

УДК 533.6.013.12:517.977.52

© 2005 г. Д. Ф. АБЗАЛИОВ

МИНИМИЗАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ МЕТОДОМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрена задача построения крылового профиля по распределению скорости (давления) на его поверхности, заданному в многопараметрическом виде. На диффузорном участке закон падения скорости определялся из условия минимальности сопротивления и ограничения на безотрывность обтекания при заданном числе Рейнольдса. Исследован случай отсоса пограничного слоя для улучшения аэродинамических характеристик крыловых профилей. Решение проведено с применением теории оптимального управления.

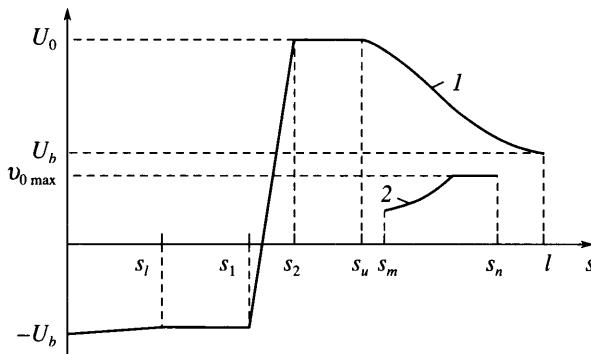
Ключевые слова: аэродинамика; крыловой профиль; сопротивление; оптимальное управление; отсос пограничного слоя.

Одним из эффективных способов построения оптимальных по аэродинамическим характеристикам крыловых профилей является способ, основанный на решении обратных краевых задач аэрогидродинамики. Исходные данные в этих задачах – распределение $p(s)$ давления по контуру искомого крылового профиля. В дальнейшем вместо $p(s)$ используется распределение $U(s)$ скорости внешнего течения, связанное с $p(s)$ интегралом Бернулли $U^2(s) = U_\infty^2 + 2[p_\infty - p(s)]/\rho$, где ρ – плотность, которая считается постоянной (случай несжимаемой жидкости), а индексом “ ∞ ” обозначены характеристики потока на бесконечности.

Коэффициент подъемной силы c_y , пропорциональный циркуляции скорости, явно выражается через функцию $U(s)$. Для расчета коэффициента c_x сопротивления крылового профиля предварительно необходимо произвести расчет пограничного слоя и лишь после этого, например, по формуле Сквайра–Юнга или непосредственным интегрированием вязких сил определить сопротивление. Связь $U(s)$ и c_x довольно сложна и задача определения оптимального $U(s)$ важна. Особенно это необходимо на диффузорном участке, на котором возможен отрыв потока, так как в задачах проектирования оптимальных крыловых профилей одно из ограничений – условие на безотрывность обтекания.

Для расчета пограничного слоя использован интегральный метод Эпплера, основанный на совместном интегрировании уравнений импульсов и энергии с установленными отношениями для коэффициентов трения и диссипации энергии. Задача определения распределения $U(s)$ сформулирована в терминах задач оптимального управления. В качестве управляющей функции выбран градиент скорости $U'(s)$ внешнего течения, решение построено с использованием принципа максимума Понтрягина.

Эффективный способ уменьшения коэффициента сопротивления крылового профиля – отсос пограничного слоя [1, 2]. При рассмотрении задачи построения оптимальных крыловых профилей с отсосом в качестве параметра оптимизации взята сумма коэффициента вязкого сопротивления и коэффициента энергетических затрат на отсос, а распределение $v_0(s)$ скорости отсоса выбрано управляющей функцией. Считалось, что толщина слоя и отсос не влияют на скорость внешнего потока.



Фиг. 1. Вид задаваемого распределения скорости: 1 – скорость $U(s)$ внешнего течения, 2 – скорость $v_0(s)$ отсоса

В настоящем исследовании для построения профиля по заданному распределению $U(s)$ используется теория обратных краевых задач аэрогидродинамики [3]. Распределение скорости задается в многопараметрическом виде, вариацией параметров достигается выполнение условий разрешимости обратных задач (к таким условиям относятся условия замкнутости контура крылового профиля и условие совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения).

1. Постановка задачи. В физической плоскости искомый крыловой профиль AB с бесконечно тонкой задней кромкой B обтекается плоским установившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости. Точка схода потока совпадает с B и принята за начало координат, ось x выбрана параллельно вектору заданной на бесконечности скорости U_∞ (все скорости отнесены к U_∞). Дуговая абсцисса s отсчитывается по часовой стрелке от $s = 0$ в точке B до $s = l$ в ней же, где l – периметр контура профиля. На участке $s \in L_1 = [s_l, s_u]$ задано распределение скорости $U(s)$, зависящее от $n \geq 3$ свободных параметров (фиг. 1), один из которых – скорость U_b в точке B .

Заданы максимальная скорость $v_{0\max}$ отсоса (случаю профиля без отсоса соответствует $v_{0\max} = 0$), число Рейнольдса $Re = U_\infty(l/2)/v$. Требуется определить распределение скорости $U(s)$ на участке $L_2 = (0, s_l) \cup (s_u, l)$, положения $(s_{mk}, s_{nk}) \subset L_2$ проницаемых участков, функцию скорости отсоса $v_0(s)$ на них и форму крылового профиля, имеющего минимальный коэффициент сопротивления при ограничении на безотрывность обтекания.

2. Решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики, расчет пограничного слоя и вычисление сопротивления. Поставленная задача разбивается на две. Первая – построение крылового профиля по заданному распределению скорости, а вторая – определение скоростей $U(s)$, $v_0(s)$ на участке L_2 . Предположим, что распределение $U(s)$ на этом участке найдено. Тогда задача сводится к классической обратной краевой задаче аэрогидродинамики и ее решение проводится по известной схеме [3]. Необходимо выполнение трех условий разрешимости – двух условий замкнутости контура крылового профиля и совпадения заданной скорости на бесконечности с определяемой в процессе решения. Для их удовлетворения используются три свободных параметра d_i . Так для распределения скорости, изображенного на фиг. 1, в качестве этих параметров выбраны дуговые абсциссы s_1 , s_2 и U_b .

Для расчета пограничного слоя использован интегральный метод Эпплера [4], основанный на интегрировании уравнений импульсов и энергии

$$\begin{aligned}\delta'_2 &= c_f - (H_{12} + 2)\delta_2 \frac{U'}{U} - \frac{v_0}{U} \\ \delta'_3 &= c_D - 3H\delta_2 \frac{U'}{U} - \frac{v_0}{U}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь штрих – производная по s ; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – толщины вытеснения, потери импульса и потери энергии соответственно, c_f – коэффициент трения на стенке, c_D – коэффициент диссипации энергии, $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ и $H = \delta_3/\delta_2$ – формпараметры. Для замыкания системы (2.1) в методе Эпплера добавлены три эмпирические связи: $H_{12} = H_{12}(H)$, $c_f = c_f(H, U, \delta_2)$, $c_D = c_D(H, U, \delta_2)$, разные для ламинарного и турбулентного слоев.

Коэффициент полного сопротивления представлен как сумма коэффициентов вязкого и эквивалентного энергетическим затратам на отсос сопротивлений

$$c_x = c_{xv} + c_{xs} \quad (2.2)$$

Коэффициент c_{xv} вычислялся по формуле Сквайра–Юнга

$$c_{xv} = 2 \frac{2}{l} \delta_{2b} U_b^{(5+H_{12b})/2}$$

где индекс b – характеристики в задней кромке. Для вычисления коэффициента c_{xs} использована формула

$$c_{xs} = U_c^2 c_q, \quad c_q = \frac{2}{l} \int_{L_2} v_0(s) ds, \quad U_c^2 = U_\infty^2 + 2 \frac{p_\infty - p_c}{\rho}$$

полученная в предположениях малости v_0/U_∞ , отсутствия внутренних потерь и условия, что давление в камерах отсоса внутри профиля равно p_c . Отсосанный воздух выпускается во внешний поток со скоростью U_∞ и давлением p_∞ .

Критерий отсутствия отрыва записан в виде $H \geq H^*$. В методе Эпплера для турбулентных слоев без отсоса реалистичные значения точки отрыва дают постоянная $H^* = 1.46$. В случае больших неблагоприятных градиентов давления и присутствия отсоса постоянную H^* необходимо выбрать с некоторым запасом, в расчетах взято $H^* = 1.5$.

3. Решение задачи оптимального управления. Вторая задача – нахождение распределений $U(s)$ и $v_0(s)$ из условия минимальности c_x . Даётся решение этой задачи на участке (s_u, l) , на втором участке $(0, s_l)$ оно аналогично. Заданными считаем $U(s_u) = U_0$, $U(l) = U_b$, а также характеристики пограничного слоя (δ_{20}, δ_{30}) в точке s_u . Введем в рассмотрение функцию

$$c_x(s) = 2\delta_2(s) U_b^{(5+H_{12}(s))/2} + U_c^2 \int_{s_u}^s v_0(s) ds + g(s) \quad (3.1)$$

Заметим, что при $g(l) = 0$ значение $c_x(l)$ с точностью до множителя $l/2$ совпадает с коэффициентом сопротивления верхней поверхности (2.2). Продифференцируем (3.1)

$$c'_x(s) = [2\delta'_2(s) + \delta_2(s) \ln U_b H'_{12}(s)] U_b^{(5+H_{12}(s))/2} + U_c^2 v_0(s) + g'(s) \quad (3.2)$$

Введем вспомогательные функции

$$w(s) = \frac{v_0(s)}{U(s)}, \quad y(s) = \ln U(s), \quad z(s) = y'(s) = \frac{U'(s)}{U(s)} \quad (3.3)$$

Добавим уравнение (3.2) и последнее уравнение (3.3) к системе (2.1). Полученную систему схематично запишем как

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, w, z) \quad (3.4)$$

где четырехкомпонентный вектор-функция \mathbf{x} и начальные условия для него в точке s_u имеют вид

$$\mathbf{x}(s) = (c_x(s), y(s), \delta_2(s), \delta_3(s))^T, \quad \mathbf{x}(s_u) = (c_{x0}, \ln U_0, \delta_{20}, \delta_{30})^T$$

Ограничение на безотрывность обтекания и условие $y(l) = \ln U_b$ учтем в виде штрафной функции $g(s)$

$$g(s) = A_s \int_{s_u}^s \ln \left\{ 1 + \exp \left[A_h \left(H^* - \frac{\delta_3(s)}{\delta_2(s)} \right) \right] \right\} ds + A_u [y(s) - \ln U_b]^2 \quad (3.5)$$

где A_s, A_h, A_u – достаточно большие числа. При выполнении ограничения на безотрывность или условия совпадения скорости в задней кромке с заданной значение $g(l)$ практически равно нулю. В случае нарушения какого-либо ограничения $g(l) > 0$. Требуется минимизировать первую компоненту вектора \mathbf{x} в конечной точке ($s = l$)

$$\Phi[\mathbf{x}(l)] = x_1(l) \rightarrow \min$$

В терминах задач оптимального управления функции $w(s)$ и $z(s)$ являются управляющими. Для решения поставленной задачи используем принцип максимума Понтрягина [5]. Введем вспомогательную вектор-функцию $\mathbf{p}(s)$, для нахождения которой служит система дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned} p_i' &= - \sum_{j=1}^4 p_j \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, w, z)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 4 \\ p_i(l) &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i(l)} \Rightarrow p(l) = (-1, 0, 0, 0)^T \end{aligned} \quad (3.6)$$

Гамильтониан системы представляется как

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, w, z) = \sum_{i=1}^4 f_i(\mathbf{x}, w, z) p_i = \Psi_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \Psi_w(\mathbf{x}, \mathbf{p})w + \Psi_z(\mathbf{x}, \mathbf{p})z$$

Неизвестные управляющие функции $w(s)$ и $z(s)$ находятся из принципа максимума Понтрягина

$$\Psi(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, w^*, z^*) = \max_{w \in W, z \in Z} \Psi(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, w, z) \quad (3.7)$$

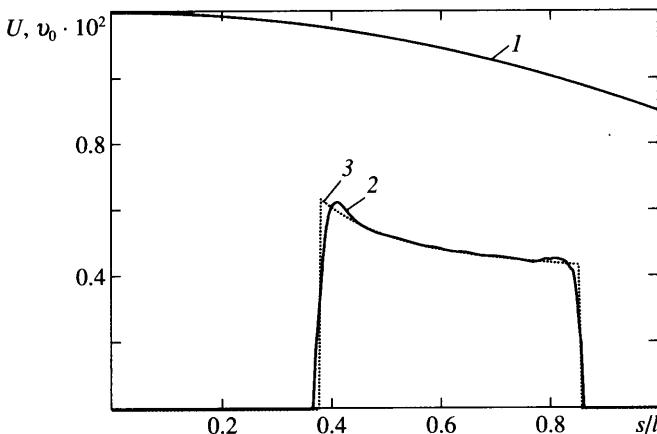
где индексом “*” обозначены значения функций в оптимальной точке, а множества W и Z определены как

$$W = \left\{ w(s) = \frac{v_0(s)}{U(s)} \middle| 0 \leq v_0(s) \leq v_{0 \max}, \quad \forall s \in (s_u, l) \right\}$$

$$Z = \{ z(s) \mid -\infty < z(s) \leq 0, \quad \forall s \in (s_u, l) \}$$

В связи с тем что гамильтониан Ψ зависит от $w(s)$ и $z(s)$ линейно, принцип (3.7) преобразуем к виду

$$v_0^* = \begin{cases} 0, & \Psi_w < 0, \\ [0, v_{0 \max}], & \Psi_w = 0, \\ v_{0 \max}, & \Psi_w > 0 \end{cases} \quad z^* = \begin{cases} -\infty, & \Psi_z < 0 \\ [z_{\min}, 0], & \Psi_z = 0 \\ 0, & \Psi_z > 0 \end{cases}$$



Фиг. 2. Сравнение приближенного и точного методов решения задачи оптимального управления по нахождению $v_0(s)$: 1 – распределение $U(s)$, 2 – приближенный метод, 3 – точный метод

Заметим, что в связи с наличием ограничения на безотрывность градиент скорости на диффузорном участке не может принимать большие отрицательные значения, поэтому функция $z(s)$ будет всегда ограничена снизу (вариант $\Psi_z < 0$ не реализуется). Случай $\Psi_w = 0$ и $\Psi_z = 0$ – сингулярные и функции $w(s)$ и $z(s)$ находятся из более сложных соотношений (см. [6]).

Основная сложность решения задачи оптимального управления состоит в том, что для нахождения $w^*(s)$ и $z^*(s)$ необходимо знать функции x^* , p^* , а для определения последних из систем (3.4), (3.6) требуются $w^*(s)$ и $z^*(s)$.

Для решения использованы итерационные процедуры, описанные в [7].

4. Схема итерационного процесса. Для решения поставленной в п. 1 задачи строится следующая итерационная процедура:

1) задается каким-либо образом (например, линейно) нулевое распределение $U(s)$, $v_0(s)$, $s \in L_2$;

2) решается обратная краевая задача аэрогидродинамики, удовлетворяются условия разрешимости вариаций свободных параметров в распределении скорости;

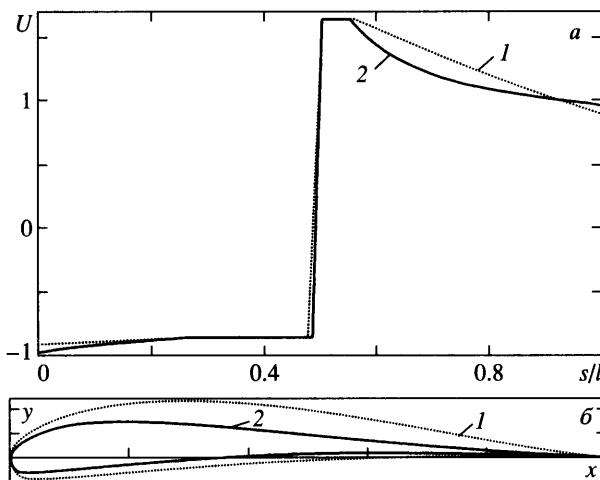
3) рассчитывается пограничный слой, начиная от передней кромки до точек $s = s_u$ на верхней и $s = s_l$ на нижней поверхностях;

4) решается задача оптимального управления по поиску $U(s)$, $v_0(s)$, $s \in L_2$;

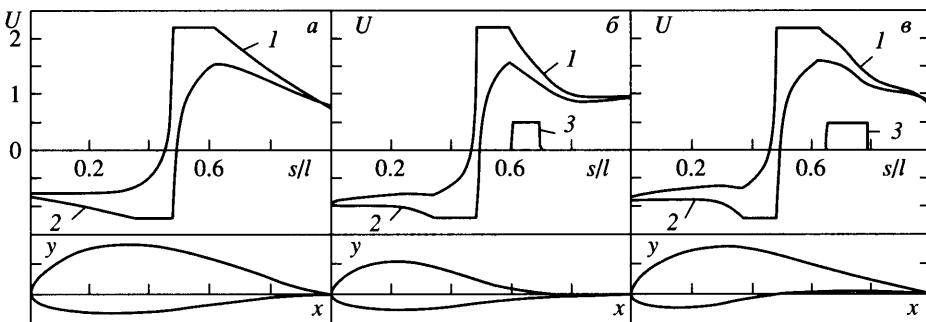
5) процесс повторяется с п. 2 до тех пор, пока не будет достигнута сходимость процесса.

5. Численные расчеты. Первый пример – тестовый и в нем исследовалась работоспособность разработанного метода оптимизации, основанного на итерационных процедурах [7]. Исходное распределение скорости внешнего течения изображено на фиг. 2 (кривая 1) и требовалось найти положение проницаемого участка и скорость отсоса на нем. Результат изображен на фиг. 2 (кривая 2). Для сравнения здесь же приведено точное решение данной задачи (кривая 3), проведенное совместным интегрированием (3.4) и (3.6) [8]. Значение максимальной скорости отсоса было выбрано достаточно большим, поэтому на проницаемом участке реализовывается сингулярный случай $\Psi_w = 0$. Совпадение результатов численного и точного методов хорошее, что демонстрирует достоверность численного метода.

Во втором примере решалась задача оптимизации скорости на диффузорном участке (профиль считался полностью непроницаемым). В начальном приближении (кри-



Фиг. 3. Распределение скорости (а) и контур профиля (б): 1 – начальное приближение, 2 – профиль, полученный в результате минимизации c_x



Фиг. 4. Распределения скорости и контуры профилей при решении задачи в диапазоне углов атаки: 1 – $U(s)$ для большего угла, 2 – $U(s)$ для меньшего угла, 3 – $v_0(s)$; а – начальное приближение, б – результат минимизации c_x , в – результат совместной минимизации c_x и максимизации c_y

вая 1 на фиг. 3, а) распределение скорости выбрано линейным. Соответствующий этому распределению крыловая профиль (кривая 1 на фиг. 3, б) при расчетном угле атаки имеет коэффициент сопротивления $c_x = 10.29 \cdot 10^{-3}$ ($Re = 10^7$, полностью турбулентный пограничный слой). В результате оптимизации удалось достичь значения $c_x = 8.55 \cdot 10^{-3}$, распределение скорости и форма профиля изображены кривыми 2 на фиг. 3.

В третьем примере задача решалась в диапазоне углов атаки (решение задачи построения профиля в диапазоне дано в [3]). Начальное распределение скорости изображено на фиг. 4, а. Для достижения большого коэффициента подъемной силы максимальная скорость на верхней поверхности на полке в задаваемом распределении $U(s)$ выбрана довольно большой и равной 2.2, поэтому на диффузорном участке возникал отрыв потока ($Re = 10^6$, полностью турбулентный пограничный слой). Значения углов атаки и соответствующих коэффициентов подъемной силы приведены в строчке 1 таблицы. Для предотвращения отрыва потока введен проницаемый участок на верх-

№	α_1 , град	c_{y1}	c_{x1}	α_2 , град	c_{y2}	c_{x2}
1	-1.5	0.3961	отрыв	14.1	2.3563	Отрыв
2	0	0.0709	1.0319	13.3	1.6477	1.8159
3	-1.1	0.5881	1.1317	13.6	2.3721	2.1802

ней поверхности. Значение максимальной скорости отсоса выбрано $v_{0\max} = 5 \cdot 10^{-3}$. В ходе оптимизации искались распределения скорости внешнего течения и отсоса на диффузорных участках: $U(s)$ и $v_0(s)$ на верхней поверхности из условия минимальности c_x при угле атаки α_2 ; $U(s)$ на нижней поверхности из условия минимальности c_x при α_1 . Полученное распределение скорости изображено на фиг. 4, б. Характеристики профиля приведены в строчке 2 таблицы.

Как видно, за счет введения проницаемого участка и выбора $U(s)$ удалось достичь безотрывности и получить небольшой коэффициент c_x , но вместе с ним значительно уменьшился и коэффициент подъемной силы c_y . Во избежание этого модифицируем

штрафную функцию (3.5), добавив к нему слагаемое $-A_\Gamma \int_s^{s_u} U(s) ds$. В результате будет

искаться крыловой профиль не только с малым c_x , но и с большим коэффициентом c_y . Результат оптимизации при $A_\Gamma = 0.05$ изображен на фиг. 4, в, характеристики профиля приведены в последней строчке таблицы.

Заключение. Разработан метод оптимизации коэффициента аэродинамического сопротивления крылового профиля, основанный на теории обратных краевых задач аэрогидродинамики и теории оптимального управления. Приведены результаты численных расчетов по проектированию крыловых профилей с минимальным сопротивлением как при одном угле атаки, так и в диапазоне. Исследован случай проектирования профилей с отсосом пограничного слоя, получен способ оптимального определения положения проницаемого участка и распределения скорости отсоса на нем.

Автор выражает благодарность Н.Б. Ильинскому и Р. Эпплеру за ценные советы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-08-01153) и фонда НИОКР Республики Татарстан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rioual J.-L., Nelson P. A., Hackenberg P., Tutty O. R. Optimum drag balance for boundary-layer suction // J. Aircraft. 1996. V. 33. P. 435–438.
2. Balakumar P., Hall P. Optimum suction distribution for transition control // Theoret. and Comput. Fluid Dynamics. 1999. V. 13. P. 1–19.
3. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.
4. Eppler R. Airfoil Design and Data. Berlin: Springer, 1990. 512 p.
5. Понtryagin Л.С., Болтянский В.Г., Гамкrelidze Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управлении. М.: Наука, 1973. 256 с.
7. Срочно В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.
8. Абзалилов Д.Ф. Оптимизация распределенного отсоса турбулентного пограничного слоя // Матер. 1-й науч.-практ. конф. молодых ученых и специалистов: "Исследования и перспективные разработки в авиационной промышленности". М.: ОАО "ОКБ Сухого", 2002. С. 6–13.