

УДК 532.517.4

© 2005 г. В. Н. ЗЫРЯНОВ

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СЛОЕ СТОКСА**

Методом сращиваемых асимптотических разложений построено аналитическое решение уравнения баланса турбулентной энергии для мелководного водоема (моря), когда глубина жидкости не превышает толщины слоя Стокса. В этом случае для переноса импульса имеет место градиентно-вязкий баланс, при котором турбулентная вязкость уравнивается в основном градиентом давления. Показано, что вблизи дна и свободной поверхности (или льда) образуются нелинейные пограничные слои, обусловленные диффузией энергии турбулентности. В окрестности точки максимума скорости течения, если он достигается внутри потока, также формируется нелинейный внутренний пограничный слой. Вне этих слоев генерация турбулентной энергии в первом приближении балансируется ее диссипацией. Построены асимптотические решения в пограничных слоях.

*Ключевые слова:* однородная жидкость, открытые и подледные потоки, мелководный водоем, градиентно-вязкий режим течения, турбулентные пограничные слои.

При расчетах течений в водоемах суши, морях и океанах основная трудность возникает в определении коэффициентов вертикального и горизонтального турбулентного обмена. Часто их полагают постоянными, но такие модели могут служить лишь для получения каких-то качественных результатов. При попытках адекватного количественного описания гидродинамики водоема приходится искать для этих коэффициентов соответствующие функциональные зависимости через энергию турбулентных пульсаций скорости и масштаб турбулентности.

Детально эффект турбулентного трения на распространение длинных гравитационных волн был исследован в работе [1]. Было показано, что влияние трения существенно зависит от соотношения между турбулентным аналогом числа Рейнольдса  $Re_T = HU/A$  и безразмерного волнового числа  $\alpha = Hk$ , где  $H$  – толщина невозмущенного слоя жидкости,  $U$  – скорость гравитационных волн,  $A$  – коэффициент вертикального турбулентного обмена. При  $O(\alpha^{-5}) < Re_T$  трение несущественно, распространение волны описывается уравнением Кортевега – де Вриза. При  $O(\alpha^{-1}) < Re_T \leq O(\alpha^{-5})$  вязкость модифицирует уравнение КдВ в КдВ – Бюргерса. При  $O(\alpha^{-5}) \approx Re_T$  возникает интересный случай, когда геометрическая и вязкая дисперсия балансируется. Этот случай подробно изучался в [2]. Наконец, при  $Re_T < O(\alpha^{-1})$  комплексная фазовая скорость становится чисто мнимой – свободные волновые движения отсутствуют, динамика свободной поверхности описывается нелинейным диффузионным уравнением параболического типа [3]. Аналог такого уравнения был впервые получен в работе [4] в связи с изучением растекания капли жидкости на горизонтальной плоскости.

Условие  $Re_T < O(\alpha^{-1})$  дает ограничение на глубину жидкости в виде  $H < O(\sqrt{AT})$ , где  $T$  – период волны или характерное время изменчивости поля течения. С другой стороны известно, что при распространении волновых возмущений с периодом  $T$  в вязкой жидкости у свободной поверхности формируется пограничный слой Стокса толщиной  $h_{st} = \sqrt{AT}$ . Слой Стокса – это глубина, на которую диффундирует завихренность от свободной поверхности за период волны [5]. К примеру, для открытого потока и полу-

суточной приливной волны  $M_2$  глубина  $h_{st}$  составляет около 12 м при характерном значении  $A = 10^2 \text{ см}^2/\text{с}$ , для потока с ледяным покровом  $h_{st}$  будет в 2 раза больше. Таким образом, прибрежные зоны морей и многие водохранилища лежат в пределах слоя Стокса. При глубинах меньше толщины слоя Стокса  $H < h_{st}$ , для течений с характерной временной изменчивостью  $T$  в уравнениях движения с точностью до  $O(\text{Fr}^2)$  ( $\text{Fr} = U/\sqrt{gH}$ ) балансируются члены с турбулентным трением и градиентом давления [6], т.е. режим течения становится градиентно-вязкий. В этом случае члены с турбулентным трением имеют порядок  $O(\pi \text{Fr}^2 \text{Re}_T^{-1}/\alpha) \approx O(1)$ .

В случае мелкого водоема при  $h < h_{st}$  вся толща воды целиком находится в пределах слоя Стокса, и казалось бы эпюра скорости не должна иметь участков быстрого изменения, характерных для пограничных слоев. Однако экспериментальные данные показывают, что это не так – у поверхности и дна имеются области быстрого изменения скорости течения. В статье показывается, что эти пограничные слои обусловлены диффузией энергии турбулентности, нелинейными процессами ее генерации и диссипации.

**1. Исходные уравнения.** Будем иметь исходную систему уравнений в приближении градиентно-вязкого режима для однородной жидкости [7]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A(x, y, z, t) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) = -g \nabla \zeta, \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad A = l\sqrt{b} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left[ A \frac{\partial b}{\partial z} \right] - \gamma \frac{b^2}{A} + A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.3)$$

где  $A(x, y, z, t)$  – коэффициент вертикального турбулентного обмена,  $\mathbf{V} = (u, v)$  – вектор горизонтальной скорости течения,  $w$  – вертикальная компонента скорости,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\zeta$  – возвышение уровня поверхности,  $b$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций скорости,  $l$  – масштаб турбулентности,  $\alpha = 0.32$  (константа, не связанная с безразмерным волновым числом),  $\gamma = 0.09$ . Оси  $X, Y$  лежат в горизонтальной плоскости, ось  $Z$  направлена вертикально вниз. Начало координат расположено на невозмущенной поверхности водоема.

Соотношение  $A = l\sqrt{b}$  (гипотеза Колмогорова) вводит новую переменную  $l$  – масштаб турбулентности. Система (1.1)–(1.4) незамкнута – не хватает соотношения, связывающего  $l$  с другими параметрами потока или геометрией области. Достоверно известно, что вблизи стенки масштаб турбулентности меняется прямо пропорционально расстоянию до стенки [8], однако его поведение вдали от стенки до сих пор не ясно. Часто для  $l$  используется просто некоторая умозрительная параметризация как функция от глубины, либо пишется феноменологическое уравнение Колмогорова для произведения  $bl$  [8], либо феноменологическое уравнение для  $A$  [9–12], либо принимается гипотеза Прандтля [7]. Все это приводит к большому разбросу результатов расчета скоростей течений по различным моделям, использующих те или иные параметризации масштаба турбулентности.

В данной статье проблема определения масштаба турбулентности не рассматривается. Будем считать масштаб турбулентности известной функцией координаты  $z$ , причем в областях вблизи дна и свободной поверхности (или льда)  $l(z)$  полагается линейной функцией  $l(z) = l_0 + kz$ , где  $l_0$  – масштаб турбулентности на границе жидкости (дно,

свободная поверхность, лед),  $\kappa = 0.4$  – постоянная Кармана,  $z$  – расстояние до твердой границы жидкости или ее свободной поверхности.

Граничные условия на дне  $z = H$ , на нижней поверхности льда  $z = \zeta$  и на открытой поверхности воды  $z = \zeta$  имеют вид

$$z = H: u = v = w = 0, \quad A(x, y, H) = A(H), \quad b = b(H) \quad (1.4)$$

$$z = \zeta \text{ (лед): } u = v = 0, \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad A = A(\zeta), \quad b = b(\zeta)$$

$$z = \zeta \text{ (открытая вода): } (\tau_x, \tau_y) \equiv \left( A \frac{\partial u}{\partial z}, A \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_0} (T_x, T_y)$$

$$A = A(\zeta), \quad b = b(\zeta), \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (1.5)$$

где  $(T_x, T_y)$  – вектор тангенциальных напряжений ветра на поверхности водоема.

Интегрируя (1.1) дважды по  $z$ , получим общее выражение для компонент скорости

$$u = -g \zeta_x \int_H^z \frac{z - z_0^{(1)}}{A(z)} dz, \quad v = -g \zeta_y \int_H^z \frac{z - z_0^{(2)}}{A(z)} dz, \quad \zeta_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \zeta_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (1.6)$$

Точки  $z_0^{(1)}, z_0^{(2)}$  соответствуют горизонтам, на которых компоненты тангенциального напряжения трения  $(\tau_x, \tau_y)$  обращаются в нуль. Если точки  $z_0^{(1)}, z_0^{(2)}$  попадают внутрь потока, то они имеют ясный физический смысл и соответствуют горизонтам максимума компонент скорости, в противном случае эти точки носят фиктивный характер. Из уравнения (1.1) в силу линейности по  $z$  компонент вектора  $(\tau_x, \tau_y)$  для точек  $z_0^{(1)}$  и  $z_0^{(2)}$  нетрудно получить выражения  $z_0^{(1)} = \tau_x(\zeta)/(g\zeta_x) + \zeta$ ,  $z_0^{(2)} = \tau_y(\zeta)/(g\zeta_y) + \zeta$ .

В случае подледных течений точки  $z_0^{(1)}$  и  $z_0^{(2)}$  будут совпадать и из условия обращения в нуль скорости течения на нижней поверхности льда для них будем иметь

$$z_0^{(1,2)} = \int_H^\zeta \frac{z dz}{A(z)} \left( \int_H^\zeta \frac{dz}{A(z)} \right)^{-1}$$

Интегрируя уравнение неразрывности (1.2) от поверхности  $z = \zeta(x, y, t)$  до дна  $z = H(x, y)$  и используя кинематическое условие (1.5), получим уравнение неразрывности в полных потоках

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0, \quad S_x = \int_\zeta^H u dz, \quad S_y = \int_\zeta^H v dz \quad (1.7)$$

Интегрируя выражения (1.6) от  $\zeta$  до  $H$  и подставляя в (1.7), получим эволюционное уравнение параболического типа для уровня

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -g \nabla (M(\zeta) \nabla \zeta), \quad M(\zeta) = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$$m_{11} = \int_H^\zeta \left[ \int_H^z \frac{z - z_0^{(1)}}{A(z)} dz \right] dz, \quad m_{22} = \int_H^\zeta \left[ \int_H^z \frac{z - z_0^{(2)}}{A(z)} dz \right] dz$$

Если известен коэффициент вертикального турбулентного обмена  $A(z)$ , то решая уравнение (1.8), находим изменение уровня, затем по формулам (1.6) вычисляем распределение скорости в любой точке. Таким образом, задача полностью определена, и вся проблема сводится к нахождению  $A(z)$ . А здесь возникает трудность с определением масштаба турбулентности  $l(z)$  во всей толще потока. В дальнейшем ограничимся придонной, приповерхностной или подледной областями потока, в которых  $l(z) = l_0 + \kappa z$ .

**2. Уравнение баланса турбулентной энергии.** Для упрощения задачи, что никак не ограничивает ее общности в случае подледных потоков, направим ось  $x$  по градиенту уклона уровня, а для открытых потоков будем считать дополнительно  $T_y = 0$ , тогда  $\mathbf{V} = (u, 0)$  и  $\nabla = (\partial/\partial x, 0)$ . Уравнение баланса турбулентной энергии (1.3) примет вид

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left[ A \frac{\partial b}{\partial z} \right] - \gamma \frac{b^2}{A} + A \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (2.1)$$

Выражая продукцию турбулентной энергии  $A(\partial u/\partial z)^2$  в (2.1) через (1.8), получим

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left[ A \frac{\partial b}{\partial z} \right] - \gamma \frac{b^2}{A} + \frac{g^2 \zeta_x^2}{A} (z - z_0)^2 \quad (2.2)$$

Приведем уравнение (2.2) к безразмерному виду. Для этого введем характерные масштабы и безразмерные переменные (со штрихом)

$$A = A_0 A', \quad b = b_0 b', \quad \zeta_x = (\zeta_x^0) \zeta'_x, \quad z = h_0 z', \quad t = T_0 t' \quad (2.3)$$

В слое Стокса между  $A_0, h_0$  и  $T_0$  существует связь  $h_0 = \sqrt{A_0 T_0}$ . Для нахождения связи между  $b_0$  и другими характеристиками потока используем следующие соображения. Диффузия энергии турбулентности, описываемая членом  $\alpha \partial(A \partial b/\partial z)/\partial z$ , является существенной вблизи дна, свободной поверхности (или льда), если на нее воздействует ветер, а также может быть существенной внутри потока в окрестности горизонта максимума скорости при  $z = z_0$  (если таковой имеется), где  $\partial u/\partial z$  обращается в нуль. В остальной области течения в уравнении баланса турбулентной энергии (2.1) с большой точностью генерация  $A(\partial u/\partial z)^2$  уравнивается диссипацией  $\gamma b^2/A$ . Это подтверждается также численным решением уравнения (2.2) [7]. Исходя из сказанного, можно принять для  $b_0$

$$b_0 = g(\zeta_x^0) h_0 / \sqrt{\gamma} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и учитывая (2.4), получим в безразмерном виде уравнение баланса турбулентной энергии (штрихи далее опускаем)

$$\frac{\varepsilon \partial b}{\alpha \partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial b}{\partial z} \right) - \frac{b^2}{A} + \frac{(\zeta_x^0)^2}{A} (z - z_0)^2 \quad (2.5)$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha A_0^2}{\sqrt{\gamma} g \zeta_x^{(0)} h_0^3} = \frac{\alpha A_0}{\sqrt{\gamma} U_0 h} = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma} \text{Re}_T}, \quad \text{Re}_T = \frac{U_0 h}{A_0} \quad (2.6)$$

Величину  $\varepsilon$  нетрудно оценить. Подставляя характерное значение  $A_0 = 10^2 \text{ см}^2/\text{с}$  [7],  $u = 10 \text{ см/с}$ ,  $h = 10 \text{ м}$ ,  $\alpha = 0.32$ ,  $\gamma = 0.09$ , получим  $\varepsilon \approx 10^{-2}$ . Итак,  $\varepsilon$  – малая величина, стоящая при старших производных в (2.5), что указывает на существование диффузионных пограничных слоев, которые в математическом смысле означают области быстрого изменения решения [13]. Они могут быть как у границ области, так и внутри по-

тока. Наличие малого параметра при производной по времени указывает на существование "медленного" порядка  $t$  времени, обусловленного внешним воздействием через  $\zeta_x$ , и "быстрого" порядка  $t/(\epsilon/\alpha)$  времени, характеризующего процессы релаксации в системе. Если за  $T_0$  принять суточную изменчивость для "медленного" времени, то время релаксации таких процессов в системе будет составлять  $\epsilon T_0 \alpha^{-1} \approx 40\text{--}50$  мин.

Численные эксперименты с уравнением (2.5) [7] показали, что для полусуточных процессов  $T_0 = 12$  ч и при  $\alpha \approx 1$  время релаксации численного решения уравнения (2.5) составляет 10–20 мин. Это вполне согласуется с оценкой, приведенной выше для суточных процессов. Со временем релаксации и нелинейностью уравнения (2.5) напрямую связан эффект фазового сдвига времени достижения энергией турбулентности своего максимума и наступления максимума скорости течения в волновых движениях [7]. Турбулентная энергия достигает своего максимума спустя примерно 0.06–0.08 периода изменения скорости после прохождения максимума скорости течения.

Далее будем рассматривать стационарный вид уравнения (2.5). Это означает, что будем изучать состояние потока после времени релаксации системы на внешнее воздействие. Время релаксации системы указывает на характерный период ее установления. Например, полученная оценка 40–50 мин для водохранилища с глубинами  $\approx 10$  м дает время установления после изменения ветрового воздействия около 1 ч. Если ветер меняется каждые 2 ч, то установившегося режима по энергии турбулентности не будет и следовательно, необходимо рассматривать нестационарное уравнение (2.5).

**3. Структура пограничных слоев энергии турбулентности.** Рассмотрим стационарное уравнение (2.5) с учетом зависимости  $A = l\sqrt{b}$

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( l(z) \sqrt{b} \frac{\partial b}{\partial z} \right) - \frac{b^2}{l\sqrt{b}} + \frac{(\zeta_x)^2}{l\sqrt{b}} (z - z_0)^2 = 0 \quad (3.1)$$

В силу малости  $\epsilon$  решение (3.1) будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений [13–15]. Вне пограничных слоев решение будет выражаться в виде регулярного асимптотического ряда

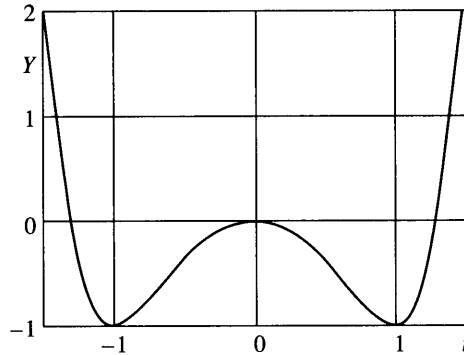
$$b = b^{(0)}(z) + \epsilon b^{(1)}(z) + \epsilon^2 b^{(2)}(z) + \dots \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим для первого приближения  $b^{(0)}(z)$  выражение

$$b^{(0)}(z) = |\zeta_x| |z - z_0| \quad (3.3)$$

Таким образом, вне пограничных слоев выражение для турбулентной энергии с точностью до  $O(\epsilon)$  является линейной функцией глубины и зависит только от уклона уровня  $\zeta_x$  и местоположения точки  $z_0$ . Решение (3.3) на дне и на поверхности воды (льда) не согласуется в общем случае с граничными условиями. Это означает, что вблизи этих границ возникают пограничные слои. Кроме того, в точке максимума скорости  $z = z_0$ , если она попадает внутрь потока (например, при наличии встречного ветра или в течении подо льдом), функция  $b^{(0)}(z)$  имеет излом, т.е. ее первая производная будет функцией Хевисайда (функцией скачка), а вторая производная – дельта-функцией. Из соображений порядка сингулярности из (3.1) следует, что вторая производная должна быть гладкой непрерывной функцией. Это указывает на существование около горизонта  $z = z_0$  внутреннего пограничного слоя, который должен сглаживать излом функции (3.3) при  $z = z_0$ . В целях упрощения процедуры построения асимптотических разложений будем рассматривать только такие ситуации, когда внутренний пограничный слой не перекрывается ни с придонным, ни с поверхностным пограничными слоями.

**4. Придонный и поверхностный пограничные слои.** Для нахождения решения в пограничном слое у дна  $z = 1$  введем растянутую локальную переменную  $\xi = (1 - z)\epsilon^{-1/2}$ ,



Фиг. 1. График функции  $Y(t)$  (4.8) при  $\alpha = 1, \beta = 1, C_1 = 0$

где степень  $\varepsilon$  выбрана так, что диффузионный член в (3.1) был одного порядка с остальными. Сделав в (3.1) замену  $z = 1 - \varepsilon^{1/2}\xi$  и устремив  $\varepsilon$  к нулю, получим уравнение для первого приближения энергии турбулентности в пограничном слое

$$2 \frac{d^2 \varphi(\xi)}{d\xi^2} - \alpha \varphi(\xi) + \beta \varphi^{-1/3}(\xi) = 0, \quad \varphi = b^{3/2}, \quad \alpha = \frac{3}{l^2(1)} \quad (4.1)$$

$$\beta = 3Cl^2(1), \quad C = (\zeta_x)^2(1 - z_0)^2$$

В уравнение (4.1) входят только сама функция  $\varphi$  и ее производная, поэтому можно понизить его порядок, сделав замену  $\varphi' = f(\varphi)$ . Интегрируя затем уравнение один раз по  $\varphi$ , получим

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = \frac{\alpha}{2}\varphi^2 - \frac{3}{2}\beta\varphi^{2/3} + C_1 \quad (4.2)$$

где  $C_1$  – константа интегрирования. В уравнении (4.2) переменные разделяются и можно записать решение в неявном виде

$$\pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha/2)\varphi^2 - (3/2)\beta\varphi^{2/3} + C_1}} = \xi + C_2 \quad (4.3)$$

где  $C_2$  – вторая константа интегрирования.

Константы  $C_1$  и  $C_2$  определяются из двух условий – граничного условия на дне и условия сращивания [14, 15] с решением во внешней области. Однако так напрямую найти константу  $C_1$  не удастся, так как неопределенный интеграл в левой части (4.3) при общем виде  $C_1$  в элементарных функциях не выражается. Будем исходить из некоторых наводящих соображений. Сделаем в (4.3) замену  $\varphi^{1/3} = t$  и рассмотрим подкоренное выражение

$$Y(t) = 1/2\alpha t^6 - 3/2\beta t^2 + C_1 \quad (4.4)$$

График функции  $Y(t)$  при  $C_1 = 0$  приведен на фиг. 1, из которого видно, что функция имеет три экстремума в точках  $t = 0$  и  $t_{1,2} = (\beta/\alpha)^{1/4}$ . Значение функции  $Y(t)$  в точках минимума  $t_{1,2}$  равно  $(-\beta^{3/2}/\alpha^{1/2})$ . В области пограничного слоя решение должно выражаться в функциях типа  $e^{-\xi}$ . Чтобы такое получить, в (4.3) в знаменателе должен присутствовать множитель типа  $(t - a)$ . Следовательно, подкоренное выражение (4.4)

должно содержать множитель  $(t - a)^2$ . Так как функция (4.4) четная, то должен тогда быть и сомножитель  $(t + a)^2$ , т.е. должны быть корни  $\pm a$  каждый кратности 2 и функция (4.4) должна делиться на  $(t^2 - a^2)^2$ . Это возможно только в случае, когда график  $Y(t)$  на фиг. 1 будет целиком лежать в верхней полуплоскости, касаясь оси  $t$  в точках минимума. Отсюда следует, что константу  $C_1$  надо положить равной

$$C_1 = \beta^{3/2}/\alpha^{1/2}, \quad a = (\beta/\alpha)^{1/4}$$

При этих значениях  $C_1$  и  $a$  интеграл (4.3) можно представить в виде

$$J = \int \frac{3t^2 dt}{|t^2 - (\beta/\alpha)^{1/2}| \cdot \sqrt{(\alpha/2)t^2 + (\alpha\beta)^{1/2}}} \quad (4.5)$$

Интеграл (4.5) запишем в виде суммы

$$J = J_1 + J_2 = \int \frac{3dt}{\sqrt{(\alpha/2)t^2 + (\alpha\beta)^{1/2}}} + 3(\beta/\alpha)^{1/2} \int \frac{3t^2 dt}{|t^2 - (\beta/\alpha)^{1/2}| \cdot \sqrt{(\alpha/2)t^2 + (\alpha\beta)^{1/2}}} \quad (4.6)$$

Интегралы  $J_1$  и  $J_2$  в (4.6) вычисляются [16] и в результате получим окончательно

$$\pm \ln \left\{ [q + (q^2 + 2)^{1/2}] \cdot \left| \frac{\sqrt{3}q - (q^2 + 2)^{1/2}}{\sqrt{3}q + (q^2 + 2)^{1/2}} \right|^{\sqrt{3}/6} \right\} = \eta + R, \quad d = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \quad (4.7)$$

$$q = \frac{\sqrt{b(\xi)}}{d}, \quad \eta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot \xi, \quad R = C_2 - \ln d$$

Решение в пограничном слое должно срачиваться с решением во внешней области и удовлетворять граничным условиям на дне. Так как постоянная  $C_1$  в (4.3) была определена из иных соображений, необходимо проверить, удовлетворяет ли решение (4.7) условию срачивания с решением (3.3). Принцип срачивания для функции 1-го рода [13–15], когда вводятся преобразования растяжения только для аргументов, требует

$$\lim_{z \rightarrow 1} b^{(0)}(z) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} b(\xi) \quad (4.8)$$

Согласно (4.7)  $\xi \rightarrow +\infty$  при  $q \rightarrow 1$  и, следовательно,  $b \rightarrow d^2$ , при этом в (4.7) необходимо взять знак минус. Предел справа в (4.8) равен

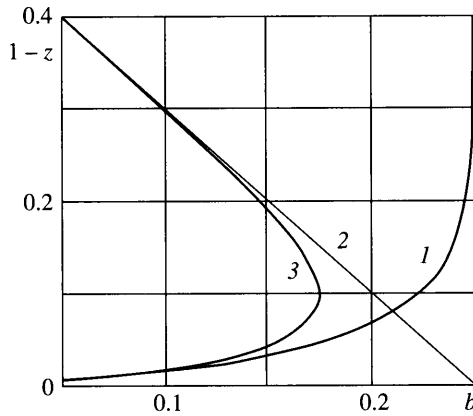
$$d^2 = \left[ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \right]^2 = \sqrt{\beta/\alpha} = |\zeta_x| \cdot |1 - z_0|$$

предел слева в силу выражения (3.3) равен тому же. Таким образом, константа  $C_1$  из соображений о делимости многочлена (4.4) была найдена правильно. Константу  $C_2$  в (4.7) определим из граничного условия на дне (1.4) для энергии турбулентности в переменных пограничного слоя  $\xi = 0$ :  $b = b(1) = b_1$ .

Обозначим выражение в фигурных скобках (аргумент логарифма) в (4.7) через  $F(q)$ , тогда общее решение в пограничном слое можно записать в виде

$$-\ln \left[ \frac{F(q)}{F(q(0))} \right] = \eta, \quad q(\eta) = \frac{\sqrt{b(\eta)}}{d}, \quad q(0) = \frac{\sqrt{b_1}}{d} \quad (4.9)$$

Толщина пограничного слоя, в котором справедливо решение (4.9), составляет величину  $h_l = \sqrt{\varepsilon} h$ . При глубине  $h = 10$  м и  $\varepsilon = 10^{-2}$  получим  $h_l = 1$  м. Таким образом, пове-



Фиг. 2. Решения  $b(\xi)$  в придонном пограничном слое (1), во внешней области  $b^{(0)}(z)$  (2), суммарное решение  $b(z)$  (3) при  $d = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $z_0 = 0.5$ ,  $\alpha = 5$ ,  $b(0) = 0$

дение энергии турбулентности носит характер пограничного слоя вблизи дна, а также вблизи поверхности воды, примерно в метровом слое.

Для определения коэффициента вертикального турбулентного обмена  $A(z)$  в пограничном слое запишем соотношения  $A = l\sqrt{b}$  и  $l(z) = l_0 + kz$  в координатах пограничного слоя и возьмем нулевое приближение

$$A(z) = l(1)b^{1/2}(\xi) \quad (4.10)$$

Подставляя выражение (4.10) в соотношение (1.6), найдем распределение скорости в придонном пограничном слое.

Решение, справедливое как во внешней области, так и в пограничном слое, можно записать единым выражением в виде  $b(z) = b^{(0)}(z) + b(\xi) - d^2$ . Графики функции  $b(z)$ , решения во внешней области  $b^{(0)}(z)$  и в пограничном слое  $b(\xi)$  приведены на фиг. 2.

Решение (4.7) будет справедливо и в подледном пограничном слое, и в поверхностном слое в случае открытой воды. В подледном пограничном слое локальная координата в (4.7) будет  $\xi = (z - \zeta)/\varepsilon^{1/2}$ , а в соотношении (4.10) войдет  $l(0)$ . При вычислении скорости в подледном пограничном слое необходимо в выражении (1.6) брать интеграл от уровня поверхности  $\zeta$  до  $z$ . В случае открытой водной поверхности под воздействием ветра также возникает у свободной поверхности пограничный слой. Решение в нем для  $b(z)$  также дается выражением (4.7). Граничные условия для  $b(\zeta)$  и  $A(\zeta)$  обычно задаются из эмпирических соотношений [7].

**5. Внутренний пограничный слой.** Внутренний пограничный слой возникает около точки  $z_0$ , если она оказывается внутри потока. Это имеет место всегда в подледных течениях, а также в открытых потоках при встречном к основному течению ветре.

Первое приближение (3.3) вне пограничных слоев  $b^{(0)}(z)$  в точке  $z_0$  является непрерывной функцией, но с изломом, т.е. первая производная имеет разрыв 1-го рода. Исходя из соображений симметричности функции  $b(z)$  при  $z = z_0 \pm 0$  и непрерывности, по крайней мере, ее первой производной в окрестности точки  $z = z_0$  необходимо искать решение типа пограничного слоя  $b(z/\varepsilon^\alpha)$  с граничным условием

$$z = 0: d/dz[b(z/\varepsilon^\alpha)] = 0 \quad (5.1)$$



Введя в уравнение (3.1) в окрестности точки  $z = z_0$  растянутую переменную аналогично придонному пограничному слою  $\xi = (z - z_0)/\sqrt{\epsilon}$ , получим

$$\frac{2}{3}l(z_0)\frac{d^2\varphi(\xi)}{d\xi^2} - \frac{1}{l(z_0)}\varphi(\xi) + \epsilon \frac{(\zeta_x)^2\xi^2}{l(z_0)\varphi^{1/3}(\xi)} = 0, \quad \varphi = b^{3/2} \quad (5.2)$$

Если принять порядок функции  $\varphi$  за единицу, то тогда последний член уравнения (5.2) будет иметь порядок  $O(\epsilon)$ , а оставшиеся первые два члена уравнения будут давать решение в виде двух экспонент. Такое решение нельзя срастить с алгебраическим решением (3.3) во внешней области вне пограничного слоя. Отсюда следует, что в уравнении (5.2) последний член должен иметь тот же порядок, что и первые два. Этого можно добиться, только вводя растяжение еще и самой функции. Последнее означает, что функция  $\varphi$  должна быть функцией 2-го рода [14, 15]. Вводя замену  $\varphi = \epsilon^\delta \theta$  в (5.2), нетрудно получить из равенства порядков всех членов уравнения, что  $\delta = 3/4$ . В результате для  $\theta$  имеем уравнение

$$\frac{2}{3}l^2(z_0)\frac{d^2\theta(\xi)}{d\xi^2} - \theta(\xi) + \frac{(\zeta_x)^2\xi^2}{\theta^{1/3}(\xi)} = 0 \quad (5.3)$$

Будем искать решение уравнения (5.3) при  $\xi > 0$  с граничным условием (5.1) при  $\xi = 0$  в переменных пограничного слоя, т.е.  $d\theta/d\xi = 0$ , и условием срачивания с решением (3.3). Так как функция  $\varphi$  является функцией 2-го рода, то необходимо применять принцип срачивания для функций 2-го рода [14, 15].

Найти точное решение уравнения (5.3) не представляется возможным из-за его нелинейности, поэтому будем искать приближенное решение. Примем во внимание, что при  $\xi \rightarrow +\infty$  решение уравнения должно вести себя подобно (3.3), поэтому вторая производная в (5.5) должна стремиться к нулю при  $\xi \rightarrow \infty$ . В связи со сказанным возьмем в качестве первого приближения к решению функцию  $\theta_0$ , которая удовлетворяет вырожденному уравнению (5.3)

$$-\theta_0(\xi) + \frac{(\zeta_x)^2\xi^2}{\theta_0^{1/3}(\xi)} = 0 \quad (5.4)$$

Откуда имеем

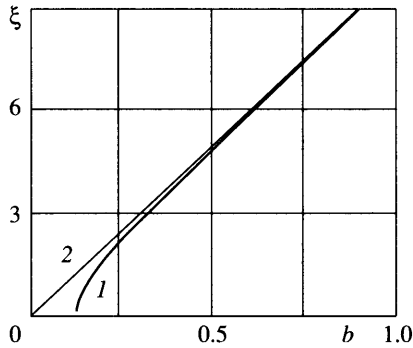
$$\theta_0 = |\xi_x|^{3/2}\xi^{3/2} \quad (5.5)$$

Введем отклонение  $\theta_1 = \theta - \theta_0$  истинного решения от  $\theta_0$ , которое будем предполагать малым по отношению к  $\theta_0$ . Тогда из (5.3) получим для  $\theta_1$  уравнение

$$\frac{2}{3}l^2(z_0)\frac{d^2\theta_1(\xi)}{d\xi^2} - \frac{4}{3}\theta_1(\xi) = -\frac{2}{3}l^2(z_0)\frac{d^2\theta_0(\xi)}{d\xi^2} \quad (5.6)$$

Фундаментальными решениями оператора левой части в (5.6) будут функции  $e^{-\lambda\xi}$  и  $e^{\lambda\xi}$ , где  $\lambda = \sqrt{2}/l(z_0)$ . Частное решение уравнения (5.6) найдем через определитель Вронского. В результате будем иметь общее решение уравнения (5.6) в виде

$$\theta_1 = C_1 e^{-\lambda\xi} + C_2 e^{\lambda\xi} + \frac{e^{-\lambda\xi\xi}}{2\lambda} \int_0^\xi g(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau - \frac{e^{\lambda\xi\xi}}{2\lambda} \int_0^\xi g(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau, \quad g(\tau) = \frac{d^2\theta_0}{d\xi^2} \quad (5.7)$$



Фиг. 3. Решение (5.13) во внутреннем пограничном слое (1) и внешнее решение  $b^{(0)}(z - z_0)$  (2) при  $\zeta_x = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$

При  $\xi \rightarrow \infty$  функция  $\theta_1$  должна стремиться к нулю. Первый и третий члены в (5.7) стремятся к нулю, а чтобы сумма второго и четвертого членов стремилась к нулю, необходимо константу  $C_2$  задать в виде

$$C_2 = \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \quad (5.8)$$

С учетом выражения (5.8) будем иметь

$$\theta_1 = C_1 e^{-\lambda\xi} + \frac{e^{-\lambda\xi\xi}}{2\lambda} \int_0^{\lambda\xi} g(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau + \frac{e^{\lambda\xi\infty}}{2\lambda} \int_{\xi}^{\infty} g(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \quad (5.9)$$

Учитывая, что  $g(\xi) = (3/4)|\zeta_x|^{3/2}\xi^{-1/2}$ , из (5.9) получим

$$\theta_1 = C_1 e^{-\lambda\xi} + \frac{3(\zeta_x)^{3/2} e^{-\lambda\xi\xi}}{8\lambda} \int_0^{\lambda\xi} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\lambda\tau} d\tau + \frac{3(\zeta_x)^{3/2} e^{\lambda\xi\infty}}{8\lambda} \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\lambda\tau} d\tau \quad (5.10)$$

Из граничного условия при  $\xi = 0$  получим

$$C_1 = \frac{3|\zeta_x|^{3/2}}{8\lambda} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (5.11)$$

Таким образом, значение  $\theta_1$  в нуле, а следовательно, и  $\theta$  будет равно

$$\theta_1(0) = \frac{3|\zeta_x|^{3/2}}{4\lambda} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{3|\zeta_x|^{3/2} \pi^{1/2}}{4\lambda^{3/2}} \quad (5.12)$$

Осталось проверить выполнимость условия срачивания решения во внутреннем пограничном слое с решением (3.3) во внешней области. Исходя из (5.8) и  $\varphi = b^{3/2}$ , получим выражение для энергии турбулентности во внутреннем пограничном слое (фиг. 3)

$$b(\xi) = \varepsilon^{1/2} [|\zeta_x|^{3/2} \xi^{3/2} + \theta_1(\xi)]^{2/3} \quad (5.13)$$

Для выполнения принципа срачивания [14, 15] необходимо ввести промежуточные переменные для аргументов функций, в которых решения в пограничном слое и во внешней области должны иметь одинаковые пределы при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Аргумент решения во внешней области в (3.3) можно представить как  $(z - z_0)/\epsilon^0$ , а переменная пограничного слоя является  $(z - z_0)/\epsilon^{1/2}$ . Отсюда ясно, что промежуточная переменная будет  $\xi_\mu = (z - z_0)/\epsilon^\mu$ , где  $0 < \mu < 1/2$ . Записывая в переменных  $\xi_\mu$  решение (3.3) и (5.13), будем иметь

$$b^{(0)}(\xi_\mu) = |\zeta_x| \epsilon^\mu \xi_\mu, \quad b(\xi) = \epsilon^{1/2} \left[ |\zeta_x|^{3/2} \frac{\xi_\mu^{3/2}}{\epsilon^{3(1/2 - \mu)/2}} + \theta_1 \left( \frac{\xi_\mu}{\epsilon^{1/2 - \mu}} \right) \right]^{2/3} \quad (5.14)$$

При  $\epsilon \rightarrow 0$  аргумент функции  $\theta_1$  в выражении (5.14) стремится к  $+\infty$ . Из (5.10) видно, что  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \theta_1 = 0$ . В результате при  $\epsilon \rightarrow 0$   $b(\xi)$  в (5.14) будет вести себя как

$$b(\xi) \approx \epsilon^{1/2} |\zeta_x| \xi_\mu \epsilon^{\mu - 1/2} = |\zeta_x| \xi_\mu \epsilon^\mu \quad (5.15)$$

т.е. идентично поведению  $b^{(0)}(\xi_\mu)$  в (5.14). Таким образом, условие срачивания выражения (5.13) с решением во внешней области (3.3) выполняется.

Полученное решение во внутреннем пограничном слое дает возможность написать явное выражение для энергии турбулентности на оси потока, где скорость принимает максимальное значение. Из (5.12) с учетом (5.5) будем иметь

$$b(0) = \left( \frac{3}{4} \right)^{2/3} \frac{|\zeta_x| \epsilon^{1/2} \pi^{1/3}}{\lambda} = \left( \frac{3}{4} \right)^{2/3} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{1/2} \pi^{1/3} |\zeta_x| l(z_0) \quad (5.16)$$

Выражение (5.16) позволяет получить оценку снизу на масштаб турбулентности на оси потока во внутреннем пограничном слое и соответственно на значение энергии турбулентности. Воспользовавшись соотношением Колмогорова  $A = l \sqrt{b}$  и условием, что коэффициент вертикального турбулентного обмена не может быть меньше молекулярной вязкости  $\nu$ , получим неравенство

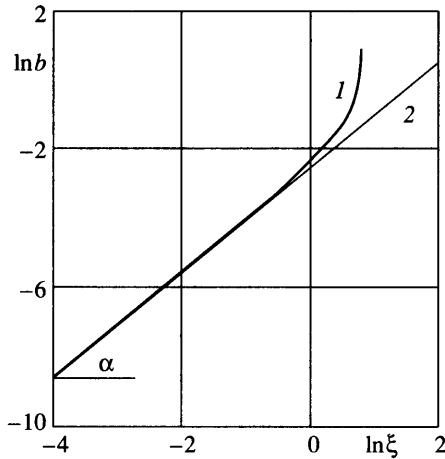
$$l(z_0) \geq \left[ (3/4)^{-2/3} \pi^{-1/3} (\epsilon/2)^{-1/2} (\nu/A_0)^2 |\zeta_x|^{-1} \right]^{1/3}$$

или в размерном виде с учетом соотношений (2.4), (2.6) и числовых значений параметров

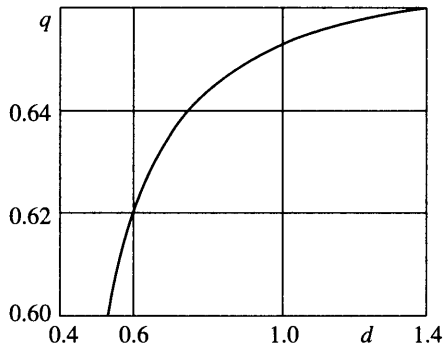
$$l(z_0) \geq \left[ 2^{1/2} (3/4)^{-2/3} \pi^{-1/3} (\alpha)^{-1/2} \nu^2 \gamma |\zeta_x|^{-1} \right]^{1/3} = 2.65 \times 10^{-3} |\zeta_x|^{-1/3} \text{ см}$$

**6. Обсуждение результатов.** Описанные в данной работе придонный и поверхностный пограничные слои занимают область вне вязкого подслоя. Для этой подобласти потока принято считать выполненность логарифмического закона фон Кармана-Прандтля для профиля скорости. Логарифмический закон в течениях со сдвигом скорости следует из довольно сильного предположения об автомодельности по числу Рейнольдса в этой области градиента скорости [17]. Предположение о неполной автомодельности по числу Рейнольдса приводит к выводу, что распределение скорости в этой области потока должно описываться степенной зависимостью с показателем степени, зависящим от числа Рейнольдса [17].

Если принять в соответствии с гипотезой о неполной автомодельности для распределения скорости в придонном турбулентном пограничном слое степенную зависимость  $u(z) \approx C(\text{Re})(1 - z)^{\beta(\text{Re})}$ , то используя соотношения (1.6) и (4.10), нетрудно показать, что тогда для энергии турбулентности должны будем иметь  $b(\xi) \approx C_1 (1 - z)^{2(1 - \beta)} = C_2 \xi^{2(1 - \beta)}$ . Отсюда следует, что логарифмы  $\ln(b)$  и  $\ln(\xi)$  должны быть связаны линейной зависимостью, причем тангенс угла наклона этой прямой должен зависеть от числа Рейнольдса. Из фиг. 4 видно, что действительно имеется прямолинейный участок в



Фиг. 4. Зависимость  $\ln b$  от  $\ln \xi$  в придонном пограничном слое (1) и ее линейная аппроксимация (2) при  $d = 1.5$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0.66$



Фиг. 5. Зависимость  $\operatorname{tg} \alpha$  от параметра  $d$

зависимости  $\ln(b)$  от  $\ln(\xi)$ . Тангенс угла наклона этой прямой (фиг. 5) зависит от значения параметра  $d$ , а значит и от числа Рейнольдса. Полученный результат свидетельствует о неполной автомодельности по числу Рейнольдса, а следовательно об отсутствии логарифмического слоя в области за вязким подслоем.

Из фиг. 4 также видно, что при приближении к внешней границе пограничного слоя график зависимости  $\ln(b)$  от  $\ln(\xi)$  все больше отклоняется от прямой, т.е. выделяется еще одна подобласть в пограничном слое, но уже с другим показателем степени. Это находится в соответствии с результатами работы [17], в которой показано существование двух подобластей в турбулентном пограничном слое с разными показателями в степенной зависимости.

Скорость течения в придонном пограничном слое, вычисленная по полученному распределению энергии турбулентности, возрастает гораздо быстрее при удалении от дна, чем это дает логарифмический закон, т.е. эпюра скорости имеет больший порядок касания ко дну, нежели логарифмическая кривая. Этот факт очень важен для теории седиментации, задач расчета размыва дна и движения донных наносов.

**Заключение.** Методом сращиваемых асимптотических разложений найдено распределение энергии турбулентности в слое Стокса, толщина которого определяется

соотношением  $h_{st} = \sqrt{AT}$  ( $A$  – коэффициент вертикального турбулентного обмена,  $T$  – период волны или характерное время изменчивости поля течения). В слое Стокса имеет место градиентно-вязкий баланс членов уравнения сохранения импульса – члены с турбулентной вязкостью балансируются градиентом давления, т.е. вся толща жидкости находится в пределах одного вязкого турбулентного слоя. Однако внутри этого слоя возникают дополнительные турбулентные пограничные подслои вблизи верхней и нижней границ жидкости, а также внутри потока около горизонта максимума скорости течения, если этот максимум оказывается внутри потока. Физически возникновение этих подслоев обусловлено нелинейными процессами генерации, диссипации и диффузионного перераспределения энергии турбулентности вблизи границ жидкости и около горизонта нулевых касательных напряжений внутри потока, математически этому соответствует наличие малого параметра при диффузионном члене в уравнении баланса турбулентной энергии.

Автор благодарит А.А.Бармина за ценные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-05-65058).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kakutani T., Matsuuchi K.* Effect of viscosity on long gravity waves // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39. № 1. P. 237–246.
2. *Djordjevic V.D.* On the dissipation of interfacial and internal long gravity waves // ZAMP. 1980. V. 31. № 3. P. 318–331.
3. *Djordjevic V.D.* On the effect of viscosity on some nonwave motions of liquids with the free surface // Acta Mech. 1983. V. 48. № 3, 4. P. 219–226.
4. *Nakaya C.* Spread of fluid drops over a horizontal plane // J. Phys. Soc. Japan. 1974. V. 37. № 2. P. 539–543.
5. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: Univ. Press, 1978. = Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1980. 598 с.
6. *Зырянов В.Н.* Топографические вихри в динамике морских течений. М.: Ин-т водн. пробл. РАН, 1995. 239 с.
7. *Дебольская Е.И., Зырянов В.Н.* Вертикальная турбулентная структура течений в мелком море // Водные ресурсы. 1994. Т. 21. № 6. С. 581–589.
8. Prediction Methods for Turbulent Flows. Washington: Hemisphere, 1980. = Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. 463 с.
9. *Kovaszny L.S.G.* Structure of the turbulent boundary layer // Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 9. Pt 2. P. 25–30.
10. *Nee V.W., Kovaszny L.S.G.* Simple phenomenological theory of turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 3. P. 473–484.
11. *Лебедев А.Б., Секундов А.Н.* Применение уравнения для турбулентной вязкости при описании течений вблизи шероховатой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 40–44.
12. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н.* К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 69–81.
13. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 3–122.
14. *Зырянов В.Н.* Теория установившихся океанических течений / Срашиваемые асимптотические разложения: основы теории и приложения к задачам динамики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 248 с.
15. *Eckhaus W.* On the foundation of method of matched asymptotic approximations // J. Mec. 1969. V. 8. № 2. P. 265–300.
16. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971. 1108 с.
17. *Баренблатт Г.И.* Турбулентные пограничные слои при очень больших числах Рейнольдса // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59. Вып. 1. С. 45–62.