

УДК 533.6.011.55 + 532.526.2

© 2005 г. Г. Н. ДУДИН

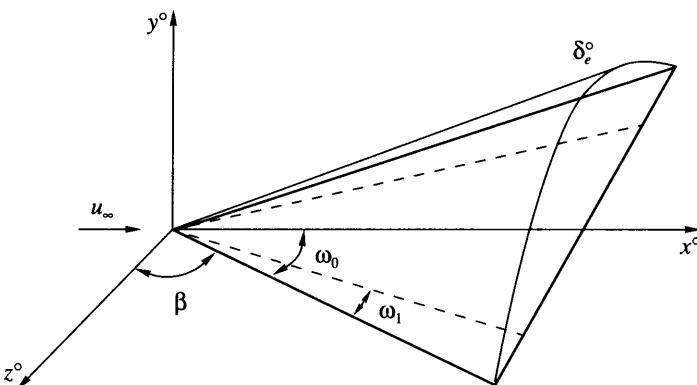
ОБ ОБРАЗОВАНИИ ОБЛАСТЕЙ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НА КРЫЛЬЯХ МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ

Рассмотрено течение около плоского треугольного крыла малого удлинения на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия. Исследование проведено в случае "ニュтоновского" предельного перехода, при котором показатель адиабаты стремится к единице, а значения чисел Маха и Рейнольдса – к бесконечности. Для случая обтекания холодного крыла получено аналитическое выражение для определения координаты перехода от закритического режима течения в пограничном слое к докритическому. Определены значения удлинения крыльев, для которых течение на всем крыле в пространственном пограничном слое становится докритическим. Проведено сравнение приближенной формулы для координаты перехода с результатами численного решения системы дифференциальных уравнений для случая, когда число Прандтля равно единице.

Ключевые слова: треугольное крыло, пограничный слой, гиперзвуковой поток, сильное взаимодействие.

Характер течения в пространственном ламинарном пограничном слое на холодном плоском треугольном крыле, обтекаемом гиперзвуковым потоком на режиме сильного вязкого взаимодействия, существенно зависит от угла стреловидности передней кромки крыла β [1, 2] и от величины показателя адиабаты $\gamma = C_p/C_v$ (C_p и C_v – соответственно удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме) [3]. Для каждого конечного значения параметра $\varepsilon = \gamma - 1$ существует критический угол стреловидности крыла β^* . При углах больше критического в пограничном слое на всем крыле реализуется область докритического течения, в которой возмущения распространяются от плоскости симметрии крыла вплоть до передних кромок. При углах стреловидности меньше критического в пограничном слое возникают области как закритического, так и докритического течения. В областях закритического течения, расположенных около передних кромок, возмущения не распространяются вверх по потоку. Течение в них может быть описано автомодельным решением, соответствующим обтеканию полубесконечной скользящей пластины с тем же углом стреловидности на режиме сильного взаимодействия [1]. Как показали численные расчеты, уменьшение величины показателя адиабаты при заданном значении угла стреловидности в общем случае приводит к значительному увеличению протяженности областей закритического течения и уменьшению области докритического течения [3]. При обтекании холодных треугольных крыльев с удлинением $s = \operatorname{ctg}\beta = O(1)$ безразмерный размер области докритического течения оказывается в первом приближении порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ [4], т.е. за исключением узкой области в окрестности плоскости симметрии практически на всем крыле реализуется режим закритического течения.

В настоящей работе исследуется обтекание узких холодных треугольных крыльев на режиме сильного взаимодействия с удлинением $s = O(\varepsilon^{1/2})$ в случае, когда величина ε является асимптотически малой.



Фиг. 1. Треугольное крыло в декартовой системе координат

1. Рассматривается симметричное обтекание полубесконечного плоского треугольного крыла на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия. Предполагается, что температура его поверхности T_w мала по сравнению с температурой торможения T_0 набегающего потока. Газ считается совершенным с постоянными значениями C_p и C_v , а динамический коэффициент вязкости линейно зависит от температуры $\mu^\circ/\mu_\infty = C_\infty T^\circ/T_\infty$, где $C_\infty = \text{const}$, а индекс ∞ обозначает параметры в невозмущенном потоке. Компоненты вектора скорости u° , v° , w° в пространственном ламинарном пограничном слое направлены соответственно вдоль осей x° , y° , z° декартовой системы координат, начало которой расположено в вершине крыла (фиг. 1). Удлинение крыла считается малым и равным $s = \operatorname{ctg} \beta = N\epsilon^{1/2}$, где параметр ϵ асимптотически стремится к нулю, а N считается величиной порядка единицы. В набегающем потоке u_∞ – скорость, ρ_∞ – плотность и g_∞ – энталпия торможения стремятся к постоянным значениям, когда число Маха $M_\infty \rightarrow \infty$. В этом случае p_∞ – давление, a_∞ – скорость звука и T_∞ – температура стремятся к нулю.

В соответствии с гиперзвуковой теорией малых возмущений [5] при $M_\infty \gg 1$ и безразмерной толщине ламинарного пограничного слоя $\delta \ll 1$ в случае, когда $M_\infty \delta \gg 1$, индуцированное давление, создаваемое толщиной вытеснения, имеет порядок $p^\circ \sim \rho_\infty u_\infty^2 \delta^2$. Так

как в пограничном слое статическая энталпия $h^\circ \sim u_\infty^2/2$, то, используя уравнение состояния, для оценки плотности газа получаем

$$\frac{\rho^\circ}{\rho_\infty} \sim \frac{p^\circ h_\infty}{p_\infty h^\circ} \sim \delta^2 \epsilon^{-1} \quad (1.1)$$

Оценку для толщины δ получаем, приравнивая порядки главных вязких и инерционных членов в уравнении переноса количества движения вдоль оси x°

$$\rho^\circ u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\circ} \sim \frac{\partial}{\partial y^\circ} \left(\mu^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} \right), \quad \frac{\rho_\infty \delta^2 u_\infty^2}{\epsilon L} \sim \frac{\mu_0 u_\infty}{\delta^2 L^2} \quad (1.2)$$

$$\delta \sim \epsilon^{1/4} \operatorname{Re}_0^{-1/4}$$

Здесь $\operatorname{Re}_0 = \rho_\infty u_\infty L / \mu_0$ – число Рейнольдса, μ_0 – динамический коэффициент вязкости, вычисленный при температуре T_0 , L – характерный размер, который при рассмотрении обтекания полубесконечного крыла в конечные результаты не входит.

Далее предполагается, что плотность газа в пограничном слое мала по сравнению с его плотностью в невозмущенном потоке $\rho^0/\rho_\infty \ll 1$, тогда из (1.1) получаем $\varepsilon \gg \delta^2$ или, учитывая (1.2), $\varepsilon \gg \text{Re}_0^{-1}$.

Для оценки величины поперечного компонента скорости w^0 учтем, что он создается в пространственном пограничном слое перепадом давления по размаху крыла с удлинением $s \sim \varepsilon^{1/2} \gg \delta$. Приравнивая порядки главных инерционных членов и градиента давления в уравнении переноса количества движения вдоль оси z^0 , получаем

$$\begin{aligned} \rho^0 u^0 \frac{\partial w^0}{\partial x^0} &\sim \rho^0 w^0 \frac{\partial w^0}{\partial z^0} \sim \frac{\partial p^0}{\partial z^0} \\ \frac{\rho_\infty \delta^2 u_\infty w^0}{\varepsilon L} &\sim \frac{\rho_\infty \delta^2 w^0}{\varepsilon^{3/2} L} \sim \frac{\rho_\infty u_\infty^2 \delta^2}{\varepsilon^{1/2} L}, \quad \frac{w^0}{u_\infty} \sim \varepsilon^{1/2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Заметим, что вне пограничного слоя, где плотность газа велика, для рассматриваемого случая $\delta/s \ll 1$, этот компонент скорости значительно меньше w^0 , т.к. имеет порядок $w_e^0 \sim u_\infty \delta^2/s \sim u_\infty \text{Re}_0^{-1/2} \ll u_\infty \varepsilon^{1/2}$ [6].

Оценка для компоненты скорости, нормальной поверхности, получается из уравнения неразрывности и имеет порядок

$$v^0 \sim u_\infty \delta$$

Таким образом, для узких крыльев с удлинением $s \sim \varepsilon^{1/2}$ все инерционные члены в уравнениях переноса имеют одинаковый порядок, а следовательно, вырождение уравнений, которое имело место при рассмотрении обтекания крыльев с удлинением порядка единицы [4], не происходит.

В предположении, что $M_\infty \delta \gg 1$, для определения индуцированного давления, создаваемого толщиной вытеснения, можно использовать приближенную формулу "касательного клина" [5].

В соответствии с оценками для ламинарного пространственного пограничного слоя в гиперзвуковом потоке [5] и, учитывая (1.1)–(1.3), вводятся безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x^0 &= Lx, \quad y^0 = L\delta y^*, \quad z^0 = NL\varepsilon^{1/2}z^* \\ p^0 &= \rho_\infty u_\infty^2 \delta^2 p^*, \quad \rho^0 = \rho_\infty \delta^2 \varepsilon^{-1} \rho^*, \quad \mu^0 = \mu_0 \mu \\ g^0 &= u_\infty^2 g/2, \quad u^0 = u_\infty u, \quad v^0 = u_\infty \delta N^{-1} v^* \\ w^0 &= u_\infty \varepsilon^{1/2} w, \quad \delta_e^0 = L\delta \delta_e^*, \quad \delta = \varepsilon^{1/4} N^{1/4} \text{Re}_0^{-1/4} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь g^0 – энталпия торможения, δ_e^0 – толщина пограничного слоя. В переменных (1.4) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} N \frac{\partial \rho^* u}{\partial x} + \frac{\partial \rho^* v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \rho^* w}{\partial z^*} &= 0 \\ N \rho^* u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho^* v^* \frac{\partial u}{\partial y^*} + \rho^* w \frac{\partial u}{\partial z^*} &= -\varepsilon N \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y^*} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N\rho^* u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho^* v^* \frac{\partial w}{\partial y^*} + \rho^* w \frac{\partial w}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y^*} \right) \\
 N\rho^* u \frac{\partial g}{\partial x} + \rho^* v^* \frac{\partial g}{\partial y^*} + \rho^* w \frac{\partial g}{\partial z^*} &= \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial y^*} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial (u^2 + \varepsilon w^2)}{\partial y^*} \right) \right) \\
 g &= 2 \frac{p^*}{\rho^*} + u^2 + \varepsilon \left(2 \frac{p^*}{\rho^*} + w^2 \right), \quad \mu = g - u^2 - \varepsilon w^2 \\
 p^* &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left(\frac{\partial \delta_e^*}{\partial x} \right)^2
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь σ – число Прандтля. Заметим, что в системе (1.5) параметр $N = O(1)$. Однако если $N \ll 1$, что соответствует переходу к еще более узким крыльям с удлинением $s \ll \varepsilon^{1/2}$, в уравнениях переноса количества движения и энергии члены, содержащие производные по x , оказываются по порядку величины малыми по сравнению с производными по y^* и z^* . В пределе при $N = 0$ из системы (1.5) получаем двумерную систему уравнений, аналогичную системе, выражающей закон поперечных сечений для трехмерного пограничного слоя [7], но уже для случая, когда имеет место режим сильного вязко-невязкого взаимодействия.

Для дальнейших преобразований вводим переменные А.А. Дородницына

$$\lambda^* = \int_0^{y^*} \rho^* dy^*, \quad v_\delta^* = \rho^* v^* + w \frac{\partial \lambda^*}{\partial z^*} + u N \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} \tag{1.6}$$

а также переменные, учитывающие поведение функций течения в окрестности вершины треугольного крыла

$$\begin{aligned}
 z^* &= xz, \quad \lambda^* = x^{1/4} \lambda, \quad p^* = x^{-1/2} p_*, \quad \rho^* = x^{-1/2} \rho \\
 \delta_e^* &= x^{3/4} \delta_e, \quad v_\delta = v_\delta^* x^{3/4} + xuN \frac{\partial \lambda}{\partial x} = v_\delta^* x^{3/4} - \frac{uN\lambda}{4}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Заметим, что переменные (1.7) для полубесконечного треугольного крыла являются автомодельными, так как система уравнений пространственного пограничного слоя в них сводится к двумерной, зависящей только от λ и z , так как продольная координата x выпадает из краевой задачи.

Для учета симметричности течения на крыле и поведения функций течения в окрестности передних кромок ($z = \pm 1$) введем сначала переменные подобные [3], которые, однако, не являются автомодельными (по оси z) в окрестности этих кромок даже при наличии здесь областей с закритическим режимом течения

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{\lambda}{\sqrt{2(1+\varepsilon)(1-z^2)^{1/2}}}, \quad p(z) = \sqrt{1-z^2} p_* \\
 \Delta(z) &= (1-z^2)^{-3/4} \delta_e \\
 v(\eta, z) &= \frac{1-z^2}{p} \left[(w - Nuz) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{v_\delta}{\sqrt{2(1+\varepsilon)(1-z^2)^{1/2}}} \right]
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Тогда система уравнений пространственного пограничного слоя и граничные условия на холодном полубесконечном плоском треугольном крыле (1.5) с учетом (1.6)–(1.8) принимают вид

$$\begin{aligned}
 f &= (w - Nuz)(1 - z^2)p^{-1} \\
 f \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{N\epsilon}{2p(1+\epsilon)}(g - u^2 - \epsilon w^2) \left(-\frac{1+z^2}{2} - z \frac{1-z^2}{p} \frac{dp}{dz} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
 f \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2p(1+\epsilon)}(g - u^2 - \epsilon w^2) \left(z + \frac{1-z^2}{p} \frac{dp}{dz} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\
 f \frac{\partial g}{\partial z} + v \frac{\partial g}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial(u^2 + \epsilon w^2)}{\partial \eta} \right] \\
 \frac{\partial v}{\partial \eta} &= (w - Nuz) \frac{z}{2p} - \left(\frac{Nu}{4} - Nz \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{1-z^2}{p} \\
 \Delta &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\epsilon)} p} \int_0^\infty (g - u^2 - \epsilon w^2) d\eta \\
 p &= \frac{2+\epsilon}{2} \left[\frac{3}{4}(1+z^2)\Delta - z(1-z^2) \frac{d\Delta}{dz} \right]^2 \\
 \eta = 0: u &= w = v = g = 0 \\
 \eta \rightarrow \infty: u &\rightarrow 1, \quad w \rightarrow 0, \quad g \rightarrow 1
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Система уравнений (1.9) существенно отличается от соответствующей системы [3] тем, что при предельном переходе $\epsilon \rightarrow 0$, в данной системе толщина вытеснения уже не обращается в ноль. Решение краевой задачи (1.9), определяющее течение в пограничном слое на всем крыле, зависит в общем случае от параметров N , σ и $\epsilon = \gamma - 1$.

Переходя в краевой задаче (1.9) к пределу $\epsilon = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
 f &= (w - Nuz)(1 - z^2)p^{-1} \\
 f \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \\
 f \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2p}(g - u^2) \left(z + \frac{1-z^2}{p} \frac{dp}{dz} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\
 f \frac{\partial g}{\partial z} + v \frac{\partial g}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial u^2}{\partial \eta} \right] \\
 \frac{\partial v}{\partial \eta} &= (w - Nuz) \frac{z}{2p} - \left(\frac{Nu}{4} - Nz \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{1-z^2}{p}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2}p_0} \int_0^\infty (g - u^2) d\eta$$

$$p = \left[\frac{3}{4}(1+z^2)\Delta - z(1-z^2) \frac{d\Delta}{dz} \right]^2$$

$$\eta = 0: u = w = v = g = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty: u \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 0, \quad g \rightarrow 1$$

Систему (1.10) можно рассматривать как систему уравнений для определения главных членов разложения функций течения в степенные ряды по параметру ϵ . Эта система в отличие от [4] не разделяется, так как в ней функции u , g , v , p и Δ зависят не только от параметров N и σ , но и от поперечного компонента скорости w .

На передних кромках крыла $z = \pm 1$ система (1.10) вырождается соответственно в две системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} v \frac{du}{d\eta} &= \frac{d^2 u}{d\eta^2} \\ v \frac{dw}{d\eta} &= -\frac{1}{2p}(g - u^2)(\pm 1) + \frac{d^2 w}{d\eta^2} \\ v \frac{dg}{d\eta} &= \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{dg}{d\eta} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{du^2}{d\eta} \right] \\ \frac{dv}{d\eta} &= (w - Nu(\pm 1)) \frac{\pm 1}{2p} \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$p = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty (g - u^2) d\eta \right)^{2/3}$$

$$\eta = 0: u = w = v = g = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty: u \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 0, \quad g \rightarrow 1$$

Рассмотрим далее систему (1.11) в случае, когда число Прандтля $\sigma = 1$. Тогда имеет место интеграл Крокко $g = u$. Систему в неавтомодельных переменных можно преобразовать, если ввести функции ψ и ϕ такие, что $u = \psi'$ и $w = \phi'$, где штрих – производная по η . Считая, что на поверхности крыла функции $\psi(0) = \phi(0) = 0$, из уравнения неразрывности после интегрирования получаем $v = (\pm 1/2p)[\phi - (\pm 1)N\psi]$, где знаки \pm соответствуют передним кромкам со значениями координаты $z = \pm 1$. Производя еще замену $\psi(\eta) = \sqrt{p}\Psi(\zeta)$, $\phi(\eta) = \sqrt{p}\Phi(\zeta)$, и $\eta = \sqrt{p}\zeta$, получаем из (1.11) соответственно для $z = \pm 1$

$$\begin{aligned} 2\Psi'' + (N\Psi \mp \Phi)\Psi'' &= 0 \\ 2\Phi'' + (N\Psi \mp \Phi)\Phi'' &= \pm\Psi'(1 - \Psi') \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\zeta = 0: \Psi = \Psi' = \Phi = \Phi' = 0; \quad \zeta \rightarrow \infty: \Psi' \rightarrow 1, \quad \Phi' \rightarrow 0$$

$$p = \frac{3\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty \Psi'(1 - \Psi') d\zeta$$

Здесь штрих – производная по новой координате ζ . Решение системы дифференциальных уравнений (1.12), записанных в новых переменных, уже не зависит от величины давления p . Следует отметить, что эта нелинейная система уравнений при $N \rightarrow 0$ (очень узкие крылья) превращается в систему, в которой уравнение для определения $\Psi(\zeta)$ уже линейное:

$$2\Psi''' \mp \Phi\Psi'' = 0$$

$$2\Phi''' \mp \Phi\Phi'' = \pm\Psi'(1 - \Psi')$$

$$\zeta = 0: \Psi = \Psi' = \Phi = \Phi' = 0; \quad \zeta \rightarrow \infty: \Psi' \rightarrow 1, \quad \Phi' \rightarrow 0$$

$$p = \frac{3\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty \Psi'(1 - \Psi') d\zeta$$

Решение систем уравнений (1.12), (1.13) можно получить численно. Это будет показано в разд. 3. Заметим, что формально в системе (1.12) перейти к пределу $N \rightarrow \infty$ нельзя. Однако если в ней сделать замену переменных

$$\Psi = N^{-1/2}F(\theta), \quad \Phi = N^{-3/2}\Omega(\theta), \quad \zeta = N^{-1/2}\theta, \quad p = N^{-1/2}P$$

то, затем переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, получим систему

$$2F'' + FF' = 0$$

$$2\Omega''' + F\Omega'' = \pm F(1 - F)$$

$$\theta = 0: F = F' = \Omega = \Omega' = 0; \quad \theta \rightarrow \infty: F \rightarrow 1, \quad \Omega' \rightarrow 0$$

$$p = \frac{3\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty F(1 - F) d\theta$$

Эта система разделилась. Уравнение для определения функции F с соответствующими граничными условиями представляет задачу Блазиуса, решение которой известно. Второе уравнение в системе (1.14) является линейным и его решение для Ω' приведено в [4].

Решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.12), а в предельных случаях систем (1.13), (1.14) позволяют найти необходимые краевые условия при $z = \pm 1$ для решения системы уравнений в частных производных (1.10) при $\sigma = 1$. Решение системы (1.10) в рассмотренных переменных не требует специального выделения области закритического течения.

2. Для исследования поведения функций течения в пограничном слое в окрестности плоскости симметрии треугольного крыла в предельном случае ($\varepsilon = 0$) предполагается, что имеют место разложения [8]

$$u = u_0(\eta) + O(z^2), \quad g = g_0(\eta) + O(z^2)$$

$$v = v_0(\eta) + O(z^2), \quad w = w_1(\eta)z + O(z^3) \quad (2.1)$$

$$\Delta = \Delta_0 + O(z^2), \quad p = p_0 + p_1 z^2 + O(z^4)$$

Подставляя разложения (2.1) в (1.10) и приравнивая члены одинакового порядка, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений нулевого приближения

$$\begin{aligned} v_0 \frac{du_0}{d\eta} &= \frac{d^2 u_0}{d\eta^2}, \quad v_0 \frac{dg_0}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{dg_0}{d\eta} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{du_0^2}{d\eta} \right) \\ v_0 \frac{dw_1}{d\eta} &= -\frac{1}{2p_0} (g_0 - u_0^2) \left[1 + \frac{2p_1}{p_0} \right] + \frac{d^2 w_1}{d\eta^2} - (w_1 - Nu_0) \frac{w_1}{p_0} \\ \frac{dv_0}{d\eta} &= -\left(w_1 + \frac{Nu_0}{4} \right) \frac{1}{p_0}, \quad p_0 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} \int_0^\infty (g_0 - u_0^2) d\eta \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\eta = 0: u_0 = w_1 = v_0 = g_0 = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty: u_0 \rightarrow 1, \quad w_1 \rightarrow 0, \quad g_0 \rightarrow 1$$

Заметим прежде всего что система (2.2) не разделилась. Уравнение для определения w_1 нелинейное и зависит от параметра $p_1 = 0.5(d^2p/dz^2)_{z=0}$. В отличие от [4], где рассматривались крылья с удлинением порядка единицы, можно показать, что величина p_1 не определяется с использованием следующих членов разложения. Она должна находиться из условия сращивания с решением, приходящим с передней кромки крыла или с линии перехода от закритического режима течения к докритическому.

3. Для исследования обтекания крыльев, на которых в пограничном слое образуются области с закритическим режимом течения, можно рассмотреть течение только около одной из передних кромок, например, $z = 1$ и ввести вместо (1.8) автомодельные (по оси z) переменные (с нижним индексом a)

$$\begin{aligned} \eta_a &= \frac{\lambda}{\sqrt{2(1+\varepsilon)(1-z)^{1/2}}}, \quad p_a = \sqrt{1-z} p_* \\ \Delta_a &= (1-z)^{-3/4} \delta_e \\ v_a &= \frac{1-z}{p_a} \left[(w - Nu z) \frac{\partial \eta_a}{\partial z} + \frac{v_\delta}{\sqrt{2(1+\varepsilon)(1-z)^{1/2}}} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

В области закритического течения в случае ее существования при $z_k \leq z \leq 1$, в которой функции течения зависят только от нормальной к поверхности координаты η_a , вместо системы уравнений в частных производных (1.9) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_a \frac{du_a}{d\eta_a} &= C \frac{N\varepsilon}{2p_a(1+\varepsilon)} (g_a - u_a^2 - \varepsilon w_a^2) + \frac{d^2 u_a}{d\eta_a^2} \\ v_a \frac{dw_a}{d\eta_a} &= -C \frac{1}{2p_a(1+\varepsilon)} (g_a - u_a^2 - \varepsilon w_a^2) + \frac{d^2 w_a}{d\eta_a^2} \\ v_a \frac{dg_a}{d\eta_a} &= \frac{d}{d\eta_a} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{dg_a}{d\eta_a} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{d(u_a^2 + \varepsilon w_a^2)}{d\eta_a} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_a}{d\eta_a} &= C(w_a - Nu_a) \frac{1}{2p_a} \\ \Delta_a &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\varepsilon)} p_{a0}} \int_0^\infty (g_a - u_a^2 - \varepsilon w_a^2) d\eta_a \\ p_a &= \frac{2+\varepsilon}{2} \left(C \frac{3}{2} \Delta_a \right)^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\eta_a = 0: u_a = w_a = v_a = g_a = 0$$

$$\eta_a \rightarrow \infty: u_a \rightarrow 1, \quad w_a \rightarrow 0, \quad g_a \rightarrow 1$$

где постоянный коэффициент $C = 1/2$. Заметим, что система (3.2) описывает также течение на скользящей холодной пластине на режиме сильного взаимодействия [1]. На основании вида уравнений (3.2) далее предполагается, что в закритической области для малых значений параметра ε для функций течения в автомодельных переменных (3.1) имеют место разложения типа

$$F_a = F_{a0} + O(\varepsilon) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в систему (3.2) для определения членов нулевого приближения, находим

$$\begin{aligned} v_{a0} \frac{du_{a0}}{d\eta_a} &= \frac{d^2 u_{a0}}{d\eta_a^2} \\ v_{a0} \frac{dw_{a0}}{d\eta_a} &= -C \frac{1}{2p_{a0}} (g_{a0} - u_{a0}^2) + \frac{d^2 w_{a0}}{d\eta_a^2} \\ v_{a0} \frac{dg_{a0}}{d\eta_a} &= \frac{d}{d\eta_a} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{dg_{a0}}{d\eta_a} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{du_{a0}^2}{d\eta_a} \right] \\ \frac{dv_{a0}}{d\eta_a} &= C \frac{w_{a0} - Nu_{a0}}{2p_{a0}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$p_{a0} = \left(C \frac{3\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty (g_{a0} - u_{a0}^2) d\eta_{a0} \right)^{2/3}$$

$$\eta_{a0} = 0: u_{a0} = w_{a0} = v_{a0} = g_{a0} = 0$$

$$\eta_{a0} \rightarrow \infty: u_{a0} \rightarrow 1, \quad w_{a0} \rightarrow 0, \quad g_{a0} \rightarrow 1$$

Заметим, что при значении $C = 1$ система (3.4) полностью совпадает с системой (1.11) на передней кромке при $z = 1$, но записанной в не автомодельных переменных. Зная решение системы (3.4) при $C = 1/2$, можно найти в нулевом приближении значение координаты z_k , при которой осуществляется переход от закритического режима течения к докритическому. В общем случае ее величина определяется при обтекании полубеско-

нечного треугольного крыла из условия обращения в ноль интеграла [1], который в автомодельных переменных (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left[\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{g_a - u_a^2 - \varepsilon w_a^2}{u_a \sin(\omega_0 - \omega_1) - \varepsilon^{1/2} w_a \cos(\omega_0 - \omega_1)} \right)^2 - g_a + u_a^2 + \varepsilon w_a^2 \right] d\eta_a = 0 \\ z_k &= \frac{\operatorname{tg}(\omega_0 - \omega_1)}{\operatorname{tg} \omega_0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $\omega_0 = \pi/2 - \beta$, угол ω_1 отсчитывается от передней кромки со значением $z = 1$, а функции течения определяются из решения системы (3.2).

Для малых значений параметра ε предполагается, что имеет место разложение

$$\omega_0 - \omega_1 = C_1 \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon) \quad (3.6)$$

Здесь коэффициент C_1 – функция N и σ . Подставляя разложения (3.3), (3.6) в (3.5), получим для нулевого приближения

$$\int_0^\infty \left(\frac{g_{a0} - u_{a0}^2}{u_{a0} C_1 - w_{a0}} \right)^2 d\eta_a = 2 \int_0^\infty (g_{a0} - u_{a0}^2) d\eta_a, \quad z_k = \frac{C_1}{N} \quad (3.7)$$

Входящие в интеграл функции определяются из решения системы (3.4), зависящей от параметра N . Следовательно, и величина C_1 – функция от N . Учитывая, что в рассматриваемом случае $\omega_0 \approx \operatorname{tg} \omega_0 = N \sqrt{\varepsilon}$, из (3.6) находим

$$\omega_1 = (N - C_1(N)) \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (3.8)$$

Для дальнейшего упрощения рассматривается случай, когда $\sigma = 1$. Тогда из (3.7) и (3.8), учитывая интеграл Крокко $g_{a0} = u_{a0}$ системы уравнений (3.4), определяем

$$\int_0^\infty (1 - u_{a0})^2 (C_1 - w_{a0} u_{a0}^{-1})^{-2} d\eta_a = 2 \int_0^\infty u_{a0} (1 - u_{a0}) d\eta_a \quad (3.9)$$

$$z_k = C_1 N^{-1}, \quad \omega_1 = (N - C_1(N)) \sqrt{\varepsilon}$$

Аналогично тому, как было сделано при выводе системы уравнений (1.12), систему (3.4) при $\sigma = 1$ уже в автомодельных переменных можно преобразовать, если ввести $u_{a0} = \Psi'_{a0}$ и $w_{a0} = \Phi'_{a0}$, где штрих – производная по η_a . Из уравнения неразрывности после интегрирования получаем $v_{a0} = (1/2p_{a0})[\Phi_{a0} - N\Psi_{a0}]$, здесь рассматривается область, лежащая около передней кромки $z = 1$. Производя еще замену $\Psi_a(\eta_a) = \sqrt{p_{a0}} \Psi_a(\zeta_a)$, $\Phi_a(\eta_a) = \sqrt{p_{a0}} \Phi_a(\zeta_a)$ и $\eta_a = \sqrt{p_{a0}} \zeta_a$, находим из (3.4) и (3.9)

$$4\Psi''_{a0} + (N\Psi_{a0} - \Phi_{a0})\Psi'_{a0} = 0$$

$$4\Phi''_{a0} + (N\Psi_{a0} - \Phi_{a0})\Phi'_{a0} = \Psi'_{a0}(1 - \Psi'_{a0})$$

$$\zeta_a = 0: \Psi_{a0} = \Psi'_{a0} = \Phi_{a0} = \Phi'_{a0} = 0$$

$$\zeta_a \rightarrow \infty: \Psi'_{a0} \rightarrow 1, \quad \Phi'_{a0} \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

$$p_{a0} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \int_0^\infty \Psi'_a (1 - \Psi'_a) d\zeta_a$$

$$\int_0^\infty (1 - \Psi'_a)^2 (C_1 - \Phi'_a (\Psi'_a)^{-1})^{-2} d\zeta_a = 2 \int_0^\infty \Psi'_a (1 - \Psi'_a) d\zeta_a$$

$$\omega_1 = (N - C_1(N))\sqrt{\epsilon}, \quad z_k = N^{-1} C_1(N)$$

Здесь штрих – производная по координате ζ_a . Заметим, что краевую задачу (1.12) можно привести к виду (3.10), если ввести преобразование $\Psi = \Psi_a/\sqrt{2}$, $\Phi = \Phi_a/\sqrt{2}$, $\zeta = \zeta_a/\sqrt{2}$, $p = \sqrt{2} p_{a0}$. Решение данной краевой задачи зависит от N , т.е. коэффициента, входящего в выражение, определяющее удлинение крыла. Прежде всего следует отметить: если $C_1(N) = N$, то на таких крыльях область с закритическим режимом течения отсутствует и отпирание происходит непосредственно на передней кромке. Следовательно, для $N < C_1(N)$ в пограничном слое на всем крыле реализуется только режим докритического течения.

Для исследования случая с $N = C_1(N)$ сделаем замену переменных

$$\Psi_a = N^{-1/2} \Psi_{a0}, \quad \Phi_a = N^{1/2} \Phi_{a0}, \quad p_{a0} = N^{-1/2} P_{a0}, \quad \zeta_a = N^{-1/2} \zeta_{a0}$$

Тогда система (3.10) примет вид

$$\begin{aligned} 4\Psi'''' + (\Psi_{a0} - \Phi_{a0})\Psi''_{a0} &= 0 \\ 4\Phi''' + (\Psi_{a0} - \Phi_{a0})\Phi''_{a0} &= N^{-2}\Psi'_{a0}(1 - \Psi'_{a0}) \\ \zeta_{a0} = 0: \Psi_{a0} = \Psi'_{a0} = \Phi_{a0} = \Phi'_{a0} &= 0 \\ \zeta_{a0} \rightarrow \infty: \Psi'_{a0} \rightarrow 1, \quad \Phi'_{a0} \rightarrow 0 & \end{aligned} \tag{3.11}$$

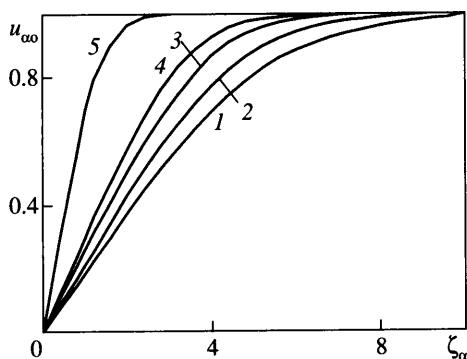
$$P_{a0} = \frac{3\sqrt{2}}{8} I$$

$$\int_0^\infty (1 - \Psi'_{a0})^2 \left(C_1 - \frac{N\Phi'_{a0}}{\Psi'_{a0}} \right)^{-2} d\zeta_{a0} = 2I$$

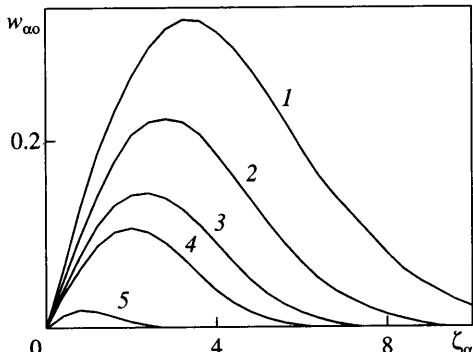
$$I = \int_0^\infty \Psi'_{a0} (1 - \Psi'_{a0}) d\zeta_{a0}$$

В случае $C_1(N) = N$ из интегрального равенства системы (3.11) получаем явное выражение для величины C_1

$$C_1 = N = \sqrt{\frac{I}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1 - \Psi'_{a0}}{1 - \Phi'_{a0} (\Psi'_{a0})^{-1}} \right)^2 d\zeta_{a0}} \tag{3.12}$$



Фиг. 2. Профили продольной компоненты скорости $u_{a0} = \Psi'_a(\zeta_a)$ в области закритического течения около передней кромки $z = 1$ для $\gamma = 1$; $\sigma = 1$: 1–5 – $N = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 10$



Фиг. 3. Профили поперечной компоненты скорости $w_{a0} = \Phi'_a(\zeta_a)$ в области закритического течения около передней кромки $z = 1$ для $\gamma = 1$; $\sigma = 1$: 1–5 – $N = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 10$

Подставляя (3.12) в (3.11), получаем краевую задачу для треугольного крыла, на котором переход от закритического течения к докритическому реализуется на передних кромках

$$4\Psi'''_{a0} + (\Psi'_{a0} - \Phi'_{a0})\Psi''_{a0} = 0$$

$$4\Phi'''_{a0} + (\Psi'_{a0} - \Phi'_{a0})\Phi''_{a0} = 2\Psi'_{a0}(1 - \Psi'_{a0}) \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1 - \Psi'_{a0}}{1 - \Phi'_{a0}(\Psi'_{a0})^{-1}} \right)^2 d\zeta_{a0} \right)^{-1} \quad (3.13)$$

$$\zeta_{a0} = 0: \Psi'_{a0} = \Phi'_{a0} = \Psi''_{a0} = \Phi''_{a0} = 0$$

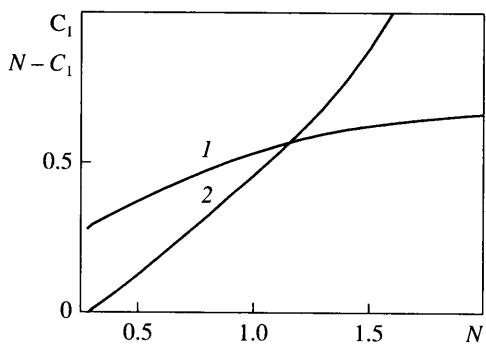
$$\zeta_{a0} \rightarrow \infty: \Psi'_{a0} \rightarrow 1, \quad \Phi'_{a0} \rightarrow 0$$

Решая систему (3.13), по формуле (3.12) определяем значение N , а следовательно, и удлинение крыла $s = Ne^{1/2}$, для которого $C_1(N) = N$.

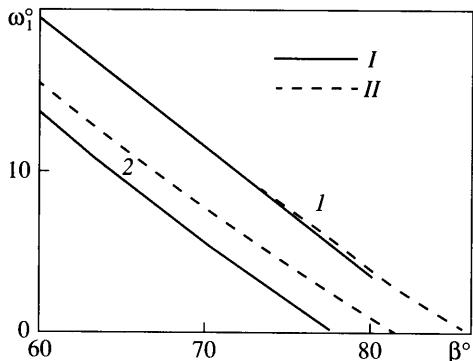
Профили продольной $u_{a0} = \Psi'_a(\zeta_a)$ и поперечной $w_{a0} = \Phi'_a(\zeta_a)$ компонент скорости на фиг. 2, 3, полученные при решении краевой задачи (3.10) при нескольких значениях N (кривые 1–5), показывают, что его увеличение, т.е. уменьшение угла стреловидности передней кромки, приводит к существенному снижению поперечной компоненты скорости w_{a0} и безразмерной толщины пограничного слоя. Профили u_{a0} при этом становятся более наполненными.

Зависимости $C_1(N)$ и $N - C_1(N)$ (кривые 1, 2) на фиг. 4 показывают, что $C_1(N) = N$ при $N \approx 0.28$, и в этом случае течение описывается системой уравнений (3.13). Следовательно, на крыльях с удлинением $s \leq 0.28\sqrt{\epsilon}$ течение в пограничном слое на всем крыле является докритическим.

Зависимость угла перехода ω_1 от закритического режима течения к докритическому от угла стреловидности передней кромки крыла β при $\sigma = 1$ и $\gamma = 1.05, 1.2$ представлена на фиг. 5 (кривые 1, 2). Точное решение I, полученное при решении системы уравнений (3.2) и обращения в ноль интеграла (3.5), сопоставляется на фиг. 5 с приближенным решением II, найденным по формуле (3.8) и зависимости $N - C_1(N)$. Следует отметить вполне удовлетворительное совпадение приближенного и точного решений, особенно при $\gamma = 1.05$ (кривые 1).



Фиг. 4. Зависимости коэффициентов C_1 и $N - C_1$ от N



Фиг. 5. Зависимости угла перехода ω_1 от угла стреловидности β крыла при $\sigma = 1:1, 2 - \gamma = 1.05; 1.2$; I – точное (3.2), (3.5) и II – приближенное (3.10) решения

Заключение. Показано, что при обтекании холодного плоского треугольного крыла с удлинением $s = N\sqrt{\gamma - 1}$ и показателем адиабаты $\gamma \rightarrow 1$ в ламинарном пространственном пограничном слое возникают вторичные течения с поперечной компонентой скорости порядка $O(\sqrt{\gamma - 1})$. В предельном случае ($\gamma = 1$) установлено, что течение в окрестности плоскости симметрии крыла описывается в нулевом приближении системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая не разделяется и не замыкается при использовании следующих членов разложения. Найдена аналитическая зависимость координаты перехода от закритического режима течения к докритическому для нулевого приближения. Для случая обтекания крыла совершенным газом с числом Прандтля, равным единице, получена графическая зависимость для коэффициента в разложении для координаты перехода. Показано, что уже для $\gamma \leq 1.05$ определенная аналитическая зависимость дает удовлетворительное совпадение с точным решением.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00806).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейланд В.Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 1. С. 70–79.
2. Дудин Г.Н., Липатов И.И. О закритическом режиме гиперзвукового обтекания треугольного крыла // ПМТФ. 1985. № 3. С. 100–106.
3. Дудин Г.Н. К вопросу существования автомодельных решений в закритической области при гиперзвуковом обтекании треугольного крыла // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 2. С. 156–164.
4. Дудин Г.Н., Нейланд В.Я. Об одном предельном решении обтекания треугольного крыла при наличии областей закритического течения // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 6. С. 102–113.
5. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
6. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
7. Дудин Г.Н., Нейланд В.Я. Закон поперечных сечений для трехмерного пограничного слоя на тонком крыле в гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 2. С. 75–84.
8. Дудин Г.Н. Характеристики пространственного гиперзвукового пограничного слоя в окрестности плоскости симметрии треугольного крыла // Тр. ЦАГИ. 1983. Вып. 2177. С. 183–192.