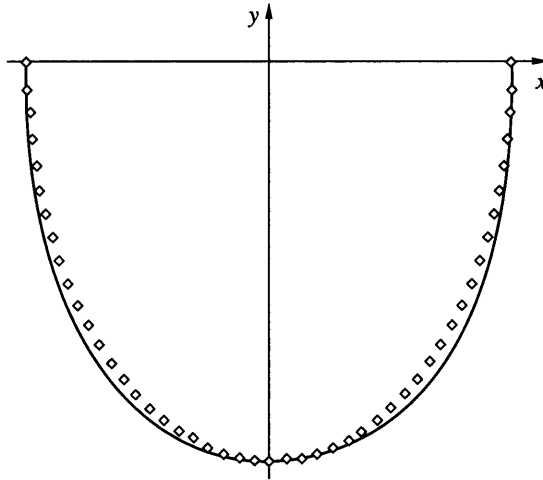
В размерных величинах получим

$$B = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right) \frac{Q}{K}, \quad H = \left(\frac{2G-1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) \frac{Q}{K}, \quad S = \left(\frac{7\zeta(3)}{4\pi^3} + \frac{1}{8\pi} - \frac{3}{2\pi^3} \right) \frac{Q^2}{K^2}, \quad L = \frac{2Q}{\pi K}$$

$$B' = B + \frac{2CQ}{\pi K}; \quad H' = H + \frac{CQ}{\pi K}; \quad S' = S + \frac{\pi C^2 + 4CQ^2}{2\pi^2 K^2}; \quad L' = L + \frac{CQ}{K}.$$

Для построения примера фильтрации из канала достаточно взять кусочно-гладкую функцию $x(t) \in KC^1(0, \pi)$, удовлетворяющую условию $0 \leq x'(t) \leq 1$ и положить

$$z(w) = -iw + \frac{\operatorname{sh} w}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x(t) - t}{\operatorname{ch} w - \cos t} dt$$



Фиг. 5. Канал с максимумом потер при заданной длине дуги контура (квазиэллипс)

Это будет функцией течения для бесподпорной фильтрации из канала с расходом $Q = \pi$ в среде с коэффициентом фильтрации $k = 1$. Условие $0 \leq x'(t)$ обеспечивает однолистность решения, а из условия $x'(t) \leq 1$ следует $y(t) < 0$, что соответствует обычной форме канала. Канал, определенный таким образом, предложено называть нормальным (фиг. 5).

Все встречающиеся на практике каналы, а также исследованные раньше другими авторами принадлежат к этому классу. Например, каналы трапецевидного сечения, каналы Козени, каналы Преисманна и др. Для того чтобы канал был нормален, необходимо и достаточно, чтобы область годографа лежала в нижней полуплоскости вне окружности $u^2 + v(v + 1) = 0$ (фиг. 2).

Рассмотрим существование и единственность решения задачи о фильтрации из канала. Если кривая $y = f(x)$, $x \in (0; B)$ такая, что $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем, меньшим 1, $f(0) = f(B) = 0$, то оно представима единственным образом при заданном c в виде параметрического уравнения

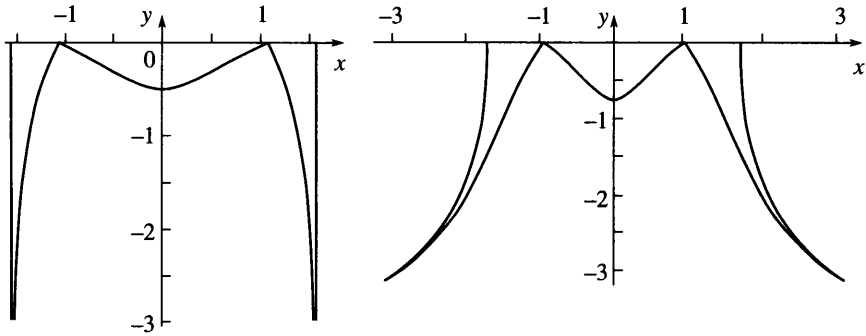
$$x(\psi) = \frac{\psi}{k} + \frac{Q}{k\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos \frac{n\pi\psi}{Q} - C \cos \frac{\pi\psi}{Q} \right), \quad \psi \in (0; Q)$$

$$y(\psi) = -\frac{Q}{k\pi} \left(\sum a_n \sin \frac{n\pi\psi}{Q} - C \sin \frac{\pi\psi}{Q} \right)$$

С помощью этого представления показано, что область фильтрации любого канала с потерей Q лежит внутри области фильтрации плоского горизонтального канала с той же потерей, и на бесконечности все картины течения совпадают (фиг. 6).

Линии свободных поверхностей настолько быстро приближаются к асимптотам, что площади σ_1 и σ_2 , ограниченные ими, конечны

$$\sigma_1 = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}; \quad \sigma_2 = C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{n}$$



Фиг. 6. Асимптотическое поведение линий депрессии при фильтрации без подпора (а) и с подпором (б)

Для площади поперечного сечения канала имеем

$$\sigma = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2} a_n (\Psi_n + a_n) + \frac{\pi C^2}{2} + 2C \left(\Psi = \frac{\Psi_0}{2} + \sum \Psi_n \cos n\Psi \right)$$

где Ψ_n – коэффициенты Фурье функции Ψ .

Среди каналов, имеющих заданную площадь сечения σ и потерю Q , найти тот, для которого область фильтрации наиболее узка. Эта задача возникает при отводе грязных вод, при желании как можно меньше портить окружающую среду.

Меньшая область фильтрации означает большую область дополнения $(\sigma_1) + (\sigma_2)$. Задача допускает следующую формализацию.

$$2C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n} a_n \rightarrow \max$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2} \left(a_n + \frac{\Psi_n}{2} \right)^2 = \frac{7\zeta(3)}{4\pi} + \frac{\pi C^2}{2} + 2C - \sigma$$

Положив

$$\eta = \left\{ \sqrt{\frac{n\pi}{2}} \left(a_n + \frac{\Psi_n}{2} \right) \right\}; \quad \varepsilon = \left\{ \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n\sqrt{n\pi/2}} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

где η и ε принадлежат l_2 , перепишем задачу в виде

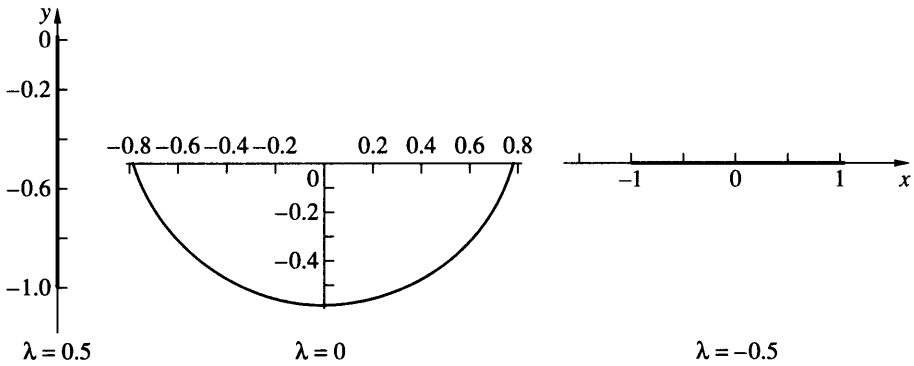
$$(\varepsilon, \eta) \rightarrow \max, \quad \|\eta\|^2 = \frac{7\zeta(3)}{4\pi} + \frac{\pi C^2}{2} - 2C - \sigma$$

Это и есть известная задача о нахождении максимума линейного функционала на сфере и гильбертовом пространстве.

Максимум достигается, когда $\eta = \lambda \varepsilon$, где $\lambda \geq 0$. Таким образом, находим неизвестные a_n и параметрические уравнения искомого контура канала.

$$x(\Psi) = \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \Psi - C \cos \Psi, \quad \Psi \in (0, \pi)$$

$$y(\Psi) = - \frac{1 + 2\lambda}{\pi} \int_0^{\Psi} \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt - C \sin \Psi \tag{2.8}$$



Фиг. 7. Идеальные каналы

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} + \frac{(1/2)\pi C^2 + 2C - \sigma}{7\zeta(3)}\pi \tag{2.9}$$

В задаче о поливе, наоборот, требуется, чтобы область фильтрации была как можно шире. Решая подобную задачу на минимум, получим решение в таком же виде (2.8), (2.9) с той лишь разницей, то здесь $\lambda < 0$.

Нормальные кривые вида (2.8) (при $c = 0$) будем называть идеальными каналами. Канал Прейсманна один из них. Их общий вид такой

$$y(x) = \frac{\pi H}{2GB} \int_0^x \ln \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2B} dt, \quad x \in (0, B)$$

При $F = (H/B) - (4G/\pi^2) > 0$ канал оптимальный в задаче о загрязнении, при $F < 0$ канал оптимальный с точки зрения полива, при $F = 0$ получаем канал Прейсманна.

Площадь поперечного сечения σ и потери Q выражаются через глубину и ширину по формуле

$$\sigma = \frac{7\zeta(3)}{4\pi G} HB; \quad Q = k \left(B + \frac{\pi^2}{4G} H \right), \quad G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \quad \zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

где G – постоянная Каталана.

Так среди каналов с потерей Q и нулевой площадью поперечного сечения наилучшим с точки зрения полива является плоский бесконечно тонкий горизонтальный канал, ширина которого $B = Q/k$, наилучшим для отвода загрязнений является плоский бесконечно тонкий вертикальный канал, глубина которого $H = 4GQ/\pi^2 k$ (фиг. 7).

Закключение. Методом функционального анализа получено интегральное представление для функции течения (обратной функции комплексного потенциала), содержащее один свободный параметр (C). Этот параметр определяет характер течения на бесконечности ($C = 0$ – без подпора). При наличии вертикального шпунта параметр C характеризует давление на него. На основе полученного представления решен ряд оптимальных задач.

В том числе найдена форма канала заданной площади, для которой область фильтрации максимальна (полив) или минимальна (отвод загрязненных вод).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Preissmann A.A.* Propos de la filtration au-dessous de canaux // *Houille Blanche*. 1957. V. 12. № 2. P. 181–188.
2. *Положий Г.Н.* Методы движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации // *Укр. матем. журн.* 1953. Т. 5. № 4. С. 380–400.
3. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
4. *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.
5. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
6. *Эмих В.Н.* Фильтрация из подпочвенных источников // *Изв. РАН. МЖГ*. 1999. № 2. С. 72–84.
7. *Ильинский Н.Б., Касимов А.Р.* Фильтрационная оптимизация формы земляного канала методом обратных краевых задач // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1984. № 3. С. 76–80.
8. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
9. *Ильинский Н.Б., Касимов А.Р., Якимов Н.Д.* Аналитические решения задач фильтрации. Обратный метод, вариационные теоремы, оптимизация и оценки // *Изв. РАН. МЖГ*. 1998. № 2. С. 3–19.

Архангельск

Поступила в редакцию
26.IV.2005