

УДК 532.516.013.4 : 536.24 : 534.1

© 2005 г. В. А. ДЕМИН

## ВИБРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В НАКЛОННОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОДОГРЕВЕ СНИЗУ

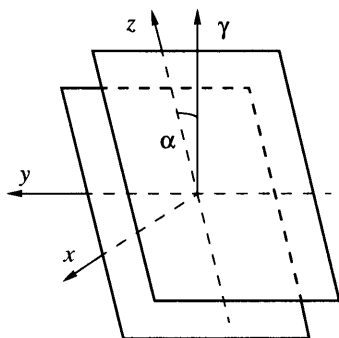
Численно исследована устойчивость механического квазиравновесия наклонного слоя жидкости относительно пространственных возмущений при воздействии высокочастотных вибраций. Показано, что при подогреве снизу для поперечных слою вибраций всегда наиболее опасны спиральные возмущения. Для вертикальных вибраций граница устойчивости определяется пространственными возмущениями, форма которых сложным образом зависит от угла наклона слоя и вибрационного числа Рэлея. В предельном случае тонкого вертикального слоя численно и аналитически выполнен расчет надкритических вибрационно-конвективных движений, изучены сценарии перехода от квазиравновесия к нерегулярным движениям.

*Ключевые слова:* устойчивость, конвекция, высокочастотные вибрации, наклонный слой жидкости, ячейка Хеле – Шоу.

В подогреваемом снизу наклонном слое жидкости с твердыми изотермическими границами неустойчивость равновесия определяется спиральными возмущениями [1]. Экспериментальные данные [2] подтверждают теоретические расчеты. При наличии высокочастотного вибрационного воздействия на полость можно говорить лишь о существовании механического квазиравновесия, которое характеризуется отсутствием осредненного течения, однако в жидкости имеются пульсации скорости, давления и температуры [3, 4].

Устойчивость наклонного слоя жидкости, подвергающегося воздействию высокочастотных вибраций, относительно плоских возмущений рассматривалась в работе [5] для разных фиксированных направлений равновесного градиента температуры и оси вибраций. При вертикальном градиенте температуры состояние квазиравновесия возможно только для двух дискретных направлений вектора вибраций – поперечного слою и вертикального [6]. В [7] представлены результаты исследования устойчивости механического квазиравновесия наклонного слоя жидкости относительно пространственных возмущений специального вида – монотонных спиральных мод. В случае вертикального градиента температуры при поперечных вибрациях спиральные возмущения всегда наиболее опасны. При этом с ростом вибрационного числа Рэлея квазиравновесие становится более устойчивым. Как будет показано ниже, для вертикальных вибраций картина устойчивости выглядит сложнее. При малых значениях вибрационного числа Рэлея в области малых углов наклона (угол отсчитывается от вертикали) порог устойчивости определяется только спиральными возмущениями. При достаточно больших значениях вибрационного числа Рэлея наиболее опасными становятся плоские возмущения. Далее с ростом угла наклона кризис устойчивости определяется спиральными возмущениями. В предельном случае горизонтального слоя имеется вырождение: спиральным и плоским возмущениям отвечает одно критическое число Рэлея. Таким образом, возникает вопрос о роли произвольных пространственных возмущений в общей картине устойчивости.

В данной работе произведен расчет карт устойчивости механического квазиравновесия, подогреваемого снизу наклонного слоя жидкости относительно произвольных



Фиг. 1. Наклонный слой жидкости

пространственных возмущений при воздействии высокочастотных вибраций. Учитывая, что в широком диапазоне углов наклона слоя из всех пространственных возмущений наиболее опасной оказывается так называемая “перевальная” мода, появляется возможность исследования надкритических вибрационно-конвективных течений в приближении Хеле – Шоу. Далее рассматривается предельный случай тонкого вертикального слоя, подвергающегося действию высокочастотных вибраций при подогреве снизу. Ранее свободная конвекция в ячейке Хеле – Шоу при подогреве снизу исследовалась теоретически и экспериментально в работах [8,9], где продемонстрировано согласие результатов теоретических расчетов и экспериментальных данных. Расчет вызванных вибрациями первых критических движений в ячейке Хеле – Шоу, находящейся в условиях невесомости, произведен в [10] для разных значений отношения сторон широких граней.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим наклонный слой жидкости с идеально теплопроводными твердыми границами. Система координат выбрана так, чтобы ось  $z$  была направлена вдоль слоя под углом  $\alpha$  к вертикали (фиг. 1), а ось  $x$  перпендикулярна слою. Единичный вектор  $\gamma(-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$  направлен вертикально вверх. Пусть слой подвергается высокочастотным вибрациям с круговой частотой  $\Omega$  и малой амплитудой  $b$  вдоль единичного вектора  $\mathbf{n}(-\sin\phi, 0, \cos\phi)$ ;  $\phi$  – угол между вектором  $\mathbf{n}$  и осью  $z$ . Даже если поле тяжести отсутствует, действие высокочастотных вибраций может приводить к возникновению осредненных конвективных движений в жидкости [3, 4]. Это означает, что в общем случае, когда присутствует поле тяжести и слой подвергается высокочастотному вибрационному воздействию, конвективная устойчивость определяется конкуренцией термогравитационного и специфического термовибрационного механизмов возбуждения конвекции. Для анализа задачи воспользуемся известными уравнениями вибрационной конвекции в приближении работы [11]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Ra}T\gamma + \text{Ra}_v(\mathbf{w}\nabla)(T\mathbf{n} - \mathbf{w}) \quad (1.1)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla T \times \mathbf{n}, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $T$ ,  $p$  – осредненные поля скорости, температуры и давления, медленно меняющиеся со временем. Векторное поле  $\mathbf{w}$  – дополнительная “медленная” переменная, пропорциональная амплитуде пульсационной компоненты скорости. В уравнения вхо-

дят три безразмерных параметра: число Рэлея  $Ra$ , вибрационный аналог числа Рэлея  $Ra_v$  и число Прандтля  $Pr$ , которые имеют вид

$$Ra = \frac{g\beta A d^4}{\nu\chi}, \quad Ra_v = \frac{(b\Omega\beta A d^2)^2}{2\nu\chi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь  $\beta$ ,  $\nu$  и  $\chi$  – коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, соответственно;  $2d$  – толщина слоя;  $A$  – характерный градиент температуры;  $g$  – ускорение силы тяжести. Вибрационный параметр  $Ra_v$ , содержащий произведение малой амплитуды колебаний  $b$  на высокую частоту  $\Omega$ , имеет конечное значение. Дополнительными параметрами задачи являются угол наклона слоя  $\alpha$  и угол  $\phi$ , характеризующий ориентацию вектора вибраций.

Граничные условия для осредненной скорости соответствуют условиям прилипания ( $x = \pm 1: \mathbf{v} = 0$ ), в то время как на амплитуду пульсационной компоненты скорости можно наложить лишь условие непротекания ( $x = \pm 1: w_x = 0$ ). Для температуры граничные условия будут оговорены ниже.

**2. Механическое квазиравновесие.** При некоторых условиях в жидкости возможно состояние механического квазиравновесия, в котором в среднем жидкость неподвижна ( $\mathbf{v} = 0$ ). Однако в жидкости имеются пульсации скорости, характеризующиеся векторным полем  $\mathbf{w}$ . Необходимыми условиями существования квазиравновесия являются  $\partial/\partial t = 0$ ,  $\mathbf{v} = 0$ ,  $p = p_0$ ,  $T = T_0$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$ . Уравнения вибрационной конвекции (1.1)–(1.3) принимают форму:

$$Ra(\nabla T_0 \times \boldsymbol{\gamma}) + Ra_v \nabla(\mathbf{w}_0 \mathbf{n}) \times \nabla T_0 = 0, \quad \Delta T_0 = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{rot} \mathbf{w}_0 = \nabla T_0 \times \mathbf{n}, \quad \text{div} \mathbf{w}_0 = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $T_0$ ,  $\mathbf{w}_0$  – равновесные поля температуры и амплитуды пульсационной компоненты скорости. Далее рассмотрим простейшие условия подогрева, когда градиент температуры  $\nabla T_0$  – постоянный вектор. Тогда в размерной форме  $\nabla T_0 = A \mathbf{m}$ , где  $\mathbf{m}(\sin \alpha, 0, -\cos \alpha)$  – единичный вектор, направленный вдоль градиента температуры вертикально вниз, что соответствует подогреву снизу. Уравнение Лапласа для такого распределения температуры удовлетворяется автоматически. Предполагая, что векторное поле  $\mathbf{w}_0$  имеет только одну продольную компоненту, т.е.  $\mathbf{w}_0(0, 0, w_0(x))$ , из (2.2) получим

$$w_0(x) = (m_x n_z - m_z n_x) x \quad (2.3)$$

В этом случае поле  $\mathbf{w}_0$  соленоидально и автоматически удовлетворяет граничным условиям  $w_{0x} = 0$  ( $x = \pm 1$ ). Подстановка выражения (2.3) в первое уравнение системы (2.1) дает “условие гидростатики”

$$Ra(m_z \sin \alpha + m_x \cos \alpha) + Ra_v(m_x n_z - m_z n_x) m_z n_z = 0 \quad (2.4)$$

В общем случае механическое квазиравновесие существует, когда безразмерные параметры  $Ra$  и  $Ra_v$ , а также компоненты векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  связаны соотношением (2.4). Для вертикального градиента температуры квазиравновесие существует только в случае вертикальных и поперечных слою вибраций, причем условие гидростатики (2.4) выполняется при произвольных значениях угла наклона слоя, а также теплового и вибрационного чисел Рэлея.

**3. Задача устойчивости.** Для изучения устойчивости механического квазиравновесия введем малые возмущения полей скорости, температуры и давления:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}', \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}', \quad p = p_0 + p', \quad T = T_0 + T' \quad (3.1)$$

Штрих обозначает малое возмущение полей, а индекс "0" соответствует равносному состоянию. Подставляя (3.1) в основные уравнения (1.1) – (1.3) и опуская штрих, получим после линеаризации систему уравнений для возмущений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} T \gamma + \text{Ra}_v [(w_0 \nabla)(T \mathbf{n} - \mathbf{w}) + (\mathbf{w} \nabla)(T_0 \mathbf{n} - \mathbf{w}_0)] \quad (3.2)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}) = \Delta T, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{div} \mathbf{w} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{w} = \nabla T \times \mathbf{n} \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  – возмущения осредненной и амплитуды пульсационной компоненты скорости. Граничные условия для возмущений скорости, температуры и амплитуды пульсационной компоненты скорости с учетом изотермичности границ имеют вид

$$x = \pm 1: \mathbf{v} = 0, \quad w_x = 0, \quad T = 0 \quad (3.5)$$

Будем искать решение краевой задачи (3.2)–(3.5) в виде нормальных монотонных мод, записав предварительно уравнения в терминах температуры  $T$ , поперечных составляющих осредненной скорости  $v_x$  и амплитуды пульсационной компоненты скорости  $w_x$

$$(T, v_x, w_x) \sim (\vartheta, u, w) \exp\{-\lambda t + i(k_y y + k_z z)\}$$

Здесь  $\vartheta, u, w$  – амплитуды соответствующих возмущений,  $\lambda$  – декремент,  $k_y$  и  $k_z$  – волновые числа.

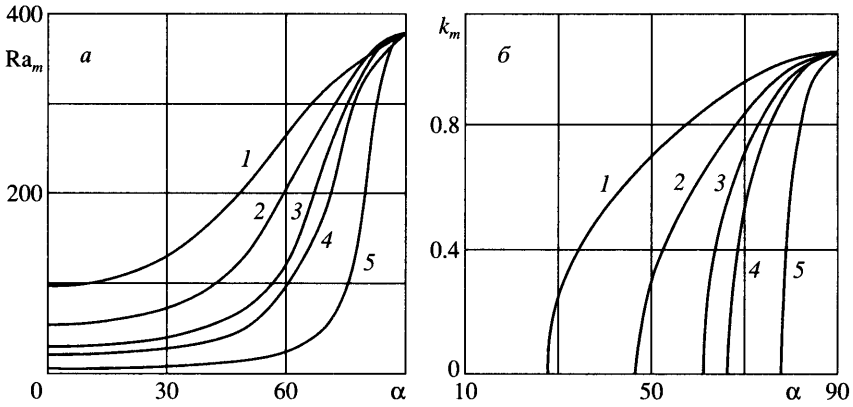
Из всевозможных конфигураций рассматривается вертикальный градиент температуры. Решим две характерные задачи устойчивости относительно произвольных пространственных возмущений при поперечном и вертикальном направлениях оси вибраций. Выпишем в общем виде уравнения для амплитуд  $u(x), w(x)$  и  $\vartheta(x)$ , описывающие эволюцию возмущений.

Полагая декремент возмущений нулю, исследуем устойчивость квазиравновесия относительно нейтральных монотонных возмущений. В этом случае число Рэлея  $\text{Ra}$  играет роль собственного числа спектральной амплитудной задачи, значение которого зависит от параметров задачи  $k_y, k_z, \text{Ra}_v$  и угла наклона  $\alpha$ . Подстановка (2.3) в систему (3.2)–(3.4) с учетом произвольного направления оси вибраций приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} D^2 u - \text{Ra}(k^2 \gamma_x \vartheta + (ik) \delta \gamma_z \vartheta') - \\ - \text{Ra}_v ((ik)(m_x n_z + m_z n_x) \delta w' + m_z n_z^2 (ik) \delta \vartheta' + m_z n_z n_x k^2 \vartheta - \\ - k^2 n_z (m_x n_z - m_z n_x) \delta^2 \vartheta + k^2 (m_x n_x - m_z n_z \delta^2) w) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} D^2 \vartheta + \text{Ra} \gamma_z m_z (1 - \delta^2) \vartheta - (i \delta / k) m_z D u' - m_x D u + \text{Ra}_v m_z (1 - \delta^2) (m_z n_x w + \\ + (i \delta / k) m_z n_z w' + n_z (1 - \delta^2) \vartheta) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} D w = - (ik) \delta n_z \vartheta' - k^2 n_x \vartheta \\ D = \frac{d^2}{dx^2} - k_y^2 - k_z^2, \quad k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$



Фиг. 2. Зависимость критических чисел Рэлея  $Ra_m$  (а) и критических волновых чисел  $k_m$  (б) от угла наклона слоя  $\alpha$ ;  $\delta = 1.0, 0.95, 0.9, 0.85, 0.0$  (кривые 1–5)

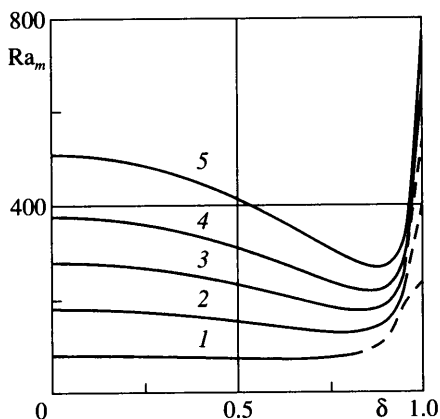
Параметр  $\delta = k_z/k$ , характеризующий ориентацию волнового вектора в плоскости  $(y, z)$ , меняется в пределах от 0 (спиральные возмущения) до 1 (плоские возмущения).

Опишем метод решения. Для нахождения границ устойчивости уравнения (3.6)–(3.8) сводились к системам уравнений 1-го порядка, после чего применялся метод прямого пошагового интегрирования Рунге – Кутты – Фельдберга 4–5-го порядка точности с автоматическим выбором шага [12]. Следуя стандартной схеме решения краевых задач с помощью методов численного интегрирования, системы дифференциальных уравнений сводились к задачам Коши (для выполнения условий на противоположной границе применялась процедура стрельбы). Компьютерный модуль был реализован на языке программирования FORTRAN-90. В ходе расчетов находились собственные значения (критические числа Рэлея) и собственные функции спектральной амплитудной задачи ( $u(x)$ ,  $w(x)$ ,  $\vartheta(x)$ ) в зависимости от параметров  $k_y$ ,  $k_z$ ,  $Ra_v$  и угла наклона  $\alpha$ .

**4. Результаты для поперечных и вертикальных вибраций.** В случае поперечных слою вибраций имеем  $\mathbf{n}(1, 0, 0)$ . Амплитуда пульсационной компоненты скорости равна  $w_0 = \cos \alpha x$ . “Условие гидростатики” (2.4) выполняется для произвольных значений параметров  $Ra$  и  $Ra_v$ . Результаты расчетов карт устойчивости приведены на фиг. 2. Критические числа Рэлея  $Ra_m$  в зависимости от угла наклона  $\alpha$  изображены на фиг. 2, а для фиксированного вибрационного числа Рэлея  $Ra_v = 1000$ . Наиболее опасны из нормальных пространственных возмущений спиральные возмущения с  $\delta = 0$ . Зависимости критического волнового числа от угла наклона слоя приведены на фиг. 2, б для  $Ra_v = 300$ . Область критических волновых чисел, равных нулю, монотонно увеличивается при  $\delta \rightarrow 0$ . Предельные критические углы наклона, при которых происходит смена длинноволновой неустойчивости на ячеистую, равны соответственно для плоских возмущений  $\alpha_c \approx 27^\circ 42'$ , для спиральных возмущений –  $\alpha_c \approx 77^\circ 55'$ .

Таким образом, для поперечных слою вибраций в области малых углов наклона слоя порог конвекции определяется спиральными длинноволновыми возмущениями. Когда угол наклона превышает критическое значение, наиболее опасными становятся ячеистые спиральные возмущения. В предельном случае горизонтального слоя имеется вырождение: всем пространственным возмущениям соответствует одно критическое число Рэлея.

В случае вертикальных вибраций картина устойчивости становится более сложной. Подставляя компоненты вектора  $\mathbf{n}(-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$  в соотношение (2.3), получим  $w_0 = 0$ , т.е. жидкость находится в равновесии, двигаясь вместе с полостью как целое. “Усло-



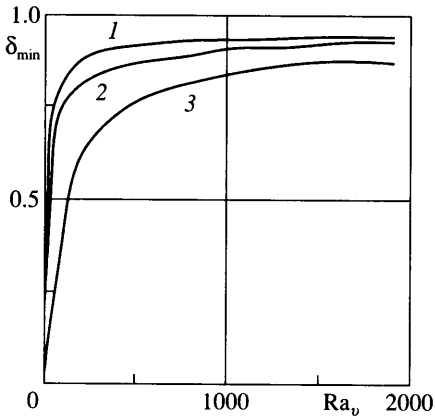
Фиг. 3. Зависимость  $Ra_m$  от  $\delta$  для  $Ra_0 = 200, 500, 800, 1100, 1500$  (кривые 1–5) при  $\alpha = 55^\circ$

вие гидростатики” по-прежнему выполняется тождественно для произвольных углов наклона, теплового и вибрационного чисел Рейля.

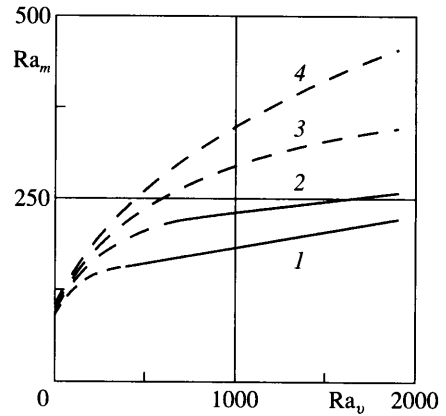
Характерные результаты расчетов границ устойчивости в случае фиксированного угла наклона слоя  $\alpha = 55^\circ$  представлены на фиг. 3 для разных значений вибрационного числа Рейля. Сплошными линиями изображены границы устойчивости для возмущений с  $k = 0$  (длинноволновые моды), а штриховыми – с волновым числом, отличным от нуля. Расчеты показывают, что при малых углах наклона порог устойчивости для всех значений вибрационного числа Рейля определяется длинноволновыми возмущениями, а минимум границ устойчивости находится в области параметров  $\delta \sim 0.9$ . Это свидетельствует о том, что наиболее опасны возмущения, волновой вектор которых близок по направлению к оси  $z$ . Данный тип возмущений, напоминающий по форме плоские возмущения, будем называть “косыми валами”, так как их ось симметрии чуть наклонена относительно оси  $y$ .

Дальнейшее увеличение угла наклона приводит к сдвигу минимума в область промежуточных значений параметра  $\delta$ . Порог устойчивости по-прежнему определяется длинноволновыми структурами, ось симметрии которых поворачивается в плоскости  $(x, z)$  в сторону оси  $z$ . При увеличении угла наклона слоя до  $\alpha \approx 75^\circ$  ячеистые моды начинают конкурировать с длинноволновыми возмущениями. Однако порог устойчивости по-прежнему определяется длинноволновыми возмущениями, причем их волновой вектор поворачивается вдоль оси  $y$ . Вследствие равенства параметра  $\delta$  нулю эта ситуация в эксперименте идентифицируется как неустойчивость относительно спиральных возмущений. При достаточно больших углах наклона ( $\alpha \approx 80^\circ$ ) наиболее опасными становятся спиральные ячеистые возмущения (минимум на границе устойчивости находится при  $\delta = 0$ ). Спиральные ячеистые возмущения остаются наиболее опасными вплоть до вырождения при  $\alpha = 90^\circ$ . В горизонтальном слое произвольным пространственным возмущениям (включая плоские и спиральные возмущения) отвечает одно критическое число Рейля для всех значений вибрационного числа Рейля.

Проанализируем теперь действие вибраций на конвективную устойчивость механического квазиравновесия наклонного слоя жидкости относительно пространственных возмущений. С этой целью для разных углов наклона проминимизируем по  $\delta$  кривые устойчивости, аналогичные тем, которые изображены на фиг. 3. Критические параметры  $\delta_{\min}$ , характеризующие форму наиболее опасных возмущений, в зависимости от вибрационного числа Рейля представлены на фиг. 4. Графики показывают, что с рос-



Фиг. 4. Критические параметры  $\delta_{\min}$  в зависимости от вибрационного числа Рэлея  $Ra_v$ ,  $\alpha = 15, 35, 55^\circ$  (кривые 1–3)



Фиг. 5. Зависимости минимальных чисел Рэлея, соответствующие наиболее опасным модам пространственных возмущений  $Ra_m$  (от вибрационного числа Рэлея  $Ra_v$ ) для  $\alpha = 78, 80, 82, 85^\circ$  (кривые 1–4)

том  $Ra_v$  в области малых углов наклона спиральные возмущения всегда сменяются критическими возмущениями типа “косых валов”. Причем увеличение угла наклона делает переход к “косым валам” менее резким. Критические числа Рэлея  $Ra_m$  растут при увеличении вибрационного аналога числа Рэлея, что соответствует стабилизации квазиравновесия вибрациями. Здесь наиболее опасны пространственные длинноволновые возмущения. В случае больших углов наклона картина устойчивости становится более сложной (фиг. 5). Расчеты для  $\alpha = 78$  и  $80^\circ$  показывают, что критические числа Рэлея при малых  $Ra_v$  соответствуют спиральным ячеистым возмущениям. Однако с ростом вибрационного числа Рэлея неустойчивость приобретает длинноволновый характер. При  $\alpha = 82$  и  $85^\circ$  порог устойчивости определяется только спиральными ячеистыми возмущениями.

**5. Надкритические режимы в вертикальном слое.** Анализ формы наиболее опасных возмущений дает важный результат: для малых углов наклона слоя наиболее опасной является длинноволновая спиральная мода или возмущения типа “косых валов”. Как показывают расчеты, нижний уровень спектра этих возмущений соответствует модам “перевального” типа [1, 2]. При моделировании конвекции это позволяет использовать приближение плоских траекторий, согласно которому в жидкости в широком диапазоне управляющих параметров возможны конвективные движения только в плоскости широких граней ( $y, z$ ). Тонкий вертикальный слой, в котором реализуются конвективные движения в плоскости широких граней, называется ячейкой Хеле – Шоу. Приближение Хеле – Шоу позволяет изучать конвективные режимы при больших надкритичностях, что дает возможность проанализировать сценарии перехода к хаосу. Далее будет рассматриваться ячейка Хеле – Шоу в форме прямоугольного параллелепипеда, два линейных размера которого много больше третьего:  $h, l \gg d$ , где  $h$  – высота полости,  $l$  – длина. Полость имеет идеально теплопроводные широкие грани, на которых поддерживается вертикальный градиент температуры, соответствующий подогреву снизу. Пусть узкие вертикальные грани теплоизолированы, горизонтальные – идеально теплопроводны. Ранее задача в подобной постановке без вибрационного воздействия решалась в [6] методом Галеркина, а с учетом вибраций, но в условиях не-

весомости рассматривалась в [10], где с помощью метода конечных разностей произведен расчет первых критических движений в зависимости от соотношения сторон широких граней. С экспериментальной точки зрения интерес представляет ситуация, когда полость подвергается высокочастотным горизонтальным вибрациям, ось которых ориентирована продольно широким граням  $\mathbf{n}(0, 1, 0)$ . В общем случае отношение сторон широких граней  $l/h$  является дополнительным параметром задачи, однако в данной работе при проведении расчетов отношение сторон было равно  $1 : 5 : 10$ .

Для теоретического описания осредненных конвективных движений использовались уравнения термовибрационной конвекции (1.1)–(1.3). Геометрия позволила свести трехмерную задачу к плоской, поэтому анализ вибрационной конвекции выполнялся на основе уравнений, записанных в терминах функций тока и температуры. Численные и аналитические расчеты различных режимов вибрационной конвекции производились с помощью обобщенного метода Галеркина – Канторовича. Для этого поля функций тока и температуры разлагались в ряды по пространственным базисным функциям с амплитудами, зависящими от времени (в качестве базисных использовались тригонометрические функции):

$$\Psi = \sum_{n,m} \Psi_{n,m}(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} y\right) \sin\left(\frac{\pi m}{h} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

$$T = \sum_{n,m} T_{n,m}(t) \cos\left(\frac{\pi n}{l} y\right) \sin\left(\frac{\pi m}{h} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

$$F = \sum_{n,m} F_{n,m}(t) \cos\left(\frac{\pi n}{l} y\right) \cos\left(\frac{\pi m}{h} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

Разложения температуры и функций тока в ряды ограничивались набором базисных функций со следующими номерами:

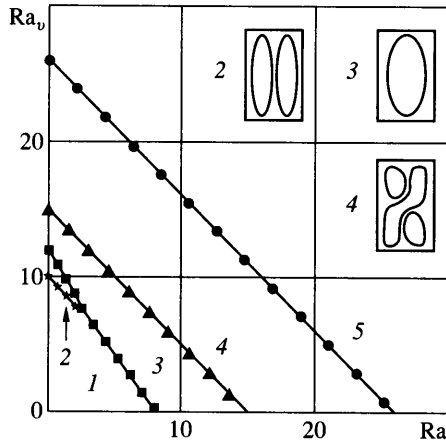
$$\{\Psi\}: (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (3.1)$$

$$\{T, F\}: (0.1), (0.2), (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (3.1)$$

Функция тока амплитуды пульсационной компоненты скорости раскладывается, как и температура, по семи базисным функциям. Уравнение для функции тока амплитуды пульсационной компоненты скорости не является эволюционным. Интегрирование этого уравнения дает систему алгебраических уравнений, которая позволяет выразить амплитудные коэффициенты функции тока “пульсационного” поля через соответствующие амплитуды температуры. Таким образом, “вибрационная сила” в уравнениях для амплитуд функции тока осредненной компоненты скорости полностью выражается через амплитуды температурного поля. Интегрирование уравнений Навье – Стокса и переноса тепла с соответствующими весами дает систему 12 обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд, описывающую эволюцию возмущений в системе. Система амплитудных уравнений решалась численно методом пошагового интегрирования Рунге – Кутты – Фельдберга 4–5-го порядка точности. В ходе расчетов использовался метод установления.

В случае достаточно малых значений гравитационного и вибрационного чисел Рэлея в подогреваемой снизу ячейке Хеле – Шоу реализуется состояние механического квазиравновесия. В жидкости, находящейся в состоянии квазиравновесия, отсутствует осредненное конвективное движение, и устанавливается линейное распределение температуры:  $\Psi_0 = 0$ ,  $T_0 = -z$ . Наличие пульсаций в жидкости характеризуется квазиравновесным значением функции тока амплитуды пульсационной компоненты скорости:





Фиг. 6. Карта устойчивости виброконвективных режимов в вертикальном слое: 1 – квазиравновесие, 2 – двухвихревое течение, 3 – одновихревое течение, 4 – колебания с перезамыканием угловых вихрей, 5 – нерегулярные колебания с перезамыканием угловых вихрей

$F_0 = z^2/2$ . В линейной постановке расчет границ устойчивости относительно монотонных возмущений дает следующий результат:

$$Ra_{n,m} = \frac{\pi^4}{16n^2} (n^2 + m^2 s) (4p[n^2 + m^2 s] + 1)^2 - Ra_v \frac{n^2}{n^2 + m^2 s} \quad (5.1)$$

$$s = l^2/h^2, \quad p = 1/l^2.$$

Из (5.1) видно, что в отсутствие вибраций наиболее опасны одновихревые движения, в другом предельном случае больших значений вибрационного числа Рэлея и малых гравитационных чисел Рэлея порог устойчивости определяется двухвихревой модой.

Из “полной” системы дифференциальных уравнений может быть выделена замкнутая триpletная подсистема (одна амплитуда для функции тока, две – для температуры), которая отличается от классического триплета Лоренца наличием дополнительного слагаемого, характеризующего осредненное вибрационное воздействие. Триpletная подсистема допускает аналитическое решение, что позволяет построить стационарные одновихревые движения для разных значений числа Прандтля, вибрационного и гравитационного чисел Рэлея. Решение, соответствующее стационарному одновихревому режиму, “мягко” ответвляется от квазиравновесия, а амплитуда движения в случае малых надкритичностей растет по корневому закону при увеличении числа Рэлея.

Численный анализ “полной” системы амплитудных уравнений показывает, что в случае малых значений вибрационного числа Рэлея при переходе через границу устойчивости механического квазиравновесия за счет увеличения гравитационного числа Рэлея “мягко” ответвляется стационарный одновихревой режим. С ростом гравитационного или вибрационного чисел Рэлея стационарное одновихревое течение сменяется сложным четырехвихревым режимом с периодическим перезамыканием вихрей (область 4, фиг. 6). Дальнейшее увеличение управляющих параметров приводит к хаотизации колебательного четырехвихревого конвективного движения. В условиях микрогравитации при увеличении вибрационного числа Рэлея квазиравновесие сменяется двухвихревым режимом (область 2, фиг. 6). Далее рост управляющего параметра при-

водит к перестройке двухвихревого режима в одновихревой, который впоследствии переходит в четырехвихревой режим с периодическим перезамыканием вихрей. После потери устойчивости нестационарный четырехвихревой режим с перезамыканием вихрей сменяется нерегулярными колебаниями.

Таким образом, численные расчеты показывают, что с увеличением управляющих параметров  $Ra$  и  $Ra_0$  возможны два сценария перехода от квазиравновесия к нерегулярным колебаниям. В случае малых чисел Рэлея при увеличении вибрационного числа Рэлея реализуется следующая последовательность конвективных режимов: квазиравновесие  $\rightarrow$  двухвихревой режим (мода 2.1)  $\rightarrow$  одновихревой режим (мода 1.1)  $\rightarrow$  регулярные колебания с перезамыканием вихрей  $\rightarrow$  нерегулярные колебания. В противоположном случае малых значений вибрационного числа Рэлея с ростом теплового числа Рэлея наблюдается другая последовательность конвективных режимов: квазиравновесие  $\rightarrow$  одновихревой режим  $\rightarrow$  регулярные колебания с перезамыканием вихрей  $\rightarrow$  нерегулярные колебания.

**Заключение.** Исследована устойчивость механического квазиравновесия наклонного слоя жидкости, находящегося в статическом гравитационном и высокочастотном вибрационном полях относительно произвольных пространственных возмущений. Численно получены карты устойчивости на плоскости критическое число Рэлея – вибрационное число Рэлея для разных значений угла наклона слоя.

При вибрациях, поперечных широким граням слоя, порог устойчивости определяется спиральными возмущениями для всех углов наклона слоя. В случае вертикальных вибраций обнаружена сложная картина неустойчивости, когда форма наиболее опасных возмущений непрерывным образом меняется вслед за изменением угла наклона слоя или вибрационного числа Рэлея.

В частном случае вертикального слоя изучена последовательность надкритических режимов вибрационной конвекции и переход к хаосу. Параллельные широким граням горизонтальные вибрации индуцируют конвекцию в ячейке Хеле – Шоу даже в отсутствие силы тяжести (явление термовибрационной конвекции).

В случае малых значений управляющих параметров в жидкости возможно состояние механического квазиравновесия. Когда термовибрационный механизм возбуждения конвекции превалирует над термогравитационным, порог устойчивости квазиравновесия определяется двухвихревой стационарной модой.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта Урал – 2004 № 04-02-96026), АФГИР (код проекта РЕ-009-0), а также в рамках государственной программы поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-1981.2003.1).

Автор статьи выражает признательность Д.В. Любимову за поддержку данной работы и полезные замечания, сделанные при ее выполнении.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Иоршина С.М. О конвективной неустойчивости равновесия наклонного слоя жидкости относительно пространственных возмущений // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 296–300.
2. Путин Г.Ф., Старикова Т.Е. Конвективная устойчивость равновесия плоского наклонного слоя жидкости // Гидродинамика. Изд-во Перм. ун-та, 1975. Пермь: Вып. 6. С. 13–21.
3. Гуришени Г.З., Жуховицкий Е.М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3. С. 580–584.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 12–19.
5. Demin V.A., Gershuni G.Z., Verkholantsev I.V. Mechanical Quasiequilibrium and thermovibrational convective instability in an inclined fluid layer // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1996. V. 39. № 9. P. 1979–1991.

6. Гершуни Г.З., Демин В.А. Термовибрационная конвективная неустойчивость механического квазиравновесия наклонного слоя жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 1. С. 8–15.
7. Демин В.А. Термовибрационная конвективная неустойчивость наклонного слоя жидкости относительно спиральных возмущений // 4-й Сиб. семинар по устойчивости течений гомогенных и гетерогенных жидкостей. Тез. докл. Новосибирск, 1997. С. 42, 43.
8. Любимов Д.В., Путин Г.Ф., Чернатынский В.И. О конвективных движениях в ячейке Хеле – Шоу // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 3. С. 554–556.
9. Мызникова Б.И. Численное исследование надкритических режимов тепловой конвекции в ячейке Хеле – Шоу при подогреве снизу // Исследование тепловой конвекции и теплопередачи. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1981. С. 23–31.
10. Браверман Л.М. О вибрационной тепловой конвекции в ячейке Хеле – Шоу // Конвективные течения. Пермь: Изд-во Перм. пед. ин-та, 1989. С. 73–78.
11. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 51–55.
12. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер М. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.

Пермь

Поступила в редакцию  
3.III.2005