

УДК 532.51.013.4

© 2005 г. М. В. КАЛАШНИК, Д. Г. ЛОМИНАДЗЕ, Г. Д. ЧАГЕЛИШВИЛИ

ЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕЧЕНИЯХ С ПОСТОЯННЫМ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ СДВИГОМ

С использованием немодального анализа описана динамика возмущений в потоках мелкой воды и несжимаемой стратифицированной жидкости с постоянным горизонтальным сдвигом. Показано, что по значению потенциальной завихренности возмущения в сдвиговом потоке можно разделить на два класса: быстроосциллирующие волновые возмущения с нулевой потенциальной завихренностью и медленные вихревые возмущения с потенциальной завихренностью отличной от нуля. Аналитически (метод ВКБ) и численно изучены основные особенности динамики волновых и вихревых возмущений в случаях слабых и сильных сдвигов. Показано, что на больших временах энергия волновых возмущений растет линейно, т.е. имеет место алгебраическая неустойчивость сдвигового потока, связанная с нарастанием быстрых волновых возмущений. Эта неустойчивость может играть важную роль в процессах развития турбулентности, генерации поверхностных и внутренних волн.

Ключевые слова: сдвиговые течения, неустойчивость, немодальный анализ, потенциальный вихрь, волны.

Основной недостаток спектральной теории гидродинамической устойчивости состоит в том, что для широкого класса гидродинамических течений (без точек перегиба) соответствующая спектральная задача не имеет решений в виде нормальных мод дискретного спектра. Информацию о поведении возмущений в этом случае дает непрерывный спектр, т.е. фактически полное решение задачи с начальными данными. Представление решения начальной задачи с помощью собственных функций непрерывного спектра крайне сложно и поддается анализу лишь в асимптотике на больших временах [1]. Существенных упрощений можно достичь, рассматривая неограниченные течения с постоянными (или почти постоянными) сдвигами. Для таких течений решение начальной задачи легко построить, переходя в динамических уравнениях из лабораторной в движущуюся с потоком систему координат и рассматривая поведение отдельной пространственной Фурье-гармоники. Подобный подход, восходящий к Кельвину [2], в последние годы получил широкое распространение и приобрел специальное название – немодальный анализ [3–8]. С использованием немодального анализа достаточно полно изучена линейная динамика возмущений в потоках стратифицированной жидкости с постоянным вертикальным сдвигом [5–8].

В настоящей работе этот подход применяется к течениям с постоянным горизонтальным сдвигом в рамках модели мелкой воды и модели несжимаемой стратифицированной жидкости. Установлено, что по значению потенциальной завихренности возмущения в сдвиговом потоке можно разделить на два класса – быстроосциллирующие волновые возмущения с нулевой потенциальной завихренностью и медленные вихревые возмущения с потенциальной завихренностью отличной от нуля. Обнаружена ранее неизвестная алгебраическая неустойчивость сдвигового потока, связанная с нарастанием быстрых волновых возмущений (модифицированных сдвигом гравитационных волн). Описан эффект скачкообразного возникновения волновых возмущений.

1. Основные уравнения и классификация возмущений. Движения жидкости в модели мелкой воды описываются системой уравнений [9]

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{dv}{dt} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad \frac{dh}{dt} + h \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u, v – компоненты вектора скорости \mathbf{u} вдоль осей x, y соответственно, h – глубина (уровень) жидкости, g – ускорение свободного падения.

Из (1.1) следует лагранжев закон сохранения потенциальной завихренности [9, 10]

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad Q = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

который отражает закон сохранения момента количества движения для столба жидкости высоты h и играет фундаментальную роль в теории вихревых течений мелкой воды [9, 10].

Система (1.1) имеет точное решение

$$\mathbf{u} = (Ay, 0), \quad h = H = \text{const} \quad (1.3)$$

описывающее плоскопараллельное течение с постоянным горизонтальным сдвигом $A > 0$ и потенциальной завихренностью $Q = -A/H$. Представляя $h = H(1 + \eta)$, $\eta \ll 1$, $u = Ay + u'$, $v = v'$, для малых отклонений от (1.3) имеем линейную систему (штрихи опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + Av + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{Dv}{Dt} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad \frac{D\eta}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + Ay \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $c = \sqrt{gH}$ – скорость длинных волн. Систему (1.4) рассматриваем в области $-\infty < x, y < \infty$ с начальными условиями: при $t = 0$ $(u, v, \eta) = (u^0(x, y), v^0(x, y), \eta^0(x, y))$.

Из (1.4) следует закон сохранения

$$\frac{Dq}{Dt} = 0, \quad q = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + A\eta \quad (1.5)$$

представляющий собой линеаризованную форму (1.2). Действительно, обозначая вновь малые отклонения штрихами, найдем

$$Q = \frac{1}{H(1 + \eta)} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} - A \right) = \frac{-A}{H} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} + A\eta \right) + 0(\eta^2)$$

Рассмотрим для (1.4) задачу с начальными условиями, заданными одной пространственной Фурье-гармоникой. В соответствии с общей схемой немодального анализа [3–8] для нахождения решения перейдем в (1.4) к новым независимым переменным

$$t_1 = t, \quad x_1 = x - Ayt, \quad y_1 = y \quad (1.6)$$

С учетом формул для преобразования производных

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_1} - At_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} - Ay_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

в новых переменных получим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} + Av + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t_1} + c^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_1} - At_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1} - At_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) = 0$$

коэффициенты которой зависят только от времени. Ее решение ищем в виде

$$(u, v) = (u(t_1), v(t_1)) \cos(kx_1 + ly_1), \quad \eta = \eta(t_1) \sin(kx_1 + ly_1) \quad (1.7)$$

где k, l – соответственно волновые числа в направлении осей x и y , а $u(t_1), v(t_1), \eta(t_1)$ в правой части амплитуды, зависящие только от времени. Здесь амплитуды обозначены теми же символами. После подстановки (1.7) получим систему уравнений для амплитуд (ниже удобно обозначать время через t):

$$\frac{du}{dt} = -Av - c^2 k \eta, \quad \frac{dv}{dt} = -c^2 (l - Akt) \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = ku + (l - Akt)v$$

Принимая в качестве масштабов t, u, v соответственно A^{-1}, c, c , последнюю систему запишем в безразмерной форме

$$\frac{du}{dt} = -v - R\eta, \quad \frac{dv}{dt} = -Rp(t)\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = R(u + p(t)v) \quad (1.8)$$

$$R = ck/A, \quad p(t) = t_* - t, \quad t_* = l/k$$

где R – безразмерный параметр, характеризующий влияние сдвига. В физических переменных решение (1.7) описывает гармоническое возмущение с переменной амплитудой и фазой $\Theta = kx + (l - Akt)y$. Поскольку в направлении y волновое число зависит от времени: $l(t) = l - Akt$, линии равной фазы вращаются вокруг оси x , занимая в пределе $t \rightarrow \infty$ горизонтальное положение, параллельное потоку. Входящий в (1.8) параметр t_* задает начальную ориентацию линий равной фазы: при $t_* > 0$ угол между линиями равной фазы и направлением потока тупой, при $t_* < 0$ – острый.

Система (1.8) имеет первый интеграл

$$v - p(t)u - R^{-1}\eta = q = \text{const} \quad (1.9)$$

отражающий закон сохранения потенциальной завихренности для возмущений. С использованием (1.9) систему (1.8) можно свести к одному уравнению второго порядка относительно u :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + R^2 \omega^2(t)u = R^2 (t - t_*)q, \quad \omega^2(t) = 1 + (t - t_*)^2 \quad (1.10)$$

Переменные v, η связаны с u соотношениями, вытекающими из (1.8), (1.9)

$$v = \frac{R^2}{1 + R^2} \left[q + p(t)u - R^2 \frac{du}{dt} \right], \quad \eta = \frac{-R}{1 + R^2} \left[q + p(t)u + \frac{du}{dt} \right] \quad (1.11)$$

Уравнение (1.10) является неоднородным (с правой частью) уравнением колебаний математического маятника с переменной частотой. Из этого уравнения и соотношений (1.11) следует, что общее решение системы (1.8) можно представить в виде суммы

$$(u, v, \eta) = (u_w, v_w, \eta_w) + (u_v, v_v, \eta_v) \quad (1.12)$$

где первое слагаемое в правой части (далее волновой компонент решения) отвечает общему решению однородного уравнения (1.10), а второе слагаемое (вихревой компо-

нент решения) отвечает частному решению неоднородного уравнения ($q \neq 0$). Разделение возмущений на вихревые и волновые по значению потенциальной завихренности соответствует аналогичному разделению возмущений на стационарные (геострофические) и нестационарные (волновые), принятому в классической линейной теории геострофической адаптации [10]. В физических переменных волновые возмущения описывают модифицированные сдвигом поверхностные гравитационные волны.

В общем случае эволюция компоненты скорости u описывается уравнением в частных производных:

$$\frac{D^2 u}{Dt^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = c^2 \left[\frac{\partial q^0(x - Aty, y)}{\partial y} - At \frac{\partial q^0(x - Aty, y)}{\partial x} \right] \quad (1.13)$$

$$q^0(x, y) = \frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y} + A\eta^0$$

переменные размерны. Действительно, закон сохранения (1.5) может быть легко проинтегрирован

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + A\eta = q^0(x - Ayt, y)$$

Применяя к первому уравнению (1.4) оператор D/Dt и учитывая последнее соотношение, получаем (1.13). Уравнение (1.13) имеет второй порядок по времени, а не третий, хотя система (1.4) – третьего порядка, что связано с наличием закона сохранения. Переходя в (1.13) к переменным t_1, x_1, y_1 и отыскивая решение в форме (1.7), получим уравнение (1.10).

2. Анализ энергетики. Прежде чем переходить к построению решений, полезно предварительно рассмотреть вопросы энергетики. Для системы (1.8) энергетические уравнения (уравнения баланса энергии) можно записать в различных формах. Стандартная форма связывает изменение энергии с работой напряжения Рейнольдса:

$$\frac{dE}{dt} = -uv, \quad E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \eta^2) \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что энергия возмущений растет, если напряжение Рейнольдса $uv < 0$, и убывает, если $uv > 0$. Наряду с (2.1) существует другая форма, более удобная для анализа. Легко проверить, что из (1.8) следует соотношение $0.5d(v^2 + \eta^2)/dt = Ru\eta$. Умножая последнее соотношение на R^{-2} , складывая с (2.1) и используя первый интеграл (1.9), приходим ко второй форме энергетического уравнения

$$\frac{dE_*}{dt} = -u[p(t)u + q], \quad E_* = \frac{1}{2}[u^2 + (1 + R^{-2})v^2 + (1 + R^{-2})\eta^2] \quad (2.2)$$

где E_* – модифицированная энергия (квадрат нормы возмущений). Очевидно, при $R \gg 1$ (слабый сдвиг): $E_* \approx E$. Уравнение (2.2) удобно тем, что позволяет проанализировать изменения E_* , не решая систему (1.8). Для волновых возмущений ($q = 0$) из (2.2) имеем

$$\frac{dE_*}{dt} = -(t_* - t)u_w^2 \quad (2.3)$$

Из (2.3) заключаем, что при $0 < t < t_*$ модифицированная энергия убывает ($dE_*/dt \leq 0$), а при $t > t_*$ растет ($dE_*/dt \geq 0$). Этот факт свидетельствует об алгебраической неустойчивости сдвигового потока относительно волновых возмущений при всех значениях параметра R . Для возмущений с $q \neq 0$ строгий вывод об эволюции E_* сделать нельзя, и

приходится использовать информацию о поведении решения. Можно предположить, что для больших R хорошее приближение к частному решению неоднородного уравнения (1.10) дает выражение (подробно ниже) $u_v = (t - t_*)q\omega^{-2}(t)$. С помощью этого выражения, вычисляя правую часть (2.2), получим

$$\frac{dE_*}{dt} = \frac{(t_* - t)q^2}{\omega^4(t)}$$

Таким образом, если в решении присутствует только вихревой компонент, то при $t < t_*$ энергия растет, при $t > t_*$ – убывает. Здесь имеет место временный (транзитивный) рост энергии. Детально исследовать все возможные сценарии поведения энергии можно в случае $R \gg 1$.

3. Динамика возмущений для больших R (слабые сдвиги). В случае слабых сдвигов параметр $R \gg 1$, и для построения решения уравнения (1.10) можно использовать метод ВКБ. Поскольку $\omega^2(t) \geq \omega^2(t_*) = 1$ и при $t \rightarrow \infty \dot{\omega}(t) \omega^{-2}(t) \rightarrow 0$, основное условие применимости этого метода выполнено. В первом приближении для общего решения u_w однородного уравнения (1.10) метод ВКБ дает [11]

$$u_w = \frac{C}{\sqrt{\omega(t)}} \cos(R\varphi(t)), \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega(s) ds + \varphi_0 \quad (3.1)$$

где C, φ_0 – начальные амплитуда и фаза (произвольные постоянные). Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде ряда

$$u_v = u^{(0)} + R^{-2}u^{(1)} + R^{-4}u^{(2)} + \dots$$

После подстановки в (1.10) найдем

$$u^{(0)} = (t - t_*)q\omega^{-2}(t), \quad u^{(1)} = -\omega^{-2}(t)\frac{d^2u^{(0)}}{dt^2}, \dots$$

Нетрудно показать, что отрезки ряда дают асимптотическое разложение частного решения [11]. Добавляя к построенному частному решению произвольное решение однородного уравнения, также получим частное решение. Тем не менее найденное частное решение единственное, не содержащее осцилляций.

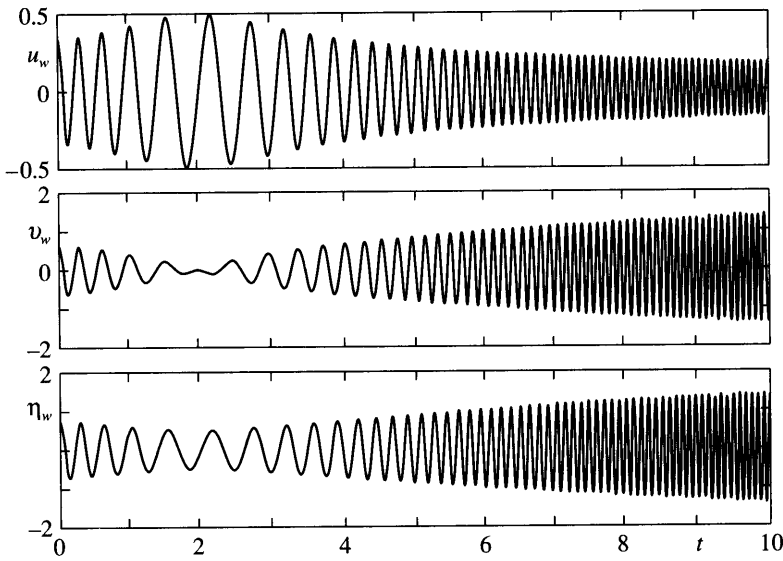
Итак, с точностью до $O(R^{-1})$, общее решение (1.10) записывается в виде

$$u = u_w + u_v = \frac{C}{\sqrt{\omega(t)}} \cos(R\varphi(t)) + \frac{(t - t_*)q}{\omega^2(t)} \quad (3.2)$$

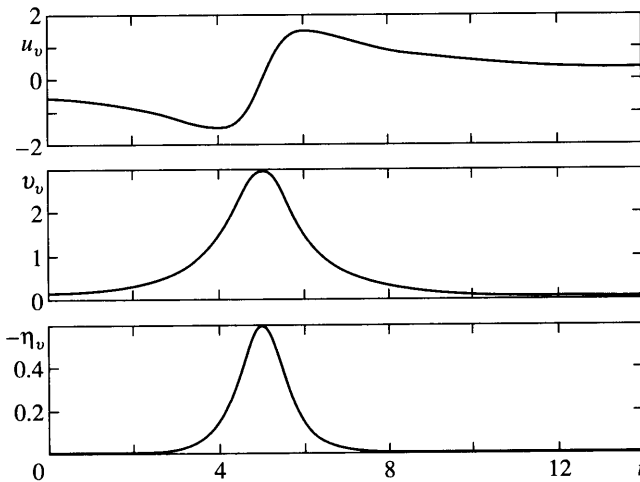
Зная это решение, переменные v, η находим по формулам (1.11)

$$\begin{aligned} v &= v_w + v_v = \frac{C(t_* - t)}{\sqrt{\omega(t)}} \cos(R\varphi(t)) + \frac{q}{\omega^2(t)} \\ \eta &= \eta_w + \eta_v = C\sqrt{\omega(t)} \cos(R\varphi(t)) - \frac{2q}{R\omega^4(t)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Обсудим отдельно особенности волнового и вихревого компонент. На больших временах амплитуда осцилляций u_w убывает, а амплитуды v_w, η_w растут по корневому закону (фиг. 1), приводя к неограниченному линейному росту энергии. Поскольку при $t \rightarrow \infty \varphi(t) \sim t^2$, на больших временах частота временных осцилляций неограниченно

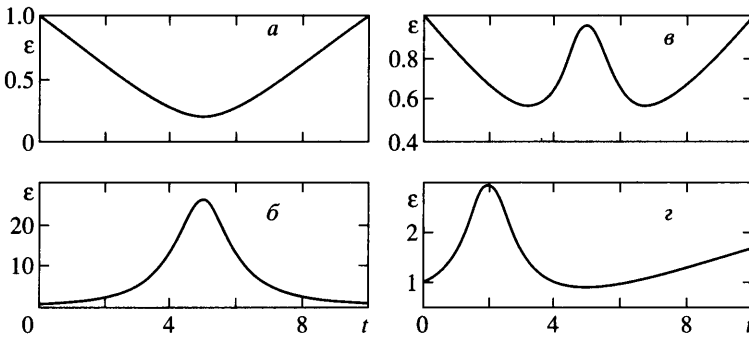


Фиг. 1. Зависимость от времени волновых компонент $u_w(t)$, $v_w(t)$, $\eta_w(t)$ при $R = 10$, $t_* = 2$



Фиг. 2. Зависимость от времени вихревых компонент $u_v(t)$, $v_v(t)$, $\eta_v(t)$ при $R = 10$, $t_* = 5$, $q = 3$

растет по времени. Это чрезвычайно важный эффект, имеющий отношение к сложному предтурбулентному поведению. При этом он обусловлен исключительно влиянием сдвига – в отсутствие сдвига волновые возмущения представляют собой обычные гравитационные волны. Обратим внимание также на некоторое уменьшение частоты временных осцилляций в окрестности точки t_* . Это уменьшение связано с тем, что мгновенная частота осцилляций $\omega_*(t) = R\varphi(t)/t$ достигает минимума в некоторой точке вблизи t_* . Вихревые компоненты решения $v_v(t)$, $\eta_v(t)$ растут по модулю до момента t_* , а далее убывают (фиг. 2). Именно такое поведение согласуется с временным (транзитивным) ростом энергии.



Фиг. 3. Зависимость от времени полной осредненной энергии возмущений $\epsilon(t)/\epsilon(0)$ при $R \gg 1$: а - $t_* = 5, q = 0$; б - $t_* = 5, C = 0$; в - $t_* = 5, 1 < B^{1/3} < \omega(0)$; г - $t_* = 2, B^{1/3} > \omega(0)$

Рассмотрим теперь вопрос о поведении энергии возмущений $E = 0.5(u^2 + v^2 + \eta^2)$ (как указано ранее, при $R \gg 1$ $E \approx E_*$, и под энергией можно понимать любое из выражений). Поскольку решение содержит быстроосциллирующий компонент, наибольший интерес представляет не сама энергия, а ее осредненное значение $\epsilon = \langle E \rangle$, где угловые скобки означают осреднение по периоду быстрой переменной $T = 2\pi/\omega_*(t)$. Используя выражения (3.2), (3.3) и обозначая $\theta = R\phi(t)$, найдем

$$\langle u^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{C}{\sqrt{\omega(t)}} \cos \theta + \frac{(t-t_*)q}{\omega^2} \right)^2 \right\rangle = \frac{C^2}{2\omega(t)} + \frac{(t-t_*)^2 q^2}{\omega^4(t)}$$

Проводя аналогичные вычисления для $\langle v^2 \rangle, \langle \eta^2 \rangle$ и суммируя, приходим к замечательно простой формуле для осредненной энергии:

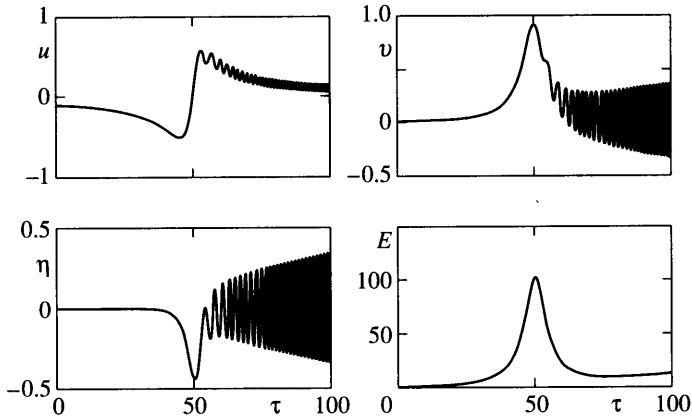
$$\epsilon(t) = \epsilon_w(t) + \epsilon_v(t) = \frac{1}{2} C^2 \omega(t) + \frac{q^2}{2\omega^2(t)} \tag{3.4}$$

Формула (3.4) показывает, что полная осредненная энергия возмущений есть сумма энергий волнового и вихревого компонент (если под скалярным произведением понимать осреднение по периоду, то волновой и вихревой компоненты ортогональны). При $t_* > 0$ энергия $\epsilon_v(t)$ имеет транзитивный рост – достигает максимума при $t = t_*$ и далее затухает, а энергия $\epsilon_w(t)$, достигая минимума при $t = t_*$, далее на больших временах растет линейно (фиг. 3, а, б). Линейный рост энергии, очевидно, связан с алгебраической неустойчивостью сдвигового потока относительно волновых возмущений.

Поскольку $\epsilon(t)$ есть сумма двух немонотонных функций, поведение $\epsilon(t)$ на начальном этапе может быть достаточно необычным. Нетрудно показать, что при $t_* > 0$ число критических точек функции $\epsilon(t)$ (точек экстремума) зависит от значений параметра $B = 2q^2/C^2$. Возможны следующие случаи.

При $0 < B^{1/3} < 1$ у $\epsilon(t)$ ($t \in (0, \infty)$) существует единственная критическая точка $t = t_*$ (точка минимума), и поведение $\epsilon(t)$ такое же, как и в случае $q = 0$ (фиг. 3, а).

При $1 < B^{1/3} < \omega(0) = \sqrt{1 + t_*^2}$ наряду с точкой максимума t_* появляются две критические точки $t_{1,2} = t_* \mp \sqrt{B^{2/3} - 1}$ (точки минимума). Соответственно вначале энергия убывает, затем растет, затем опять убывает и лишь затем окончательно уходит на бесконечность (фиг. 3, в).



Фиг. 4. Зависимость от времени $u(t)$, $v(t)$, $\eta(t)$ полной энергии $E(t)$ при $R = 5$, $t_* = 10$, $\tau = Rt$

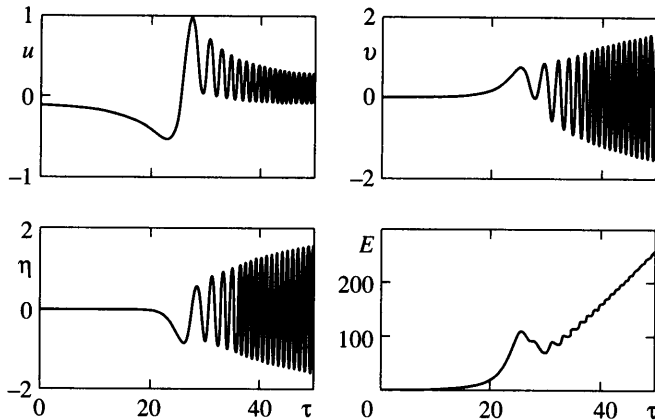
При $B^{1/3} > \omega(0) = \sqrt{1 + t_*^2}$ у функции $\epsilon(t)$ только две критические точки: t_* (точка максимума) и $t_2 = t_* + \sqrt{B^{2/3} - 1}$ (точка минимума). Соответственно энергия вначале растет (до t_*), далее убывает (до t_2) и далее окончательно растет (фиг. 3, г).

Указанные три случая, вместе со случаем $C \equiv 0$ (транзитивный рост) исчерпывают все возможные сценарии поведения осредненной энергии $\epsilon(t)$ при $t_* > 0$. Поведение $\epsilon(t)$ при $t_* < 0$, очевидно, представляет собой отдельные фрагменты сценариев при $t_* > 0$.

4. Динамика возмущений для умеренных и малых R . В случае умеренных и малых значений параметра R (достаточно сильные сдвиги) в динамике возмущений появляются ряд новых особенностей. В этом случае приближение ВКБ уже неприменимо и для построения решений нужно привлекать численные методы. Один из наиболее интересных эффектов обнаруживается при численном решении системы (1.8) с начальными условиями, определяемыми вихревой модой: $u(0) = u_v(0)$, $v(0) = v_v(0)$, $\eta(0) = \eta_v(0)$. До момента времени t_* ($t_* > 0$) численное решение хорошо согласуется с вихревой модой, хотя вихревое решение уже не асимптотическое. В момент $t = t_*$, однако, происходит внезапное (скачкообразное) появление осцилляций (волн), так что дальнейшая эволюция определяется совместным присутствием медленной вихревой и быстрой волновой мод. Для акустических возмущений описанный эффект обнаружен в [3]. Говоря образным языком [3], при $t = t_*$ имеет место эффект внезапной трансформации (конверсии) вихрей в волны или эффект-внезапного излучения волн.

Описанный эффект становится заметным уже при $R = 5$ и ярко выражен при $R < 3$. Примеры временных зависимостей переменных и соответствующие графики временного хода полной энергии представлены на фиг. 4 ($R = 5$) и 5 ($R = 3$). В случае $R = 5$ энергия возмущения имеет характерный для вихревой моды транзитивный рост (до момента t_* растет и далее убывает), т.е. возникшее в момент t_* волновое возмущение практически не меняет энергетику вихревой моды. В случае $R = 3$ влияние волновой моды становится существенным: после транзитивного роста энергии имеет место линейный рост, обусловленный возникшей при $t = t_*$ волновой модой.

Хотя математическое описание эффекта скачкообразного возникновения осцилляций достаточно сложно, можно привести нестрогие рассуждения, поясняющие его



Фиг. 5. То же, что на фиг. 4 при $R = 3, t_* = 10$

природу. В случае $R \ll 1$ удобно перейти в уравнении (1.10) к медленной переменной $\tau = Rt$. Обозначая $\tau_* = Rt_*$, вместо (1.10) получим уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \omega^2(\tau)u = R^{-1}(\tau - \tau_*)q, \quad \omega^2(\tau) = 1 + R^{-2}(\tau - \tau_*)^2 \quad (4.1)$$

Рассмотрим для (4.1) задачу с начальными данными, определяемыми вихревым решением u_v , которое в новых переменных имеет вид $u_v = R^{-1}(\tau - \tau_*)q/\omega^2(\tau)$. Представим решение этой задачи в виде $u = u_v + u_w$, где теперь u_w – отклонение решения от вихревого. Для u_w получим задачу

$$\frac{d^2 u_w}{d\tau^2} + \omega^2(\tau)u_w = -\frac{d^2 u_v}{d\tau^2}, \quad u_w(0) = u'_w(0) = 0 \quad (4.2)$$

(в данном разделе производные по времени также обозначаются штрихами). Уравнение (4.2), очевидно, эквивалентно (4.1). Заметим далее, что в линейных системах можно ожидать скачкообразного возникновения осцилляций, если в правых частях уравнений стоят вынуждающие силы в виде дельта-функции $V\delta(\tau - \tau_*)$ или ее производных. В этих случаях система получает мгновенный толчок (удар), после чего возникают колебания. Так, если в правой части (4.2) стоит $V\delta(\tau - \tau_*)$, то в точке $\tau = \tau_*$ решение непрерывно, а производная терпит скачок: $u'_w(\tau_* + 0) = u'_w(\tau_* - 0) + V$. Последнее условие получается интегрированием уравнения в малом интервале $(\tau_* - \xi, \tau_* + \xi)$, окружающем точку τ_* . Несколько другое условие получается, если в правой части (4.2) стоит производная от дельта-функции $V\delta'(\tau - \tau_*)$. Умножая соответствующее уравнение на $\tau - \tau_*$, получим

$$\frac{d}{d\tau}(\tau - \tau_*)\frac{du_w}{d\tau} - \frac{du_w}{d\tau} + (\tau - \tau_*)\omega^2(\tau)u_w = V(\tau - \tau_*)\delta'(\tau - \tau_*)$$

Интегрируя последнее соотношение в интервале $(\tau_* - \xi, \tau_* + \xi)$, получим $u_w(\tau_* + 0) = u_w(\tau_* - 0) + V$. Таким образом, в этом случае скачок терпит само решение.

Возвращаясь к уравнению (4.2), вычислим его правую часть

$$f_R(\tau - \tau_*) \equiv -\frac{d^2 u_v}{d\tau^2} = \frac{2qr(3-r^2)}{R^2(1+r^2)^3}, \quad r = \frac{(\tau - \tau_*)}{R}$$

При $R \rightarrow 0$ $\max|f_R(\tau - \tau_*)| \rightarrow \infty$ и $f_R(\tau - \tau_*) \rightarrow 0$ для любого τ , лежащего вне произвольного интервала $(\tau_* - \xi, \tau_* + \xi)$. Если учесть, что $f_R(\tau - \tau_*)$ – нечетная функция, то можно заключить, что при $R \rightarrow 0$ решение (4.2) ведет себя подобно решению уравнения с правой частью в виде производной дельта-функции, т.е. до момента τ_* оно равно нулю, а далее скачком возникают осцилляции. Эти рассуждения, разумеется, носят лишь качественный характер.

Важно подчеркнуть, что описанный эффект связан исключительно с характером изменения частоты $\omega(\tau)$, которая имеет минимум при $\tau = \tau_*$ и непрерывно зависит от R . Функция, обратная квадрату частоты, при этом приближается к дельта-функции

$$\frac{1}{R\omega^2(\tau)} \rightarrow \pi\delta(\tau - \tau_*) \quad R \rightarrow 0$$

5. Сдвиговый поток в несжимаемой стратифицированной жидкости. Рассмотрим теперь задачу о поведении возмущений в сдвиговом потоке несжимаемой стратифицированной жидкости. В приближении Буссинеска система уравнений динамики имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla\Phi + \sigma\mathbf{k}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0, \quad \text{div}\mathbf{u} = 0 \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости с компонентами u, v, w вдоль осей x, y, z соответственно, $\sigma = -g\rho/\rho_*$ – плавучесть, ρ – отклонение плотности от фонового значения $\rho_* = \text{const}$, $\Phi = P/\rho_*$, P – отклонение давления от гидростатического, отвечающего ρ_* , g – ускорение свободного падения, \mathbf{k} – вертикальный орт. Рассматриваем систему (5.1) в слое $0 \leq z \leq H$, $-\infty < x, y < \infty$ с условием непротекания $w = 0$ на границах $z = 0, H$. Из (5.1) следует лагранжев закон сохранения потенциальной завихренности [9, 10]:

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad Q = (\boldsymbol{\omega}, \nabla, \sigma), \quad \boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{u} \quad (5.2)$$

В гидродинамике вместо (5.1) часто рассматривают упрощенную систему, заменяя проекцию уравнения импульса на ось z уравнением гидростатики: $\partial\Phi/\partial z = \sigma$. Гидростатическое приближение справедливо, если горизонтальный масштаб движения много больше вертикального [10]. Для гидростатической системы закон сохранения потенциальной завихренности записывается в форме (5.2), где $\boldsymbol{\omega} = (-\partial v/\partial z, \partial u/\partial z, \partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$.

Точное решение (5.1), описывающее поток с постоянным горизонтальным сдвигом, имеет вид

$$\mathbf{u} = (Ay, 0, 0), \quad \sigma = N^2 z, \quad \Phi = \Phi_0(z), \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} = N^2 z \quad (5.3)$$

где $N^2 > 0$ – частота Брента–Вяйсяля. Потенциальный вихрь течения (5.3) равен константе $Q = -AN^2$. Принимая гидростатическое приближение для малых отклонений от (5.3), имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + Av + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sigma \\ \frac{D\sigma}{Dt} + N^2 w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + Ay \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.4)$$

где штрихи в обозначении возмущений опущены. Из (5.4) следует закон сохранения

$$\frac{Dq}{Dt} = 0, \quad q = N^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - A \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (5.5)$$

представляющий линеаризованную форму (5.2).

Система (5.4) допускает разделение переменных – решение можно искать в виде ряда по собственным функциям оператора d^2/dz^2

$$(u, v, \Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n, v_n, \Phi_n) \cos \frac{n\pi}{H} z, \quad (w, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} (w_n, \sigma_n) \sin \frac{n\pi}{H} z \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (5.4), исключая w_n, σ_n и полагая $\Phi_n \equiv c_n^2 \eta_n$, для каждой вертикальной моды получим систему уравнений

$$\frac{Du_n}{Dt} + Av_n + c_n^2 \frac{\partial \eta_n}{\partial x} = 0, \quad \frac{Dv_n}{Dt} + c_n^2 \frac{\partial \eta_n}{\partial y} = 0, \quad \frac{D\eta_n}{Dt} + \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} = 0 \quad (5.7)$$

которая совпадает с системой уравнений мелкой воды (1.4), с той разницей, что вместо скорости длинных волн c стоит фазовая скорость n -й моды внутренних волн: $c_n = HN/\pi n$. Таким образом, все основные особенности динамики возмущений сохраняются и в данной модели, т.е. они не связаны со сжимаемостью среды. В частности, энергия волновых возмущений, представляющих собой модифицированные сдвигом внутренние волны, на больших временах растет линейно.

В рассматриваемой модели легко учесть эффекты вязкости. Это осуществляется добавлением слагаемых $\nu \Delta u, \nu \Delta v, \nu \Delta \sigma$ в правые части уравнений для u, v, σ системы (5.4). Здесь ν – коэффициент вязкости, принятый равным коэффициенту температуропроводности, Δ – трехмерный оператор Лапласа. Решение вязкой задачи, удовлетворяющее модельным краевым условиям Рэлея: $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \sigma = 0$ при $z = 0, H$, также можно искать в виде ряда (5.6). Для каждой вертикальной моды при этом получим систему (5.7) с добавлением в правые части выражений

$$\Lambda(u_n), \Lambda(v_n), \Lambda(\eta_n), \quad \Lambda(u_n) = \nu(\Delta_{\perp} u_n - \lambda_n^2 u_n), \quad \lambda_n = \pi n/H$$

Здесь Δ_{\perp} – оператор Лапласа по горизонтальным координатам. Перейдем в соответствующей системе к переменным t_1, x_1, y_1 (1.6) и будем искать решения вида

$$(u_n, v_n) = (u(t_1), v(t_1)) \cos(kx_1 + ly_1), \quad \eta_n = \eta(t_1) \sin(kx_1 + ly_1)$$

Принимая, как и ранее, в качестве масштабов t_1 , u , v соответственно A^{-1} , c_n , c_n , получим систему уравнений для амплитуд (время обозначаем через t)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -v - R\eta - \text{Re}^{-1}[m^2 + \omega^2(t)]u \\ \frac{dv}{dt} &= -Rp(t)\eta - \text{Re}^{-1}[m^2 + \omega^2(t)]v \\ \frac{d\eta}{dt} &= R(u + p(t)v) - \text{Re}^{-1}[m^2 + \omega^2(t)]\eta, \quad \text{Re} = \frac{A}{\nu k^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $m = \lambda_n/k$, остальные обозначения прежние. Нетрудно видеть, что, сделав в (5.8) замену переменных

$$(u, v, \eta) = (u_0, v_0, \eta_0) \exp \left\{ -\text{Re}^{-1} \int_0^t [m^2 + \omega^2(s)] ds \right\} \quad (5.9)$$

для величин (u_0, v_0, η_0) , получим прежнюю систему (1.8).

Таким образом, задача с вязкостью также допускает полное аналитическое исследование. В частности, при $R \gg 1$ решения системы (5.8) даются выражениями (3.2), (3.3), которые следует умножить на соответствующую затухающую экспоненту. Отсюда следует достаточно важный вывод: вязкость, уменьшая амплитуду, не оказывает влияния на частоту временных осцилляций, которая на больших временах стремится к бесконечности.

Интересно проследить, как вязкость демпфирует энергию волнового компонента решения. Если без вязкости $\epsilon_w(t) = C^2 \omega(t)/2$ (при $t \rightarrow \infty$ $\epsilon_w(t)$ растет линейно), то с учетом вязкости

$$\epsilon_w(t) = \frac{1}{2} C^2 \omega(t) \exp \left\{ -2\text{Re}^{-1} \int_0^t [m^2 + \omega^2(s)] ds \right\} \quad (5.10)$$

Рассмотрим случай малой вязкости $\text{Re} \gg 1$. Используя (5.10), легко показать, что до момента $t^{(1)} \approx t_* + 2(1 + m^2)\text{Re}^{-1}$ энергия убывает, далее до момента $t^{(2)} \approx t_* + \sqrt[3]{\text{Re}/2}$ растет, после чего начинает затухать под действием вязкости до нуля. Поскольку $t^{(2)} \rightarrow \infty$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$, участок алгебраического роста при малой вязкости достаточно велик.

Заключение. Исследована линейная динамика возмущений в неограниченных потоках с постоянным горизонтальным сдвигом. В случае слабых сдвигов решение задачи с начальными данными для возмущений представляется в виде суммы быстроосциллирующего волнового и медленного вихревого компонент. На больших временах энергия вихревого компонента затухает, а энергия волнового растет линейно, т.е. имеет место алгебраическая неустойчивость сдвигового потока, связанная с нарастанием быстрых волновых возмущений (гравитационных волн). В случае достаточно сильных сдвигов описан эффект скачкообразного возникновения быстрых волновых движений. Обнаруженные особенности динамики возмущений носят достаточно общий характер и должны наблюдаться и в более сложных гидродинамических моделях. В частности, они сохраняются при учете вязкости (на достаточно больших временах) как для несжимаемой, так и для сжимаемой среды.

Настоящая работа выполнена при поддержке МНТЦ (проекты G-553, G-1217).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дикий Л.А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 107 с.
2. *Kelvin (Thomson W.)* Stability of fluid motion: Rectilinear motion of viscous fluid between two parallel planes // *Phil. Mag. Ser. 5*. 1887. V. 24. № 147. P. 188–196.
3. *Chagelishvili G.D., Tevzadze A.G., Bodo G., Moiseev S.S.* Linear mechanism of wave emergence from vortices in smooth shear flows // *Phys. Rev. Letters*. 1997. V. 79. № 17, P. 3178–3181.
4. *Chagelishvili G.D., Chanishvili R.G., Hristov T.S., Lominadze J.G.* A turbulence model in unbounded smooth shear flows. The weak turbulence approach // *ЖЭТФ*. 2002. Т. 121. Вып. 2. С. 508–520.
5. *Farrel B.F., Ioannou P.J.* Transient development of perturbations in stratified shear flow // *J. Atmos. Sci.*, 1993. V. 50. № 14. P. 2201–2214.
6. *Bakas N.A., Ioannou P.J., Kefalikos J.E.* The emergence of coherent structures in stratified shear flow // *J. Atmos. Sci.*, 2001. V. 58. № 18. P. 2790–2806.
7. *Farrel B.F., Ioannou P.J.* Transient and asymptotic growth of two-dimensional perturbations in compressible shear flow // *Phys. Fluids*. 2000. V. 12. № 1. P. 3021–3028.
8. *Criminale W.O., Drazin P.G.* The evolution of linearized perturbations of parallel flows // *Studies Appl. Math.* 1990. V. 83. № 2. P. 123–157.
9. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. Т. 1. М.: Мир, 1984. 400 с.
10. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 396 с.
11. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1987. 400 с.

Обнинск, Тбилиси

Поступила в редакцию
30.XI.2004