

УДК 533.6.011.55

© 2005 г. И. Г. БРЫКИНА

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ТОНКОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ

Рассматривается гиперзвуковое трехмерное обтекание затупленных тел в окрестности критической точки потоком вязкого разреженного газа. Исследуется вопрос о применимости модели тонкого вязкого ударного слоя при переходном режиме течения от континуального к свободномолекулярному. В [1] показано, что при малых числах Рейнольдса можно выделить три режима обтекания в гиперзвуковом потоке, и исследован один из режимов. В данной работе получено асимптотическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя для другого режима обтекания. С уменьшением числа Рейнольдса коэффициент теплопередачи, определяемый полученным решением, приближается к значению в свободномолекулярном потоке, коэффициент трения приближается к свободномолекулярному пределу при условии малости толщины ударного слоя. Проводится сравнение аналитического решения с численным и с результатами расчета методом прямого статистического моделирования Монте-Карло.

*Ключевые слова:* гиперзвуковое течение разреженного газа, число Рейнольдса, тонкий вязкий ударный слой, асимптотическое решение, коэффициенты трения и теплопередачи.

При исследовании гиперзвуковых течений разреженного газа, характерных для полета аппаратов с гиперзвуковыми скоростями в верхних слоях атмосферы Земли на высотах порядка 100 км и выше, такие континуальные модели как полные и параболизированные уравнения Навье–Стокса, вязкий ударный слой и пограничный слой дают для коэффициентов теплопередачи и трения значения, которые при уменьшении числа Рейнольдса  $Re$  неограниченно возрастают, превышая их значения в свободномолекулярном потоке, т.е. дают физически неверные результаты [2.3]. Учет скорости скольжения и скачка температуры в граничных условиях на поверхности несколько снижает значения коэффициентов теплопередачи и трения, и таким образом расширяет область применимости этих моделей в сторону более низких чисел  $Re$ , но не устраняет тенденцию этих коэффициентов к возрастанию. Для расчета аэродинамики, теплопередачи и структуры течения в переходном к свободномолекулярному режиму течения применяется кинетический подход и широко используется метод прямого статистического моделирования Монте-Карло. Однако ограничение применимости континуальных моделей при малых числах  $Re$  не исключает использование континуального подхода, в частности модели тонкого вязкого ударного слоя [4] для расчета таких параметров течения как коэффициенты теплопередачи и трения на поверхности обтекаемого тела.

Данная работа является продолжением [1], где было показано, что при малых числах  $Re$  можно выделить 3 режима течения в гиперзвуковом потоке:

$$I: Re\epsilon \gg T_w^{1+\omega}, \quad II: Re\epsilon = O(T_w^{1+\omega}), \quad III: Re\epsilon \ll T_w^{1+\omega}, \quad Re = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu(T_0)$$

где  $\rho_\infty$  и  $V_\infty$  – плотность и скорость набегающего потока,  $T_0$  – температура торможения набегающего потока,  $\epsilon = (\gamma - 1)/2\gamma$ ,  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей,  $R_0$  – наименьший из радиусов главных кривизн в точке торможения,  $\mu(T_0)$  – коэффициент

вязкости,  $TT_0$  – температура,  $T_w T_0$  – температура поверхности; предполагается степенная зависимость коэффициента вязкости от температуры  $\mu \sim T^\omega$ . Для режима I сильно охлажденной поверхности было получено [1] асимптотическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя в окрестности точки торможения тела (для плоских, осесимметричных и трехмерных течений), в котором значения коэффициентов теплопередачи и трения с уменьшением числа Re приближаются к своим значениям в свободномолекулярном потоке. Проведенное сравнение с численными расчетами и экспериментальными данными показало хорошую точность асимптотического решения.

В данной работе рассматривается режим обтекания III. Показано, что в этом режиме важным параметром является  $\chi = (\varepsilon T_w^{1+\omega} / \text{Re})^{1/2}$ . Получено асимптотическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Re, в котором коэффициент теплопередачи с уменьшением числа Re приближается к своему значению в свободномолекулярном потоке (при коэффициенте accommodation 1), независимо от значения параметра  $\chi$ . Коэффициент трения приближается к свободномолекулярному пределу при дополнительном условии малости  $\chi$ , или толщины ударного слоя, что связано с влиянием на напряжение трения продольного градиента давления, через который проявляется рост толщины ударного слоя. Проводится сравнение с численным решением и с результатами расчета методом Монте-Карло [5].

**1. Постановка задачи.** Будем рассматривать трехмерные гиперзвуковые течения около гладких затупленных тел. Выберем систему координат таким образом, чтобы оси  $x_1$  и  $x_2$  лежали в плоскостях главных кривизн, ось  $y$  – по нормали к поверхности. В такой системе координат уравнения тонкого вязкого ударного слоя в окрестности линии торможения в переменных Дородницына – Лиза имеют вид [6]

$$-(f_1 + \kappa f_2) \frac{du_i}{d\eta} + d_i u_i^2 + \frac{2d_i p_i'}{\rho} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\mu \rho}{\text{Re} \Delta^2} \frac{du_i}{d\eta} \right), \quad i = 1, 2$$

$$-(f_1 + \kappa f_2) \frac{dg}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\mu \rho}{\sigma \text{Re} \Delta^2} \frac{dg}{d\eta} \right)$$

$$\frac{df_i}{d\eta} = u_i, \quad \frac{dp_i'}{d\eta} = \Delta u_i^2, \quad p_i' = \frac{1}{2d_i} \frac{\partial^2 p}{\partial (x_i)^2} \Big|_{x_1=0, x_2=0} \quad (1.1)$$

$$g = \frac{H - H_w}{H_\infty - H_w}, \quad \frac{1}{\rho} = \varepsilon T, \quad \mu = T^\omega, \quad T = g(1 - T_w) + T_w$$

$$\eta = \frac{1}{\Delta R_0} \int_0^y \rho dy, \quad \Delta = \frac{1}{R_0} \int_0^{y_s} \rho dy, \quad y_s = \Delta R_0 \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\eta$$

$$d_1 = 1, \quad d_2 = \kappa$$

Здесь  $\rho_\infty \rho$  – плотность,  $H$  – полная энтальпия,  $V_\infty v_i$  – компоненты вектора скорости,  $v_i = v_\infty u_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\rho_\infty V_\infty p$  – давление,  $\sigma$  – число Прандтля,  $\kappa$  – отношение радиусов главных кривизн в точке торможения,  $0 \leq \kappa \leq 1$ . В случае осесимметричных и плоских течений будем иметь соответственно

$$\kappa = 1, \quad d_1 = d_2, \quad f_1 = f_2, \quad p_1' = p_2', \quad u_1 = u_2$$

$$\kappa = 0, \quad d_2 = 0, \quad f_2 = 0, \quad p_2' = 0, \quad u_2 = 0$$

На поверхности тела используются условия прилипания, на ударной волне – обобщенные условия Ренкина–Гюгонио [6]

$$\begin{aligned} \eta = 0: u_i = 0, \quad g = 0, \quad f_i = 0, \quad i = 1, 2 \\ \eta = 1: u_i = 1 - \frac{\mu\rho}{\text{Re}\Delta} \frac{du_i}{d\eta}, \quad g = 1 - \frac{\mu\rho}{\sigma\text{Re}\Delta} \frac{dg}{d\eta}, \quad p = 1, \quad p'_i = -1 \\ \Delta = \frac{1}{f_1 + \kappa f_2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Отход ударной волны  $y_s$  находится из уравнения

$$y_s = \Delta R_0 \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\eta \quad (1.3)$$

Коэффициенты трения и теплопередачи на поверхности определяются как

$$\begin{aligned} c_{fi} = \frac{2\tau_i}{v_{i\infty}\rho_{i\infty}V_{i\infty}^2} = \frac{\mu\rho}{\Delta\text{Re}} \frac{du_i}{d\eta} \Big|_w, \quad \tau_i = \left( \mu_0 \mu \frac{d(V_{i\infty} v_{i\infty} u_i)}{dy} \right)_w \\ c_H = \frac{q}{\rho_{i\infty} V_{i\infty} (H_{i\infty} - H_w)} = \frac{\mu\rho}{\sigma\Delta\text{Re}} \frac{dg}{d\eta} \Big|_w, \quad q = \left( \lambda \frac{d(T_0 T)}{dy} \right)_w \end{aligned}$$

Можно выделить три режима гиперзвукового обтекания тела разреженным газом [1]

$$\text{I: } T_w \ll (\text{Re}\varepsilon)^{1/(1+\omega)}; \quad \text{II: } T_w = O((\text{Re}\varepsilon)^{1/(1+\omega)}); \quad \text{III: } T_w \gg (\text{Re}\varepsilon)^{1/(1+\omega)}$$

в зависимости от соотношения  $g$  и  $T_w$ , определяющие характер асимптотического разложения плотности и коэффициента вязкости. В данной работе исследуется режим III

$$T_w \gg (\text{Re}\varepsilon)^{1/(1+\omega)} \quad \text{или} \quad \varepsilon\text{Re} \ll T_w^{(1+\omega)} \quad (1.4)$$

Асимптотический анализ показывает, что в этом режиме  $u_{si} = O((\text{Re}\varepsilon T_w^{1-\omega})^{1/2})$ ,  $g_s = O((\text{Re}\varepsilon T_w^{1-\omega})^{1/2})$ .

**2. Асимптотическое решение для коэффициента теплопередачи.** Получим асимптотическое решение задачи (1.1), (1.2) для коэффициента теплопередачи  $c_H$  и коэффициентов трения  $c_{fi}$  при малых числах  $\text{Re}$  в режиме III аналогично [1].

Сначала система уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) решается интегральным методом последовательных приближений по алгоритму, изложенному в [6]. В первом приближении этого метода, аналогично тому как это было сделано в [6] для случая  $\omega = 1/2$  для произвольных значений  $\omega$  получены следующие выражения для коэффициентов теплопередачи и трения  $c_H, c_{f1}, c_{f2}$

$$c_H = \Delta_H \kappa^* a \left( 1 - \frac{2}{3} b \right), \quad \kappa^* = \frac{1 + \kappa}{2} \quad (2.1)$$

$$c_{fi} = 2\Delta_{ui} \kappa^* \left( a + 2\varepsilon T_w d_i^* - \frac{a^2}{3} (2 + d_i^*) + \varepsilon T_w d_i^{*2} \frac{a}{2} \right), \quad d_i^* = \frac{2d_i}{1 + \kappa} \quad (2.2)$$

$$\Delta_H = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1}}{2b_1}, \quad \Delta_{ui} = \frac{-a_{2i} + \sqrt{a_{2i}^2 + 4a_{1i}}}{2a_{1i}}, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

$$b_1 = \kappa^* \sigma \text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega} a \left(1 - \frac{3}{4} b\right), \quad b_2 = \kappa^* a(1-b), \quad a_{2i} = \kappa^* a(1-a) \quad (2.4)$$

$$a_{1i} = \kappa^* \text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega} \left( a - \frac{a^2}{4} (3 + d_i^*) + \varepsilon T_w d_i^* + \varepsilon T_w d_i^{*2} \frac{2a}{5} \right), \quad i = 1, 2$$

Здесь  $a$  и  $b$  определяются из системы уравнений

$$a = 1 - \frac{(1 + \kappa) a^2}{2 \text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega}}, \quad b = 1 - \frac{(1 + \kappa) a b}{2 \sigma \text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega}}$$

Решением этих уравнений при  $\text{Re} \varepsilon = o(1)$  будет

$$a = \left( \frac{2 \text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega}}{1 + \kappa} \right)^{1/2}, \quad b = \sigma a \quad (2.5)$$

С учетом (2.5), соотношения (2.4) примут вид

$$b_1 = \sigma \kappa^{*2} a^3 \left(1 - \frac{3}{4} \sigma a\right), \quad b_2 = \kappa^* a(1 - \sigma a), \quad a_{2i} = \kappa^* a(1 - a) \quad (2.6)$$

$$a_{1i} = \kappa^{*2} a^2 \left( a + \varepsilon T_w d_i^* - \frac{a^2}{4} (3 + d_i^*) + \varepsilon T_w d_i^{*2} \frac{2a}{5} \right), \quad i = 1, 2$$

Соотношения (2.1), (2.3), (2.5), (2.6) определяют решение для коэффициента теплопередачи  $c_H$

$$c_H = \frac{(1-b)(1-2/3 b)}{2b(1-3/4 b)} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4b(1-3/4 b)}{(1-b)^2}} \right), \quad b = \sigma \left( \frac{2 \text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega}}{1 + \kappa} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

Коэффициент теплопередачи зависит только от одного малого параметра  $b = \sigma(2 \text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega} / (1 + \kappa))^{1/2}$ . Производя разложение в ряды по этому параметру, получим асимптотическое выражение для коэффициента теплопередачи  $c_H$  в зависимости от параметров  $\text{Re}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $T_w$ ,  $\kappa$

$$c_H = 1 - \frac{2}{3} \sigma \left( \frac{2}{1 + \kappa} \text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega} \right)^{1/2} + O(\text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega}) \quad (2.8)$$

$$\lim_{\text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega} \rightarrow 0} c_H = 1$$

Из соотношения (2.8) следует, что в режиме III, как и в режиме I, при стремлении числа  $\text{Re}$  к нулю, коэффициент теплопередачи, полученный из решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя, стремится к своему значению в свободномолекулярном потоке, равному 1 при коэффициенте аккомодации 1 [7].

В случае осесимметричных течений решение для коэффициента теплопередачи принимает вид

$$c_H = 1 - \frac{2}{3} \sigma (\text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega})^{1/2} + O(\text{Re} \varepsilon T_w^{1-\omega}) \quad (2.9)$$

**3. Асимптотическое решение для коэффициента трения.** Ситуация с коэффициентом трения в режиме III совсем иная, чем с коэффициентом теплопередачи. Коэффи-

коэффициент трения, как можно видеть из (2.2)–(2.4), зависит не только от малого параметра  $a = (2\text{Re}\epsilon T_w^{1-\omega}/(1+\kappa))^{1/2}$ , но также еще и от параметра  $\epsilon T_w$ , связанного с влиянием продольного градиента давления. И решение для коэффициента трения зависит от соотношения этих параметров  $a$  и  $\epsilon T_w$ . Значения продольных компонент скорости и энthalпии на ударной волне имеют порядок  $O(a)$ , т.е.  $u_i, g \sim a$ . Произведя оценку отхода ударной волны, получим, что  $y_s \sim \epsilon T_w/a = (\kappa^* \epsilon T_w^{1+\omega}/\text{Re})^{1/2}$ . При  $\text{Re} \rightarrow 0$ , начиная с некоторого числа  $\text{Re}$ , отход ударной волны  $y_s$  неограниченно возрастает, и вместе с ним неограниченно возрастают коэффициенты трения вследствие влияния на них отхода ударной волны через члены, связанные с градиентом давления.

В режиме I холодной стенки отход ударной волны  $y_s \sim \epsilon$ . При  $\text{Re} \rightarrow 0$  отход ударной волны  $y_s \rightarrow R_0 \sigma \epsilon / (1 + \kappa)$ , и коэффициент трения при этом стремится к конечному значению  $c_{fi} \rightarrow 2 + 2d_i^* \sigma \epsilon$ . При  $\epsilon \rightarrow 0$  он приближается к своему свободномолекулярному пределу, равному 2 [7], так что в этом случае никаких проблем не возникает.

Таким образом, в случае режима III появляется новый важный параметр  $\chi = \epsilon T_w/a = ((1 + \kappa)\epsilon T_w^{1+\omega}/(2\text{Re}))^{1/2}$ . Из соотношений (2.2), (2.3), (2.6) можно получить выражение для коэффициентов трения  $c_{fi}$ :

$$c_{fi} = \frac{1-a}{a} \left( 1 - \frac{2+d_i^*}{3} a + 2d_i^* \chi + \frac{d_i^{*2}}{2} \chi a \right) \left( 1 - \frac{3+d_i^*}{4} a + d_i^* \chi + \frac{d_i^{*2}}{5} \chi a \right)^{-1} \times$$

$$\times \left( -1 + \sqrt{1 + 4a \left( 1 - \frac{3+d_i^*}{4} a + d_i^* \chi + \frac{d_i^{*2}}{5} \chi a \right) (1-a)^{-2}} \right)$$

$$i = 1, 2, \quad a = \left( \frac{2\text{Re}\epsilon T_w^{1-\omega}}{1+\kappa} \right)^{1/2}, \quad \chi = \left( \frac{(1+\kappa)\epsilon T_w^{1+\omega}}{2\text{Re}} \right)^{1/2}$$

Будем полагать параметр  $\chi$  малым,  $\chi = o(1)$ , отход ударной волны  $y_s \sim \chi$  при этом тоже будет малым. Для коэффициентов трения в этом случае можно получить асимптотическое решение. Проводя разложение в ряды по двум малым параметрам  $a$  и  $\chi$ , получим выражение для  $c_{fi}$  в зависимости от параметров  $\text{Re}$ ,  $\epsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $T_w$ ,  $\kappa$

$$c_{fi} = 2 - \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{d_i}{1+\kappa} \right) \left( \frac{2}{1+\kappa} \text{Re}\epsilon T_w^{1-\omega} \right)^{1/2} + \frac{8d_i}{1+\kappa} \left( \frac{(1+\kappa)\epsilon T_w^{1+\omega}}{2\text{Re}} \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{\epsilon T_w d_i}{1+\kappa} \left( -1 + \frac{6d_i}{1+\kappa} \right) + O \left( \text{Re}\epsilon T_w^{1-\omega}, \frac{\epsilon T_w^{1+\omega}}{\text{Re}} \right), \quad i = 1, 2, \quad d_1 = \kappa, \quad d_2 = 1$$

$$\lim_{\substack{\text{Re}\epsilon \rightarrow 0 \\ \chi \rightarrow 0}} c_{fi} = 2, \quad i = 1, 2$$

В случае осесимметричных течений решение для коэффициента трения принимает вид:

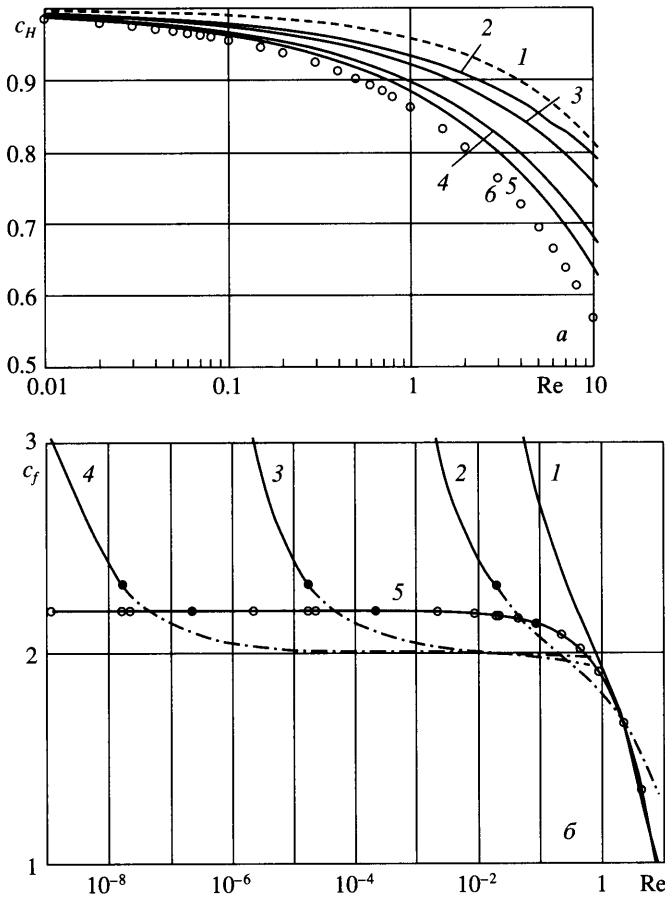
$$c_f = 2 - 2(\text{Re}\epsilon T_w^{1-\omega})^{1/2} + 4 \left( \frac{\epsilon T_w^{1+\omega}}{\text{Re}} \right)^{1/2} - \epsilon T_w + O \left( \text{Re}\epsilon T_w^{1-\omega}, \frac{\epsilon T_w^{1+\omega}}{\text{Re}} \right)$$

**4. Обсуждение результатов.** Итак, в режиме III коэффициент теплопередачи зависит только от одного параметра  $\sigma(2\text{Re}\epsilon T_w^{1-\omega}/(1+\kappa))^{1/2}$  и при любых значениях параметра  $\chi$  стремится к своему значению в свободномолекулярном потоке. Это связано с тем, что при малых числах Рейнольдса градиент давления перестает оказывать воздействие на коэффициент теплопередачи (что следует как из аналитических, так и из численных решений), и рост толщины ударного слоя никак не сказывается на коэффициенте теплопередачи в рамках модели тонкого вязкого ударного слоя. Если рассматривать другие модели, например, модель полного вязкого ударного слоя, то там влияние толщины ударного слоя на коэффициент теплопередачи происходит за счет коэффициентов Ламе (которые в тонком слое полагаются равными единице), и таким образом, при стремлении числа Re к нулю, возрастание толщины ударного слоя вызывает возрастание коэффициента теплопередачи.

При  $\omega = 1$  полученное выше решение для коэффициента теплопередачи (2.8) и решение, полученное [1] для сильно охлажденной поверхности, в точности совпадают; зависимость  $c_H$  от  $T_w$  в (2.8) при этом пропадает. Этого следовало ожидать, т.к. рассматриваемый здесь режим  $T_w \gg (\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)}$  фактически соответствует  $\mu r = \text{const}$ , что и имеет место при  $\omega = 1$ . Таким образом, при линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры имеем единое решение для коэффициента теплопередачи, выражающееся одной и той же формулой, в разных режимах.

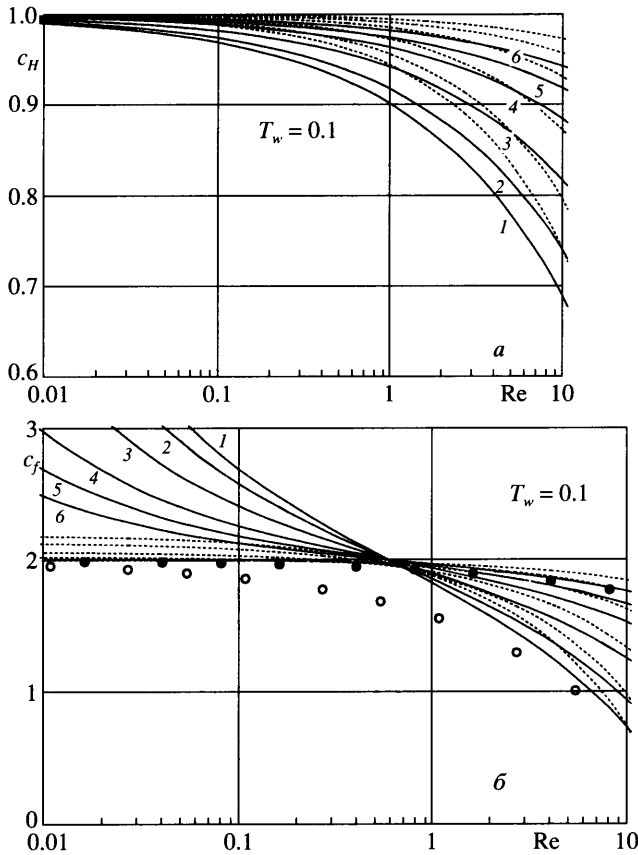
Коэффициент трения зависит от двух параметров:  $a = (2\text{Re}\epsilon T_w^{1-\omega}/(1+\kappa))^{1/2}$  и  $\chi = ((\kappa+1)\epsilon T_w^{1+\omega}/(2\text{Re}))^{1/2}$ , и при уменьшении числа Re приближается к своему свободномолекулярному пределу при дополнительном условии  $\chi \rightarrow 0$  ( $y_s \rightarrow 0$ ). Если заданы конкретные значения параметров  $\epsilon$  и  $T_w$ , то с уменьшением числа Re толщина ударного слоя, или параметр  $\chi$ , начинает возрастать, и коэффициент трения соответственно тоже возрастает, превышая свой свободномолекулярный предел. Это связано с тем, что в разреженном газе продольные составляющие градиента давления, через которые проявляется рост толщины ударного слоя, влияют на напряжение трения и не влияют на теплопередачу. Таким образом, континуальная модель тонкого вязкого ударного слоя может давать физически разумные результаты для коэффициента трения лишь до некоторых чисел Re. Если положить продольный градиент давления равным нулю, то решение для коэффициента трения будет давать правильный свободномолекулярный предел при любых числах Re, как и для коэффициента теплопередачи. Заметим, что при строгом выводе уравнений тонкого вязкого ударного слоя члены с продольным градиентом давления следует опустить, они являются внепорядковыми; их оставляют, чтобы область применимости данных уравнений расширить в сторону больших чисел Re, где эти члены играют основную роль в пристеночной области.

На фиг. 1, а приведены решения для коэффициента теплопередачи в точке торможения осесимметричного тела в зависимости от числа Re при различных значениях температуры поверхности  $T_w$ . Эти решения, полученные для режима III, сопоставляются с решением для режима I сильно охлажденной поверхности. Решения, полученные при  $T_w = 0.01, 0.001$  для режима III, в области этого режима практически не отличаются от решения режима I, а дальше, с увеличением числа Re, переходим в область режима I. Область самых малых чисел Re – это область режима III, однако решения всех режимов там очень близки друг к другу и к значению в свободномолекулярном потоке ( $c_H = 1$ ). Поэтому при небольших температурах поверхности  $T_w$  можно пользоваться решением режима I [1] во всех режимах течения разреженного газа с малыми числами Re. Для сравнения на фиг. 1, а приведено также решение для  $\omega = 1$  – одно и то же, как уже отмечалось, для всех режимов. Решения 1 и б отличаются только значениями  $\omega: 0.5$  и 1; увеличение  $\omega$  ведет к снижению теплового потока.



Фиг. 1. Зависимость коэффициента теплопередачи (а) и коэффициента трения (б) в точке торможения осесимметричного тела от числа  $Re$  при разных  $T_w$ . Кривая 1 – режим I; 2–5 – решение (2.9) при  $T_w = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5$ .  $\gamma = 1.2, \sigma = 0.71, \omega = 0.5$ ; кривая 6:  $\omega = 1$  (а). Кривые 1–4 – решение (2.11) при  $T_w = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$ ; 5 – режим I,  $\gamma = 1.4, \sigma = 0.7, \omega = 0.5$  (б)

Влияние температуры поверхности  $T_w$  на коэффициент трения в точке торможения осесимметричного тела в зависимости от числа  $Re$  показано на фиг. 1, б. Кривая 5 со светлыми точками соответствует режиму I сильно охлажденной поверхности. Темные точки на кривых 2–4 обозначают приблизительную границу режима III (левее); темные точки на кривой 5 обозначают приблизительную границу режима I (правее). Таким образом, асимптотическое решение для коэффициента трения при заданном значении  $T_w$  идет по сплошным кривым – справа по кривой 5 до темной точки, слева по кривой 1, 2, 3, или 4 до своей темной точки. Для того чтобы соединить решения, надо рассмотреть режим II. При данных значениях  $\gamma, \sigma$  и  $\omega$  для  $T_w = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$  физически реальные значения коэффициента трения лежат в режиме I. Чем меньше значение  $T_w$ , тем дальше мы двигаемся влево по кривой 5, тем до меньших чисел  $Re$  распространяется область режима I (фактически соответствующего  $T_w = 0$ ). Но как бы ни было мало  $T_w$ , рано или поздно, при некотором значении числа  $Re$  коэффициент трения начинает превышать свободномолекулярный предел, и затем превышает его все больше. Уменьшение температуры поверхности  $T_w$  ведет к уменьшению параметра  $\chi$ , и



Фиг. 2. Зависимость коэффициента теплопередачи (а) и коэффициента трения (б) в точке торможения осесимметричного тела от числа  $Re$  при разных  $\varepsilon$ . Кривые 1–6:  $\varepsilon = 0.14, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005$ .  $\omega = 0.5$ ,  $\sigma = 0.71$ . Сплошные кривые – решения (2.9) и (2.11) при  $T_w = 0.1$ , пунктирные – решения режима I. Светлые и темные кружки –  $c_f$  при нулевом градиенте давления при  $\varepsilon = 0.14$  и  $0.005$

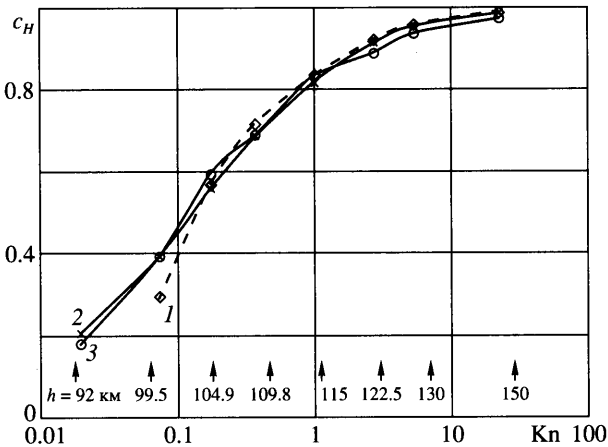
это ведет к расширению области применимости модели тонкого вязкого ударного слоя для расчета коэффициента трения в сторону меньших чисел Рейнольдса.

Фигура 2 демонстрирует влияние параметра  $\varepsilon$  на коэффициенты теплопередачи и трения в точке торможения осесимметричного тела в зависимости от числа  $Re$  при  $T_w = 0.1$ . Для сравнения пунктиром приведены аналогичные решения, полученные для режима I сильно охлажденной поверхности.

В отличие от коэффициента теплопередачи коэффициент трения (фиг. 2, б) при заданных параметрах  $\varepsilon$  и  $T_w$ , с уменьшением числа  $Re$  превышает значение в свободномолекулярном потоке и затем безгранично возрастает. Если же положить продольный градиент давления равным нулю, тогда решение для коэффициента трения при  $Re \rightarrow 0$  будет приближаться к правильному свободномолекулярному пределу, что демонстрируют приведенные на фиг. 2, б решения в режиме III при нулевом градиенте давления.

На фиг. 3 показано сравнение асимптотического решения для коэффициента теплопередачи с численным решением уравнений тонкого вязкого ударного слоя и с результатами расчетов методом прямого статистического моделирования Монте-Карло [5]





Фиг. 3. Зависимость коэффициента теплопередачи в точке торможения осесимметричного тела от числа  $Kn$  в набегающем потоке вдоль траектории входа в атмосферу Земли космического аппарата Shuttle. Кривые 1 и 2 – асимптотическое и численное решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя, кривая 3 – расчеты методом прямого статистического моделирования Монте-Карло [5]

вдоль траектории входа в атмосферу Земли космического аппарата Shuttle на высотах 90–150 км в зависимости от числа Кнудсена  $Kn$  в набегающем потоке. Расчеты соответствуют  $V_\infty = 7.5$  км/с,  $R_0 = 1.36$  м. И асимптотическое, и численное решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя хорошо согласуются с результатами расчетов методом Монте-Карло вплоть до 150 км. Асимптотическое решение дает удовлетворительную точность на высотах свыше 100 км.

**Заключение.** Определены два основных параметра гиперзвукового обтекания тел разреженным газом в режиме III:  $a$  и  $\chi$ ; толщина ударного слоя  $y_s = O(\chi)$ . Получено приближенное асимптотическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя в окрестности точки торможения трехмерного тела при малых числах  $Re$  в режиме III в виде простых аналитических выражений для коэффициентов теплопередачи и трения. Коэффициент теплопередачи зависит только от одного малого параметра  $a$  и при уменьшении числа  $Re$  приближается к своему значению в свободномолекулярном потоке. Коэффициент трения зависит от двух параметров  $a$  и  $\chi$  и приближается к свободномолекулярному пределу при дополнительном условии малости параметра  $\chi$ , или толщины ударного слоя. Это связано с тем, что в разреженном газе продольные составляющие градиента давления, через которые проявляется рост толщины ударного слоя, влияют на напряжение трения и не влияют на теплопередачу. Если пренебречь членами с продольным градиентом давления, значение коэффициента трения в рамках тонкого вязкого ударного слоя с уменьшением числа  $Re$  будет приближаться к свободномолекулярному пределу независимо от значения  $\chi$ . Сравнение с результатами расчетов методом Монте-Карло подтверждает, что модель тонкого вязкого ударного слоя может быть использована для расчета теплопередачи в области торможения затупленного тела в гиперзвуковых течениях с малыми числами  $Re$ .

Автор выражает благодарность Г.А. Тирскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке грантов: “Ведущие научные школы” – НШ-1899.2003.1, “Университеты России” – УР.04.01.020 и РФФИ (№ 03-01-00542).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брыкина И.Г.* Асимптотическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Рейнольдса для холодной поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 159–170.
2. *Тирский Г.А.* Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 903–930.
3. *Tirskiy G.A.* Continuum models for the problem of hypersonic flow of rarefied gas over blunt body // Systems Analysis Modelling Simulation. 1999. V. 34. № 2. P. 205–240.
4. *Cheng H.K.* Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds number // Proc. 1961 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1961. P. 161–175.
5. *Moss J.N., Bird G.A.* Direct simulation of transitional flow for hypersonic reentry conditions // AIAA Paper. 1984. № 84-0223. 14 p.
6. *Брыкина И.Г., Русаков В.В.* Аналитическое исследование трения и теплообмена в окрестности трехмерной критической точки при малых и умеренных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 143–150.
7. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию  
28.И.2005