

УДК 532.516.5

© 2005 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, С. А. КУМАКШЕВ

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМОДОВЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДЖЕФФРИ–ГАМЕЛЯ ДЛЯ КОНФУЗОРА

В задаче Джеффри–Гамеля для случая конфузора при малых, умеренно больших и асимптотически больших значениях числа Рейнольдса Re во всем допустимом диапазоне углов раствора построены и изучены неизвестные в литературе многомодовые симметричные и несимметричные решения. Эти решения сингулярно зависят от Re при асимптотически малых его значениях. Установлен и прокомментирован ряд новых гидромеханических эффектов.

Ключевые слова: конфузор, задача Джеффри–Гамеля, многомодовые решения, угол раствора, число Рейнольдса.

Задача Джеффри–Гамеля о стационарном радиальном течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском конфузоре допускает точное автомодельное решение [1–7]. Ее полное исследование во всей области изменения угла раствора конфузора 2β и числа Рейнольдса Re , в том числе и для их предельных значений $2\beta \rightarrow 0, \pi, 2\pi$; $Re \rightarrow 0, \infty$ представляет большой теоретический и прикладной интерес. Такие результаты в научной литературе отсутствуют.

Возобновившийся в последние годы интерес к задаче Джеффри–Гамеля (и другим классическим задачам механики сплошной среды) обусловлен как возросшими возможностями современных компьютеров, разработкой программного обеспечения, так и практическими потребностями решения более широкого класса задач о нестационарных движениях, неизотермическом деформировании, выдавливании неньютоновской и вязкопластической сред из плоских щелей и конфузоров и др. Для таких движений среды решение Джеффри–Гамеля является опорным или нулевым приближением, поэтому важно знать его существенные свойства и особенности в различных диапазонах значений параметров.

Данная работа является развитием предыдущих статей авторов [8, 9], где на основе модифицированного метода ускоренной сходимости [10] проведено численно-аналитическое исследование одно- и многомодовых конфузорных течений вязкой жидкости для допустимых углов раствора ($0 < 2\beta \leq 2\pi$) на большом интервале изменения $Re \sim 10^2$ – 10^4 в случае режимов течения, допускающих регулярное продолжение по $Re \geq 0$.

1. Постановка задачи Джеффри–Гамеля. Рассмотрим плоское стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в неограниченной области $\Omega = \{(r, \theta) : r > 0, |\theta| < \beta\}$, имеющее особенность типа источник–сток мощности $-Q$ в точке O . В зависимости от знака Q область Ω называется плоским диффузором ($Q < 0$) или плоским конфузором ($Q > 0$). Жидкость характеризуется плотностью ρ и динамической вязкостью μ (обозначения соответствуют [9]).

Поскольку из совокупности характерных параметров задачи β, Q, ρ, μ невозможно выбрать три размерно независимые величины, так как $[Q] = [\mu]/[\rho]$, то полностью обезразмерить последующие уравнения не удастся. Имеются два безразмерных параметра – угол полураствора β ($0 < \beta \leq \pi$) и $Re = \rho Q/\mu$ ($-\infty < Re < \infty$), от которых будет за-

висеть решение. Отметим, что обычно вводится определение $Re = |Q|\rho/\mu$, требующее изменение знаков в соотношениях.

В плоском случае решение, описывающее данное движение жидкости, можно искать в автомодельном виде. Поле скорости $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta)$ радиально, т.е. $v_\theta \equiv 0$, а радиальная компонента скорости представима в виде $v_r = -QV(\theta)/r$, что автоматически обеспечивает выполнение условия несжимаемости. Незвестная функция $V(\theta)$ определяет профиль скорости и подлежит определению.

Два уравнения Навье–Стокса в проекции на радиус и угол приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно безразмерной функции $V(\theta)$ и соответствующему выражению для давления p [4]:

$$V'' + 4V - ReV^2 = C, \quad p = \frac{\rho Q^2}{2r^2 Re} (C - 4V) \quad (1.1)$$

Из условий прилипания на границе Ω и интегрального равенства, характеризующего требование постоянства расхода жидкости через любое сечение конфузора $r = \text{const}$, следуют три условия

$$V(\pm\beta) = 0, \quad \int_{-\beta}^{\beta} V(\theta) d\theta = 1 \quad (1.2)$$

Краевые и интегральное условия (1.2) служат для определения постоянных интегрирования и неизвестной $C = V''(\pm\beta)$.

Уравнение (1.1) с граничными и интегральными условиями (1.2), куда благодаря автомодельности [7] входят лишь безразмерные известные и неизвестные функции и константы, представляет собой классическую задачу Джеффри–Гамеля. Различным аспектам аналитического, численного и экспериментального исследований течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском сходящемся или расходящемся канале посвящены многие работы последних пятнадцати – двадцати лет. Отметим некоторые из них.

В [11] изучаются неустойчивость и различные бифуркации течения Джеффри–Гамеля. Показывается, что единственное симметричное течение, существующее при достаточно малых числах Рейнольдса, становится неустойчивым при больших. В результате бифуркации появляются два устойчивых несимметричных режима. При больших числах Рейнольдса найдены восемь несимметричных устойчивых течений и доказано существование семи симметричных неустойчивых режимов. При очень больших числах Рейнольдса обнаружены периодические по времени решения задачи Джеффри–Гамеля и обсуждается возможность бифуркации Хопфа.

Малые двумерные возмущения классического одномерного симметричного течения Джеффри–Гамеля изучаются в [12, 13]. Отмечено, что развитие возмущений существенно зависит от того, больше или меньше угол раствора конфузора (диффузора), чем некоторый критический, который, в свою очередь, зависит от числа Рейнольдса. Обсуждается влияние малой кривизны стенок на параметры течения и связанное с этим приближение Френкеля [14, 15].

Течение в канале с кусочно-прямолинейной границей исследуется в [16]. Найдено значение критического угла между стенками, при превышении которого течение Джеффри–Гамеля не существует вообще. Решение же задачи имеет форму волны с большой амплитудой при наличии вихрей, находящихся последовательно то у одной, то у другой стенки канала. Если угол между стенками меньше критического, то существование такой волны зависит от геометрии стенок вблизи точки стока. Численное развитие результатов данной работы и анализ установившихся нелинейных волн приведены в дальнейшем в [17]. Обстоятельное численное исследование единственности,

существования симметричных режимов и начала неустойчивости течения Джеффри–Гамеля дано в [18].

Некоторые нестационарные автомодельные режимы течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре построены в [19].

2. Классические результаты. Уравнение (1.1), очевидно, допускает понижение порядка после домножения на V и выделения полных производных. Имеет место первый интеграл

$$\frac{V^2}{2} + 2V^2 - \text{Re} \frac{V^3}{3} - CV = \frac{V^2(\mp\beta)}{2} \quad (2.1)$$

Классические результаты связаны с интегрированием в эллиптических интегралах и функциях уравнения (2.1) [4, 6]. Анализ получающихся эллиптических интегралов и функций, зависящих от нескольких параметров, а также корней системы двух (изначально трех) трансцендентных уравнений относительно неизвестных постоянных интегрирования, затруднен. Построить явное решение краевой задачей с условием постоянства расхода для произвольных параметров β , Re не удастся.

Действительно, согласно [1] искомая функция представима в виде двухпараметрического семейства

$$V(\theta) = \frac{2}{\text{Re}}(1 - m^2 - m^2 k^2) + \frac{6}{\text{Re}} k^2 m^2 \text{sn}^2(m\theta, k) \quad (2.2)$$

Здесь m и k – неизвестные параметры, подлежащие определению из условий (1.2); sn – эллиптический синус. На основе выражения (2.2) для m и k получается кажущаяся сравнительно простой для анализа и решения система трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} 3k^2 m^2 \text{sn}^2(m\beta, k) + 1 - m^2 - k^2 m^2 &= 0 \\ 12mE(m\beta, k) - 4\beta(1 + 2m^2 - k^2 m^2) &= \text{Re} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где E – эллиптический интеграл второго рода. Анализ и численное решение системы (2.3) для значений β , Re , представляющих интерес в теоретическом и прикладном аспектах, реализовать не удастся. Рассмотренный в [1] случай асимптотически малых значений угла β в предположении $m^2 \sim 1$ приводит к выражению

$$k^2 = \frac{1 - m^2}{m^2}(1 + 3m^2\beta^2) + O(\beta^4), \quad \beta \ll 1 \quad (2.4)$$

которое имеет смысл при $1 \geq m^2 > 1/2$. Из второго уравнения (2.3) после подстановки k^2 (2.4) получается соотношение для m^2

$$\text{Re} - 10m^2(1 - m^2)\beta^3 = O(\beta^5) \quad (2.5)$$

которое разрешимо при достаточно малом $\text{Re} \sim \beta^3$. Это свойство решения существенно ограничивает применимость формул (2.3). Кроме того, предположение $m^2 \sim 1$ при $\beta \ll 1$ может вызвать сомнение. Семейство решений (2.2) предполагает симметрию относительно $\theta = 0$, что свидетельствует, вообще говоря, о его неполноте и неприменимости для построения многомодовых профилей течения.

“Решение” в виде соотношений (2.2), (2.3) фактически является перезаписью исходной задачи (1.1), (1.2) в других обозначениях. Эти выражения не позволяют преодолеть существенные вычислительные трудности действительного решения нелинейной краевой задачи с дополнительным интегральным условием. Дифференцированием по θ нетрудно установить, что она эквивалентна стандартной нелинейной задаче чет-

вертого порядка. Вычисления свидетельствуют о существовании счетного множества многомодовых решений, которые имеют сингулярный характер в зависимости от параметров системы θ , Re .

Приведенные факты определенно свидетельствуют о трудностях применимости классического аналитического подхода, базирующегося на методах теории эллиптических функций и интегралов. Требуется разработка эффективных численно-аналитических методов решения нелинейной краевой задачи с дополнительным интегральным условием.

Считалось, что решение задачи Джефффри–Гамеля для диффузора ($Re < 0$) является более сложным и многообразным, чем для конфузора ($Re > 0$). Для него были известны многомодовые режимы, имеющие симметричные и несимметричные относительно оси $\theta = 0$ профили скорости. Стационарное решение для диффузора при достаточно больших Re теряет устойчивость [20], что приводит к наступлению развитой турбулентности. Под многомодовостью здесь и далее понимается чередование секторов истока ($V(\theta) < 0$) и стока ($V(\theta) > 0$) жидкости.

Наличие для конфузора многомодовых и несимметричных решений наряду с всегда существующим для малых углов [9] одномодовым симметричным свидетельствует о неединственности решения нелинейной краевой задачи Джефффри–Гамеля с условием постоянства расхода. Некоторые теоремы о единственности классического одномодового профиля при асимптотически малых Re доказаны в [21].

Как многомодовость, так и несимметрия профиля скорости не были установлены в классической литературе для конфузорного течения. Оставался открытым вопрос о возможности таких профилей (фактически о единственности конфузорного течения) и о свойствах соответствующих решений. Качественный анализ краевой задачи свидетельствует о допустимости многомодовых решений. Однако их явное построение с учетом интегрального условия представляет принципиальные трудности вследствие непродолжимости при $Re \rightarrow 0$.

3. Модификация постановки задачи Джефффри–Гамеля. При помощи модифицированного численно-аналитического метода ускоренной сходимости [10] ниже построено и проведено исследование многомодовых конфузорных течений в широком диапазоне изменения Re . Для определенности взято значение $\beta = 10^\circ = \pi/18$. Получающиеся результаты качественно соответствуют интервалу $0 < \beta \leq \pi/2$.

Краевая задача (1.1), (1.2) может быть записана не относительно функции V от угла θ , а в терминах другой безразмерной функции y от нормированного аргумента x , изменяющегося (для удобства расчетов [8]) на единичном интервале:

$$y = 2\beta V, \quad x = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} + 1 \right), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.1)$$

При помощи преобразования (3.1) приведем исходную краевую задачу к виду

$$y'' + a^2 y - b y^2 = \lambda, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y(x) dx = 1 \quad (3.2)$$

$$a = 4\beta, \quad b = 2\beta Re \geq 0, \quad \lambda = 8\beta^3 C = y''(0) = y''(1), \quad \gamma = y'(0)$$

Анализ задачи (3.2) показывает, что при $b \sim 1$, $b \gg 1$ решение существенно зависит не от β и Re , а от параметра b [4, 9, 22, 23].

Введем также функцию $z(x)$, характеризующую расход жидкости согласно интегральному условию (3.2)

$$z' = y - 1, \quad z(0) = z(1) = 0 \quad (3.3)$$

Краевая задача (3.2), (3.3) представима в виде стандартной нелинейной краевой задачи четвертого порядка (без интегрального условия).

Исходя из (1.1) находим, что давление p связано с профилем скорости $y(x)$ следующим соотношением:

$$p(r, \theta) = \frac{2\rho Q^2 \lambda - a^2 y(x)}{r^2 a^2 b} \quad (3.4)$$

Из (3.4) видно, что при $b \rightarrow 0$ давление становится неограниченным (при фиксированных β , ρ , Q) и имеет место особенность, хотя решение задачи (3.2), (3.3) может быть ограниченным и регулярным. Кроме того, для практического осуществления радиальности движения давление на любом расстоянии r должно определенным и заранее неизвестным образом (3.4) зависеть от x (или угла θ). Эта зависимость устанавливается в результате подстановки найденных $y(x)$ и λ .

Регулярно продолжаемое по b при $b \rightarrow 0$ решение y_0 , λ_0 , γ_0 задачи (3.2), (3.3) имеет вид

$$y_0(x) = \frac{2\beta}{D} [\cos 2\beta(2x - 1) - \cos 2\beta], \quad D(\beta) = \sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta$$

$$\beta \neq \beta^* = \arg D(\beta) \approx (128.7)^\circ \approx 2.247 \quad (3.5)$$

$$\lambda_0 = -\frac{32\beta^3}{D} \cos 2\beta, \quad \gamma_0 = \frac{8\beta^2}{D} \sin 2\beta$$

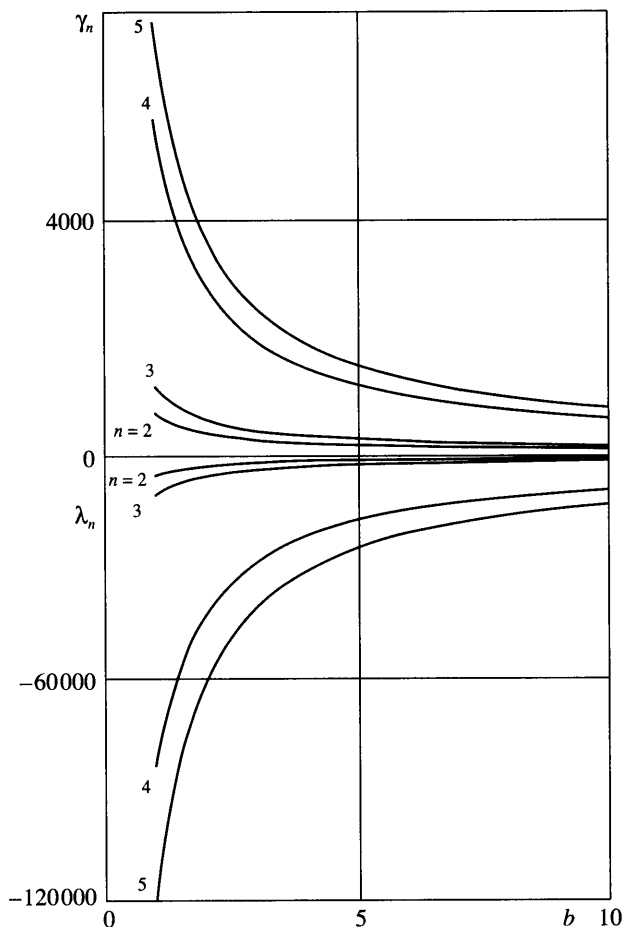
Соответствующее решению (3.5) давление $p_0(r, \theta)$ согласно (3.4) записывается следующим образом:

$$p_0(r, \theta) = -\frac{2Q\mu \cos 2\theta}{r^2 D(\beta)} \quad (3.6)$$

Отсюда вытекает, что $p_0 \rightarrow 0$ при $Q \rightarrow 0$ ($Re \rightarrow 0$) и $p_0 \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$ ($Re \rightarrow 0$).

4. Новые многомодовые и несимметричные решения, не продолжаемые регулярно по Re . Для определенности рассматривается фиксированное значение угла раствора $\beta = 10^\circ$, т.е. $a \approx 0.7$, часто встречающееся в прикладных задачах [8]. Многочисленные расчеты проводились также для других значений a . Величина $b = 2\beta Re$ изменялась в широких пределах: $0 < b \leq 200$, т.е. $0 < Re \leq 600$ для указанного значения β . Высокоточное с относительной погрешностью 10^{-7} – 10^{-8} (абсолютной $O(10^{-5})$) решение задачи (3.2)–(3.4) строится с помощью модифицированного метода ускоренной сходимости типа алгоритма Ньютона и процедуры продолжения по параметру [8]. Ранее [9, 10] он был успешно применен авторами в классической задаче исследования одномодовых симметричных течений, для которых при $b \rightarrow 0$ и любом a известно точное предельное решение в аналитической форме (см. разд. 3).

Существенные трудности при построении многомодовых профилей скорости обусловлены вырождением задачи при $b \rightarrow 0$. Это приводит к неограниченным значениям искомых параметров $\gamma(b)$ и $\lambda(b)$, необходимых для интегрирования соответствующей задачи Коши. При некотором фиксированном значении параметра $b = b_0$ (обычно $b_0 \approx 10$) и номере выбранной моды ($n = 2, 3, 4, \dots$) производится трудоемкий неформализованный поиск неизвестных величин γ , λ и их вычисление с высокой точностью, обеспечивающей указанную выше невязку по краевым условиям. Затем для выбранной моды $n \geq 2$ с помощью процедуры продолжения по параметру b строятся универсальные кривые $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ для $0 < b < b_0$ и $b_0 < b < \infty$. Трудности вычислений усугубляются особенно при уменьшении параметра b тем, что $\gamma_n \gg \gamma_1$, $\lambda_n \gg \lambda_1$ (на несколько порядков) и

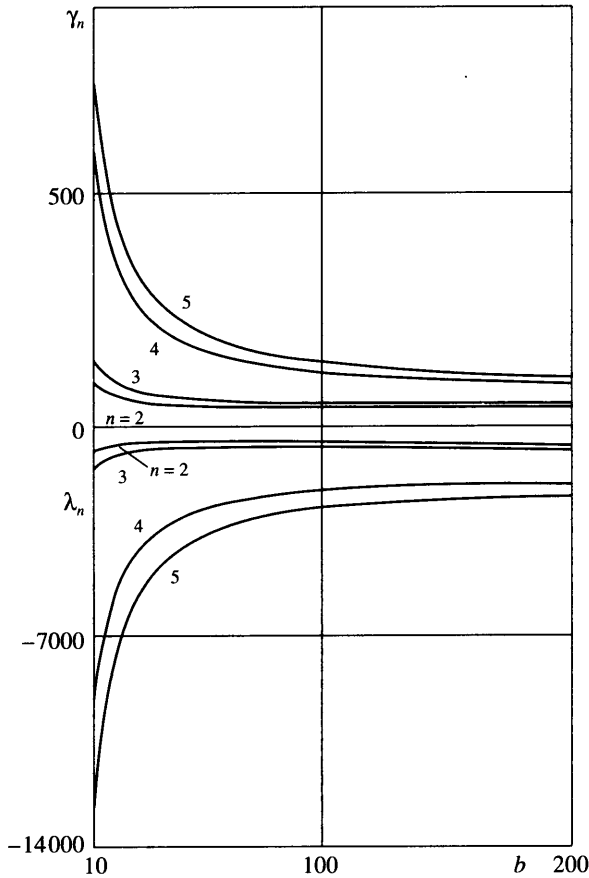


Фиг 1. Зависимости параметров $y'_n(0) = \gamma_n$ и $y''_n(0) = \lambda_n$ от $b = 2\beta Re$ при $n = 2, 3, 4, 5$ ($\gamma_n > 0, \lambda_n < 0$)

достигают при $b = 1$ больших значений, например, $\gamma_5 \sim 10^4$, $\lambda_5 \sim 10^5$. При этом требуется проведение расчетов с весьма высокой относительной и абсолютной точностью. Указанными обстоятельствами, по-видимому, объясняется отсутствие до настоящего времени убедительных результатов по определению и анализу многомодовых решений в задаче Джеффри–Гамеля.

Ниже излагается и комментируется графическое представление результатов численно-аналитического исследования многомодовых решений для $n = 2, 3, 4, 5$. Они сравниваются с соответствующими кривыми, отвечающими классическому решению ($n = 1$) для различных значений угла β . Установлено, что при $n \geq 2$ нечетные моды n отвечают симметричным (относительно $x = 1/2$, т.е. $\theta = 0$) решениям, а четные n – несимметричным. Несимметричные четные моды ($n = 2, 4, \dots$) появляются парами $y_n^+(x) = y_n^-(1 - x)$ вследствие равноправности стенок конфузора. Поэтому далее рассматриваются лишь функции $y_n = y_n^+(x)$, которым соответствуют $\gamma_n(b) > 0$.

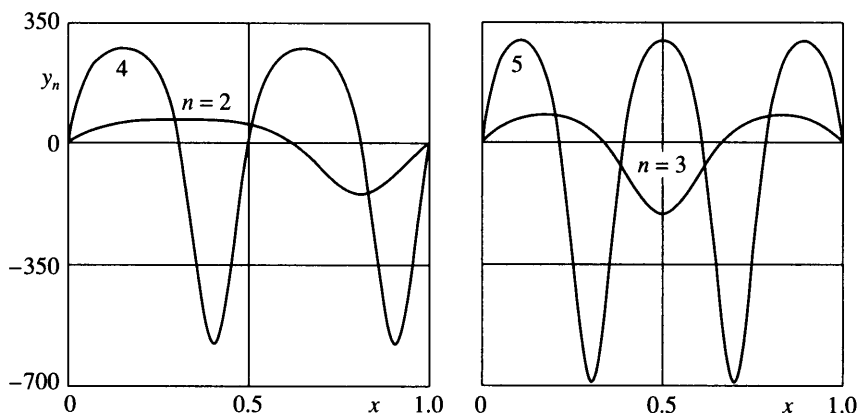
Течения обладают определенными структурными свойствами. Положительные максимумы ($n \geq 3$) и отрицательные минимумы ($n \geq 4$) функций $y_n(x, b)$ имеют одинако-



Фиг 2. Продолжение зависимостей $y'_n(0) = \gamma_n$ и $y''(0) = \lambda_n$ от $b = 2\beta Re$ при тех же n для больших значений b

вые значения. Во всех нулях x_i , $i = 1, \dots, n + 1$, функции $y_n(x, b)$ (при фиксированных n, b) производные y'_n равны по абсолютной величине, т.е. $\gamma_n(b) = \pm y'_n(x_i, b)$. Это свойство, очевидно, следует из первого интеграла для уравнения (3.2) (типа соотношения (2.1)). Оно служит дополнительной проверкой правильности численных расчетов с помощью метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру $b = 2\beta Re$. Таким образом, в определенном смысле многомодовое решение является “комбинацией” (совокупностью) одномодового и двухмодового течений, что, по-видимому, следует из общего свойства радиальности движения.

На фиг. 1, 2 в различных масштабах для $1 \leq 2\beta Re \leq 10$ и $10 \leq b \leq 200$ приведены графики функций γ_n и λ_n . Масштабы для $\gamma_n > 0$ и $\lambda_n < 0$ также сильно различаются. Они определяют решения краевой задачи (3.2), (3.3) интегрированием задач Коши при фиксированном значении угла β . Кривые группируются парами $n = 2, 3$ и $n = 4, 5$. Интересные свойства этих кривых проявляются вблизи $b = 0$, а графики имеют вертикальные асимптоты: $\gamma_n \rightarrow +\infty$, $\lambda_n \rightarrow -\infty$ при $b \rightarrow 0$. Напомним, что классическому одномодовому решению отвечают конечные значения γ_1, λ_1 [4, 8]. Следует также отметить большие абсолютные значения γ_n, λ_n для $b = 2\beta Re \sim 1$, причем разности $\gamma_n - \gamma_{n-1}, \lambda_{n-1} - \lambda_n$ неограниченно возрастают при $b \rightarrow 0$, а также при увеличении номера n . Каждая кри-



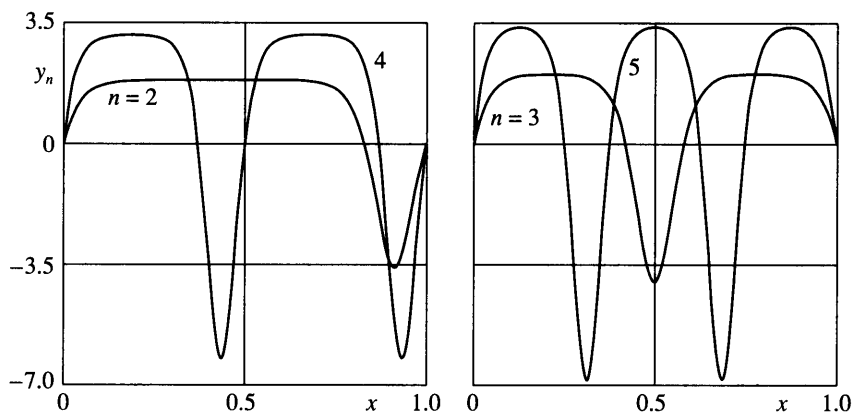
Фиг 3. Четномодовые ($n = 2, 4$) и нечетномодовые ($n = 3, 5$) профили скорости $y_n(x)$ для $b = 2\beta Re = 1$ (значительные вариации)

вая γ_n достигает минимального значения при некотором довольно большом $b = b_n^\gamma \sim 10^2 - 10^3$ и весьма медленно стремится сверху к асимптоте $\gamma_\infty = \sqrt{4b/3}$. Аналогично кривые λ_n достигают максимальных значений при некоторых $b = b_n^\lambda \sim 10^2$ и также весьма медленно стремятся снизу к асимптоте $\lambda_\infty = -b$. Отсюда следует важный в гидромеханическом аспекте теоретический вывод: все моды стационарных течений, в том числе основная ($n = 1$), имеют своим пределом по некоторой метрике для $0 < x < 1$ течение идеальной жидкости при $b \rightarrow \infty$ ($Re \rightarrow \infty$).

Кривые $\gamma_n(b)$, $\lambda_n(b)$ по существу являются основным результатом исследований, на основе которых интегрированием задачи Коши для уравнений (3.2), (3.3) получаются многочисленные характеристики стационарных течений в конфузоре: профиль скорости V (3.1), давление p (3.4), компоненты тензоров скоростей деформации и напряжений, см. разд. 5. Форма кривых $\gamma_n(b)$, $\lambda_n(b)$ довольно проста, однако их построение сопряжено с весьма трудоемкими высокоточными расчетами, которые существенно усложняются при $b \rightarrow 0$ и $b \rightarrow \infty$. В задаче имеют место резко выраженные "пограничные" эффекты. Вычислительные алгоритмы на основе известных методов функционального анализа (например, Бубнова–Галеркина), метода конечных элементов, конечно-разностных методов не приводят к удовлетворительным результатам.

С целью иллюстрации многомодовых течений на фиг. 3, 4 приведены профили скорости $y_n(x)$, $n = 2, 3, 4, 5$ для двух значений b : относительно малого $b = 1$ (фиг. 3) и сравнительно большого $b = 200$ (фиг. 4). При малых значениях b (или Re) имеют место большие колебания положительных и отрицательных значений скорости, т.е. функций $y_n(x)$. Им отвечают области стока ($y_n > 0$) и истока ($y_n < 0$). Увеличение параметра b приводит к снижению размаха колебаний и уменьшению амплитуды истока. При больших значениях $b \sim 10^2 - 10^3$ наблюдаются явно выраженные формы, отвечающие конфузорному течению слабо вязкой жидкости. Отклонение от профиля течения невязкой жидкости по некоторой метрике стремится к нулю для $0 < x < 1$; вблизи $x = 0$, $x = 1$ ($\theta = \mp\beta$) имеют место типичные пограничные явления.

Отметим, что независимо от параметров угла β и числа Рейнольдса Re несимметричные четномодовые профили ($n = 4, 8, \dots$) обращаются в нуль при $x = 1/2$. Поэтому при построении таких профилей предположение $V(0) = V_0 \neq 0$ [24] несостоятельно. Этот факт в литературе (см., например [25]).



Фиг. 4. Те же профили скорости для $b = 2\beta\text{Re} = 200$; тенденция к асимптотике Кочи на $y_\infty(x)$

5. Кинематические и силовые характеристики стационарных течений. После определения функции $y(x)$ вычисляется компонента скорости v_r и компоненты тензора скоростей деформации:

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= -\frac{Q}{r}V(\theta), \quad V(\theta) = \frac{y(x)}{2\beta}, \quad x = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\beta} + 1\right), \quad y = y_n, \quad n \geq 1 \\ v_{rr} = -v_{\theta\theta} &= \frac{Q}{r^2}V(\theta), \quad v_{r\theta} = -\frac{Q}{2r^2}V'(\theta), \quad V'(\theta) = \frac{y'(x)}{4\beta^2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Формулы (5.1) на основе построенных зависимостей $y(x)$, $y'(x)$ позволяют установить кинематику одно- и многомодовых течений. В частности, функции v_r , v_{rr} , $v_{\theta\theta}$ обращаются в нуль при $\theta = \pm\beta$ и в $n-1$ промежуточных точках. Компонента $v_{r\theta}$ при $\theta = \pm\beta$ в нуль не обращается, так как $y_n \neq 0$ для всех $b > 0$. Они равны нулю в n промежуточных точках, соответствующих экстремумам функций $V_n(\theta)$ или $y_n(x)$. Вследствие симметрии $V'_n(0) = 0$ для нечетных значений индекса n .

Подставляя (5.1) в определяющие соотношения вязкой жидкости, находим давление p и компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} p(r, \theta) &= \frac{\rho Q^2}{2r^2 \text{Re}}(C - 4V(\theta)), \quad C = \frac{\lambda}{8\beta^3} \\ \sigma_{rr} &= -p + \frac{2\rho Q^2}{r^2 \text{Re}}V(\theta) = \frac{\mu Q}{2r^2}(8V(\theta) - C) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p - \frac{2\rho Q^2}{r^2 \text{Re}}V(\theta) = -\frac{\mu Q}{2r^2}C, \quad \sigma_{zz} = -p, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\rho Q^2}{r^2 \text{Re}}V'(\theta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Согласно (5.2) для n -й моды течения давление p и компоненты σ_{rr} , σ_{zz} испытывают по переменной θ вариации, обусловленные колебаниями функций $y_n(x)$. Компонента $\sigma_{r\theta}$ как функция θ ведет себя аналогично $v_{r\theta}$. Компонента $\sigma_{\theta\theta}$ от угла θ не зависит. Для

многомодовых течений $|V'_n(\pm\beta)| \rightarrow \infty$ при $Re \rightarrow 0$, что ведет к неограниченности соответствующих компонент тензоров скорости деформации и напряжений.

На стенках конфузора $\theta = \pm\beta$ компоненты v_r и v_{rr} обращаются в нуль, давление же p и компоненты σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} совпадают по величине с точностью до знака. При $Re \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow \infty$) они становятся неограниченными. Если же $Re \rightarrow 0$ ($Q \rightarrow 0$), то силовые характеристики убывают до нуля.

Рассмотрим случай, когда слабвязкая жидкость близка к идеальной $Re \rightarrow \infty$ ($\mu \rightarrow 0$). Тогда согласно формуле Кочина [4, 23] в первом приближении независимо от номера моды $n = 1, 2, 3, \dots$ ($n \sim 1$) для $y(x)$ имеет место асимптотическое представление

$$y = y_n(x) \approx y_\infty(x) = 1 - 6\{1 + \text{ch}[\text{arch}5 + \sqrt{b/2}(1 - |2x - 1|)]\}^{-1} \quad (5.3)$$

$$y_\infty(0) = y_\infty(1) = 0, \quad \lambda_n \approx \lambda_\infty(b) = -b \rightarrow -\infty$$

Функция $y_\infty(x)$ (5.3) при больших b имеет почти плоскую площадку и пристенный слой, а при $b \rightarrow \infty$ стремится к обобщенной, имеющей прямоугольную форму и бесконечные производные на стенках конфузора.

В результате проведенного анализа могут быть найдены силовые характеристики течения. Компоненты P_r и P_θ вектора напряжений $\mathbf{P}$ в любой точке дуги окружности $r = \text{const}$, $|\theta| < \beta$ согласно (5.2) имеют вид $P_r(r, \theta) = \sigma_{rr}(r, \theta)$ и $P_\theta(r, \theta) = \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)$. В граничных точках $\theta = \pm\beta$ этой дуги получим выражения

$$P_r(r, \pm\beta) = -\frac{\rho Q^2 C}{2r^2 Re}, \quad P_\theta(r, \pm\beta) = -\frac{\rho Q^2}{r^2 Re} V(\pm\beta) \quad (5.4)$$

Из (5.4) следует, что значения P_r на концах дуги одинаковы, а P_θ одинаковы, если число мод четно, и противоположны по знаку, если число мод нечетно.

С помощью (5.4) вычисляется суммарное напряжение, действующее со стороны жидкости на конфузор. Компоненты F_r и F_θ суммарной силы $\mathbf{F}$ (точнее, ее плотности вдоль оси z) на расстоянии r равны

$$F_r(r) = \int_{-\beta}^{\beta} r P_r d\theta = \frac{\rho Q^2}{r Re} (4 - \beta C), \quad F_\theta(r) = \int_{-\beta}^{\beta} r P_\theta d\theta = 0 \quad (5.5)$$

Аналогично (5.5) с помощью квадратуры вычислим плотность мощности сил, обусловленных напряжениями $\mathbf{P}$

$$N = \int_{-\beta}^{\beta} r \sigma_{rr} v_r d\theta = \frac{\rho Q^3}{r^2 Re} \left(\frac{C}{2} - \frac{4}{Re} (V(\beta) - V(-\beta) + 4 - 2\beta C) \right) \quad (5.6)$$

Формулы (5.3)–(5.6) определяют силовые характеристики и затрачиваемую мощность при реализации стационарного режима течения.

Заключение. С помощью высокоточного численно-аналитического метода и процедуры продолжения по параметру построены многомодовые конфузормые решения задачи Джеффри–Гамеля на большом интервале изменения числа Рейнольдса $Re \sim 10^3$. Для определенности взят угол полураствора конфузора $\beta = 10^\circ$ и приведены решения для неизвестных в научной литературе мод с $n = 2, 3, 4, 5$. Четномодовые профили скорости течения несимметричны относительно оси и существуют парами. При этом у

одной из стенок происходит сток жидкости, а у другой – исток. Нечетномодовые профили симметричны, у обеих стенок конфузора происходит сток жидкости, а в центральной части может происходить и сток и исток в зависимости от числа мод.

При $Re \rightarrow \infty$ для всех мод профили скорости стремятся к асимптотике, установленной Н.Е. Кочиным. При $Re \rightarrow 0$ многомодовые течения обладают резко выраженным свойством сингулярности [26], которое для $Re \sim 1$ весьма затрудняет их нахождение. На основе найденного решения определены кинематические, а также локальные и интегральные силовые характеристики, проведено их исследование при больших и малых числах Рейнольдса.

Авторы благодарны А.А.Бармину и А.Г.Куликовскому, внесшим ряд замечаний, которые улучшили содержание статьи и стиль ее изложения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00401, 05-01-00043, 03-01-96539), Гранта Президента РФ (проект МК-3272.2005.10) и Программы НШ 1627.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // *Phil. Mag.* 1915. Ser. 6. V. 29. № 172. P. 455–465.
2. Hamel G. Spiralformige Bewegungen zahen Flüssigkeiten // *Jahres Berich Deutsch. Math. Ver.* 1917. B. 25. S. 34–60.
3. Rosenhead L. The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls // *Proc. Soc. London. Ser. A.* 1940. V. 175. № 963. P. 436–467.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
5. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1970 = Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
8. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакиев С.А., Нестеров С.В. Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 1. С. 44–48.
9. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакиев С.А. Регулярно продолжаемые по числу Рейнольдса решения задачи Джеффри–Гамеля // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 15–32.
10. Акуленко Л.Д., Кумакиев С.А., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 723–741.
11. Sobey I.J., Drazin P.G. Bifurcation of two-dimensional channel flows // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 171. P. 263–287.
12. Banks W.H.H., Drazin P.G., Zatorska M.B. On perturbation of Jeffery–Hamel flow // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 186. P. 559–581.
13. Eagles P.M. Jeffery–Hamel boundary-layer flows over curved beds // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 186. P. 583–597.
14. Fraenkel L.E. Laminar flow in symmetric channels with slightly curved walls. Part I. On the Jeffery–Hamel solutions for flow between plane walls // *Proc. Roy. Soc. London.* 1962. A267. P. 119.
15. Fraenkel L.E. Laminar flow in symmetric channels with slightly curved walls. Pt II. An asymptotic series for the stream function // *Proc. Roy. Soc. London.* 1963. A272. P. 406.
16. Tutty O.R. Nonlinear development of flow in channels with non-parallel walls // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 326. P. 265–284.
17. Kerswell R.R., Tutty O.R., Drazin P.G. Steady nonlinear waves in diverging channel flow // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 501. P. 231–250.
18. Dennis S.C.R., Banks W.H.H., Drazin P.G., Zatorska M.B. Flow along a diverging channel // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 336. P. 183–202.

19. *Шанеев А.В.* Нестационарное автомодельное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 41–46.
20. *Eagles P.M.* The stability of a family of Jeffery–Hamel solutions for divergent channel flow // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. № 1. P. 191–207.
21. *Rivkind L., Solonnikov V.A.* Jeffery–Hamel asymptotics for steady state Navier–Stokes flow in domains with sector-like outlets to infinity // J. Math. Fluid Mech. 2000. V. 2. № 4. P. 324–352.
22. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакиев С.А.* Новые несимметричные и многомодовые решения задачи о течении вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 1. С. 46–50.
23. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 175 с.
24. *Millsaps K., Pohlhausen K.* Thermal distributions in Jeffery–Hamel flows between nonparallel plane walls // J. Aeronaut. Sci. 1953. V. 20. № 3. P. 187–196.
25. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
26. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.V.2005