

УДК 532.59+533.6+533.95

© 2005 г. И. Б. БАХОЛДИН

ЗАДАЧА О РАСПАДЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН И РАЗРЫВЫ

Численно исследуется эволюция со временем начальных данных типа уединенной волны. Вследствие возникновения коротковолнового излучения амплитуда уединенной волны уменьшается. Это решение интерпретируется как решение с разрывом, аналогичное по своим качественным свойствам решению о распаде произвольного разрыва в бездиссипативных системах. Оценивается скорость снижения амплитуды уединенной волны. Сначала это делается для обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, а затем для волн в плазме. Анализируются особенности исследования для холодной плазмы и плазмы с горячими электронами.

Ключевые слова: уединенная волна, распад, разрыв.

В монографии [1] рассматривалось существование уединенных волн для различных обратимых систем уравнений гидромеханики. Было установлено, что если прямая $V = \omega/k$ пересекает дисперсионную кривую при $k > 0$, то уединенной волны с такой фазовой скоростью V , как правило, не существует. В связи с этим была поставлена задача об эволюции начальных данных типа уединенной волны. В первом приближении по амплитуде эти уравнения имеют решение типа уединенной волны, которое используется в качестве начальных данных для получения численного решения. Со временем в рассматриваемом решении возникает излучаемая волна. За счет потери энергии на излучение амплитуда солитонной компоненты уменьшается.

В монографии [2] были исследованы различные типы бездиссипативных разрывов, осуществлено обобщение и развитие основных положений теории обычных разрывов [3]. Основные положения теории бездиссипативных разрывов изложены в работах [4–7]. Под разрывами понимаются переходы между однородными, периодическими, квазипериодическими состояниями. Эти состояния описываются упрощенными уравнениями, описывающими длинные волны, или усредненными уравнениями, описывающими огибающие волны в волновых зонах. Существование стационарных структур разрывов (гладких решений полных систем уравнений в виде бегущих волн, описывающих зоны перехода), как и существование уединенных волн, зависит от числа пересечений дисперсионной кривой и прямой $V = \omega/k$ при $k > 0$. Для устойчивости структуры разрыва важна его эволюционность: число граничных условий на разрыве должно на единицу превышать число уходящих характеристик упрощенных или усредненных систем для обеих сторон разрыва.

В данной работе решение об эволюции начальных данных типа уединенной волны интерпретируется как решение с разрывом, имеющим квазистационарную структуру. Это решение аналогично по своим качественным свойствам решениям о распаде произвольного разрыва в бездиссипативных системах. Поэтому для краткости в дальнейшем такое решение называется решением о распаде уединенной волны. В начале рассматривается распад для обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, а затем для плазмы. Принцип построения исследования – от более простого к более сложному. Это сделано в связи с тем, что для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза некоторые положения могут быть сформулированы в более лаконичном виде. Начало исследования распадения уединенных волн в рассматриваемых моделях было положено

в [8–11], но детальный анализ полученных решений, как решений с разрывами, дается впервые.

1. Распад уединенной волны для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза. Обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза имеет вид

$$a_t + [b_1 a + a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxxx}]_x = 0 \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1), как и обычное уравнение Кортевега – де Вриза, описывает широкий круг физических явлений, например, распространение длинных волн в жидкости при наличии ледового покрытия [12, 13] (в этом случае a – отклонение поверхности жидкости), частный случай ($b_3 = 0$) этого уравнения можно вывести для описания магнитозвуковых волн в холодной плазме [15].

Дисперсионное соотношение для уравнения (1.1) имеет вид

$$\omega = b_1 k - b_3 k^3 + b_5 k^5 \quad (1.2)$$

Рассматриваемое уравнение записано в виде закона сохранения, т.е. в форме $\rho_t + q_x = 0$. Для волн в жидкости и, видимо, для большинства физических приложений этот закон сохранения интерпретируется как закон сохранения импульса. Кроме того, умножением уравнения (1.1) на a можно получить еще один закон сохранения, интерпретируемый как закон сохранения энергии:

$$(a^2/2)_t + [b_1 a^2/2 + a^3/3 + b_3 (a a_{xx} - a_x^2/2) + b_5 (a a_{xxxx} - a_x a_{xxx} + a_{xx}^2/2)]_x = 0 \quad (1.3)$$

Не теряя общности рассуждений, положим $b_1 = 0$, $b_3 = 1$, $b_5 = s = \pm 1$. Уравнение с произвольными коэффициентами может быть приведено к такому виду переходом в движущуюся систему координат, а также растяжением по переменным a , x , t .

В первом порядке по некоторому малому параметру μ уравнение (1.1) имеет решения типа уединенных волн (солитон обычного уравнения Кортевега–де Вриза)

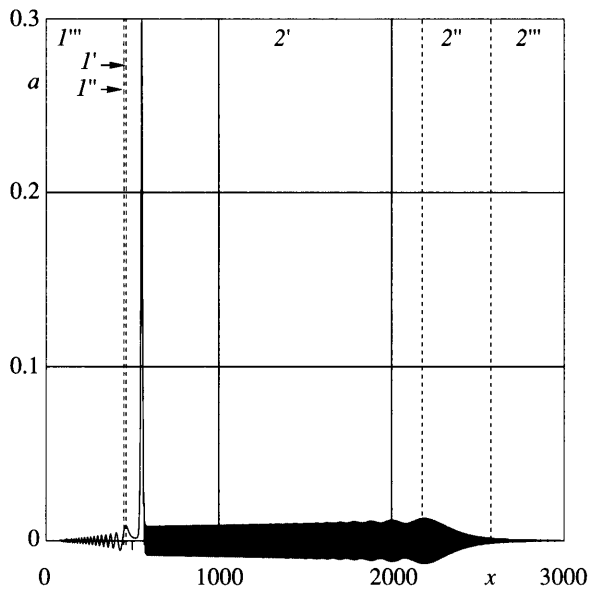
$$a = 3\mu \cosh^{-2}[\sqrt{\mu}(x - Vt)/2], \quad V = \mu \quad (1.4)$$

Как видно из этой формулы, параметр μ имеет смысл скорости или одной трети амплитуды уединенной волны.

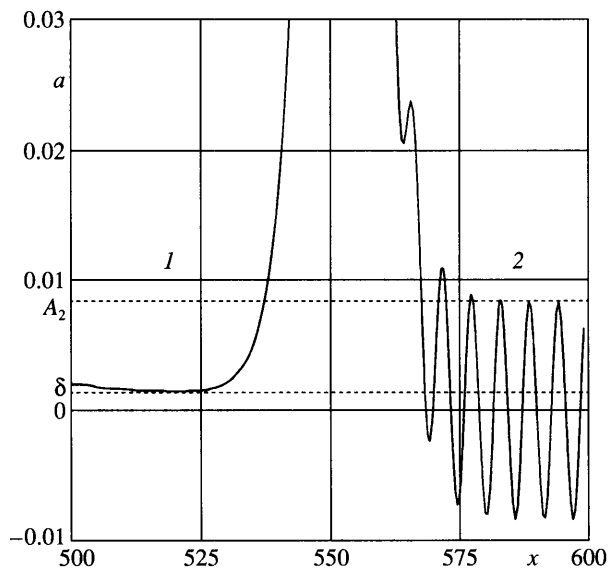
В соответствие с (1.2) при $s = -1$ прямая, соответствующая скорости V , не пересекает дисперсионную ветвь при $k > 0$, а при $s = 1$ – пересекает ее. Поэтому в первом случае должна существовать уединенная волна, а во втором уединенной волны нет, но есть солитоноподобное решение, представляющее собой комбинацию из уединенной и периодической волн (обобщенная уединенная волна) [8].

Для случая $s = 1$ берутся начальные данные (1.4) для решения уравнения (1.1) и наблюдается их эволюция со временем (фиг. 1). Область вблизи уединенной волны в увеличенном виде показана на фиг. 2.

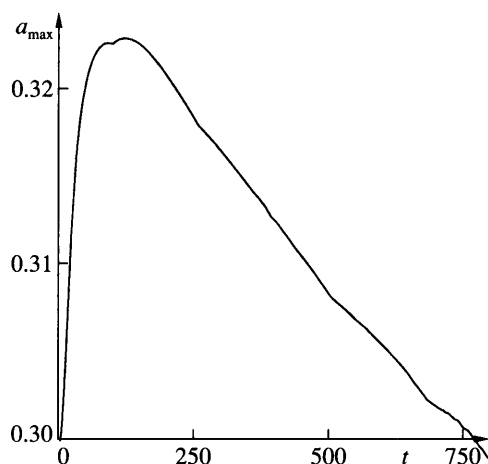
Поскольку касательная к дисперсионной кривой, проведенная в точке $k = 0$, пересекает дисперсионную ветвь при $k = k_* \approx 1$, то происходит медленное уменьшение амплитуды уединенной волны за счет коротковолнового излучения с длиной волны ($\approx 2\pi$), определяемой значением k в точке пересечения. Это приводит к постепенному снижению амплитуды уединенной волны (фиг. 3). На приведенном на фиг. 3 графике виден начальный участок роста амплитуды, установившийся процесс излучения формируется не сразу. На начальном этапе наблюдаются также колебания амплитуды излучаемой волны, и излучение цуга длинных волн слева будем называть его начальным цугом волн. Такой же цуг длинных волн наблюдается и в случае $s = -1$, когда формируется уединенная волна. Со временем этот цуг отрывается от уединенной волны, поскольку нелинейная скорость уединенной волны равна μ , тогда как скорость беско-



Фиг. 1. Распад уединенной волны для обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза: I''' – однородный участок, I' – простая волна разрежения, I'' – однородный участок, $2'$ – однородная волновая зона, $2''$ – простая волна огибающей, $2'''$ – однородный участок; $s = 1$, $t = 800$, $\mu = 0.1$



Фиг. 2. Область вблизи уединенной волны (структура разрыва) в увеличенном виде; A_2 – амплитуда излучаемой волны, δ – смещение уровня



Фиг. 3. Изменение амплитуды уединенной волны со временем

нечно длинных волн нулевая. Между начальным цугом волн и уединенной волной образуется расширяющийся со временем участок, где $a = 0$. Аналогичного поведения для волн слева можно было бы ожидать и при $s = 1$, но в разд. 2, где рассматриваемое решение исследуется детально, показывается, что вследствие наличия двух законов сохранения на участке между уединенной волной и цугом длинных волн $a > 0$ этот эффект хорошо заметен на фиг. 2.

Как видно из фиг. 1, процесс носит квазиавтомодельный характер, имеется расширяющаяся со временем волновая зона, график решения напоминает графики решений с разрывом с излучаемой волной [6] или с разрывом, имеющим нестационарную структуру [5]. Более детальный анализ, проведенный в разд. 3, показывает, что такое решение правильнее связывать с разрывом типа кинка с излучением.

Для расчетов использовалась трехслойная явная консервативная конечно-разностная схема второго порядка точности с центральными разностями по пространству и по времени [8]. При умеренных значениях μ расчет правильно определяет амплитуду коротковолнового излучения, для которого известны аналитические данные [9]. Это устанавливается путем численной проверки асимптотической формулы для амплитуды излучаемой волны

$$A_2 = 12\pi d(\mu) K \exp(-\pi k \mu^{-1/2}), \quad k = \sqrt{1 + \mu}, \quad \mu = \mu_v \left(1 - \frac{5}{4}\mu_v\right) \quad (1.5)$$

$$K = \text{const} \approx 19.97, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} d(\mu) = 1$$

где μ_v – величина, равная одной трети наблюдаемой в расчете амплитуды уединенной волны. При малых μ требуется коррекция численных результатов: формула (1.5) с $d(\mu) = 1$ правильно описывает амплитуду в численных решениях, если вместо теоретического значения k использовать его численное значение, полученное исходя из наблюдаемой в расчетах длины излучаемой волны. От этого недостатка свободна спектральная схема [9], т.е. схема, построенная с использованием интегрального преобразования Фурье, что и следовало ожидать, поскольку формула (1.5) также выведена при помощи преобразования Фурье, но только аналитически. Качественный вид решения при применении схем обоих типов остается одним и тем же.

Использование конечно-разностной, а не спектральной схемы объясняется тем, что она проще при алгоритмической реализации и обеспечивает точное выполнение закона сохранения импульса в численном решении. В соответствии с разработанными в [2–8] принципами анализа расчетов с использованием схем такого типа при исследовании бездиссипативных разрывов и уединенных волн численная схема моделирует некоторое новое уравнение с высшими производными, но это уравнение относится к тому же классу уравнений (обратимые и консервативные системы), что и исходное, поэтому численные решения должны обладать теми же качественными свойствами, что и точные решения этого класса уравнений.

Проверялось также выполнение закона сохранения энергии:

$$E = \frac{1}{2} \sum (a_j)^2 \Delta x = \text{const}$$

где a_j – значения a в пространственных узлах сетки. В численном решении со временем наблюдается незначительное уменьшение этой величины.

Таким образом, процесс излучения и снижения амплитуды уединенной волны описывается одним параметром μ , причем амплитуда излучаемой волны экспоненциально быстро убывает с убыванием μ .

2. Интерпретация решения о распаде уединенной волны как решения с разрывом с квазистационарной структурой. Рассмотрим найденное численное решение при малых значениях μ как решение, в котором имеется волновая зона, описываемая усредненными уравнениями с тремя неизвестными [6]. Пусть эти неизвестные – среднее течение $\langle a \rangle$, волновое число k и амплитуда волны A . Будем рассматривать уединенную волну, разделяющую области 1 (сторона слева от разрыва), и 2 (сторона справа от разрыва) как квазистационарную структуру разрыва с параметром. Таким образом, на фиг. 2 показана структура разрыва. Кроме того, будем рассматривать само решение как аналогичное решению о распаде разрыва, где имеются некоторые расширяющиеся со временем области. Графики решений в этих областях сходны по своему качественному виду с однородными или периодическими состояниями, а также центрированными простыми волнами или простыми волнами огибающей в автомодельных решениях задачи о распаде произвольного разрыва в бездиссипативных системах (фиг. 1). В отличие от классической задачи о распаде произвольного разрыва решение носит не вполне автомодельный характер, а только близко к автомодельному на некотором временном интервале.

На фиг. 1 наблюдается интерференция между головной волной начального цуга длинных волн и простой волной в зоне I'' , в связи с тем, что их скорости близки, что мешает наблюдать простую волну, поэтому зона простой волны показана как теоретически прогнозируемая. Этот цуг волн располагается в некоторой области слева от разрыва в зонах I' , I'' , I''' . В силу малости амплитуды волн цуг можно рассматривать как решение линеаризованного варианта уравнения (1.1) независимо от решения задачи о распаде уединенной волны. Решение о распаде уединенной волны с четко выраженной простой волной можно получить, если в некоторый момент времени, когда уже произошло отделение цуга волн, приостановить расчет и модифицировать имеющиеся данные для дальнейшего расчета таким образом, чтобы в зонах I' и I''' были однородные состояния, а в зоне I'' – сглаженный перепад уровня, значение $a = a_1 = \delta$ в зоне I' при этом определяется посредством продолжения уже имеющегося однородного участка (фиг. 2). Исследуемое здесь численное решение при больших значениях времени представляет собой сумму этих двух более простых решений.

Цуг описывается линейным обобщенным уравнением Кортевега – де Вриза. Дисперсионная кривая этого уравнения обладает тем свойством, что при увеличении k в соответствие с (1.2) сначала групповая скорость убывает, а затем растет. Следовательно, при приближении к хвостовой части длина волн должна уменьшаться, хвостовой

вая часть цуга должна заканчиваться каустикой, на которой возникает отраженная волна, распространяющаяся направо. Подобная каустика наблюдалась в решениях о распаде разрыва малой интенсивности [2, 5]. Поэтому в принципе наличие начального цуга волн может влиять на наблюдаемое в расчетах максимальное значение величины a , рассматриваемое в качестве амплитуды уединенной волны. Это одна из возможных причин колебаний амплитуды уединенной волны, наблюдаемых в расчетах с большими значениями μ (разд. 3), а также колебаний амплитуды излучаемой короткой волны на начальных стадиях процесса.

Для описания эволюции начального цуга волн можно воспользоваться и классическим линейным уравнением Кортевега – де Вриза, если ограничиться исследованием только длинноволновой части, т.е. не рассматривать конец хвостовой части цуга, полагая, что там амплитуда волн пренебрежимо мала. В этом случае каустики не будет, аналитические решения такого типа (головная несимметричная волна, за которой следует хвост из почти периодических волн с амплитудой, постепенно убывающей по мере продвижения от головной к хвостовой части) известны, они выражаются через функцию Эйри [14]. В таких решениях амплитуда головной волны убывает со временем, а ее длина, а также длина всего цуга волн растут, но медленнее, чем по линейному закону. Поэтому и оказывается возможным отрыв уединенной волны от головной волны цуга.

Рассматриваемый пример расчета соответствует случаю, когда амплитуда уединенной волны мала, поэтому смещение уровня слева от разрыва также мало, асимптотическая оценка этой величины дается ниже. В разд. 3 расчет аналогичной задачи проводится в случае, когда амплитуда уединенной волны умеренная. В этом случае смещение уровня и простая волна более выражены.

Вначале сформулируем общий подход к решению такого рода задач.

В работах [2–5] было введено понятие разрыва типа кинка с излучением, представляющего собой переход между однородным и периодическим состоянием. Структура такого разрыва может существовать, если для обеих сторон разрыва прямая $V = \omega/k$ пересекает дисперсионную ветвь. Для случая обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза с кубической нелинейностью на таком разрыве задаются четыре условия: одно основное (закон сохранения импульса) и три дополнительных (амплитуда, длина излучаемой волны, скорость разрыва находятся при анализе структуры разрыва). Такой разрыв эволюционен. Введем обобщение этого понятия – разрыв типа кинка с излучением, имеющим квазистационарную структуру, зависящим от дополнительного параметра μ . Пусть имеется процесс эволюции уединенной волны $\mu = \mu(T)$, здесь T обозначает медленную временную переменную. При рассмотрении разрывов в бездиссипативных средах медленные переменные $T = \epsilon t$, $X = \epsilon x$, где ϵ – малый параметр, вводятся при выводе усредненных уравнений, описывающих волновые зоны [2, 6], величина ϵ выбирается такой, чтобы характерная длина была много больше длины волны в волновой зоне. Поскольку здесь рассматривается медленно текущий процесс эволюции уединенной волны при малых значениях μ и дается интерпретация решения как решения с разрывом, то с формальной точки зрения логично тоже вводить медленные переменные. Запишем следующие условия на разрыве:

$$V = V(\mu, a_1), \quad k_2 = f_k(\mu), \quad A_2 = f_A(\mu) \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dT} \mathcal{P}(\mu) = V(P_2 - P_1) - (Q_2 - Q_1) \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dT} \mathcal{E}(\mu) = V(E_2 - E_1) - (F_2 - F_1) \quad (2.3)$$

Индексами 1 и 2 здесь обозначены значения соответствующих величин по разные стороны разрыва. Последовательно рассмотрим каждое из уравнений и входящие в них величины.

Первое условие (2.1) состоит в том, что скорость разрыва можно определять по известной формуле, выражающей зависимость скорости уединенной волны от ее амплитуды.

Второе условие (2.1) определяет величину k_2 для излучаемой волны слева от разрыва как значение k в точке пересечения дисперсионной кривой и прямой $\omega = Vk$.

Зависимость амплитуды излучаемой волны A_2 от амплитуды уединенной волны в третьем условии (2.1) может быть найдена при помощи метода Фурье [9] (формула (1.5)). Другой способ определения амплитуды (предложенный А.Г. Куликовским) состоит в том, что для системы уравнений, описывающей волны, бегущие со скоростью V , задав начальные данные вблизи точки равновесия, получить численно решение, содержащее последовательно однородный участок, солитоноподобный участок, периодическую волну. Амплитуда этой волны и соответствует искомому значению.

Условие (2.2) – закон сохранения импульса, P – импульс уединенной волны, Q_i – средние потоки импульса для состояний 1 и 2, P_i – средние плотности импульса для состояний 1 и 2:

$$\mathcal{P}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_s dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 3\mu \operatorname{ch}^{-2}\left(\mu^{1/2} \frac{1}{2}x\right) dx = 12\mu^{1/2} \quad (2.4)$$

$$Q_i = \langle a_i^2/2 + b_1 a_i + b_3 a_{ixx} + b_5 a_{ixxx} \rangle, \quad P_i = \langle a_i \rangle$$

Здесь a_s – функция, описывающая уединенную волну. При конкретных вычислениях не будем вводить в явном виде медленные переменные T и X , поскольку это только усложнило бы вид формул. Здесь и далее все соотношения выведены в предположении $\epsilon = 1$, $T = t$, $X = x$.

Условие (2.3) – закон сохранения энергии, ϵ – энергия уединенной волны, F_i – средние потоки энергии для состояний 1 и 2, E_i – средние плотности энергии для состояния 2:

$$\mathcal{E}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_s^2}{2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{9}{2} \mu^2 \operatorname{ch}^{-4}\left(\mu^{1/2} \frac{1}{2}x\right) dx = 12\mu^{3/2} \quad (2.5)$$

$$F_i = \left\langle \frac{1}{3} a_i^3 + \frac{1}{2} b_1 a_i^2 + b_3 \left(a_i a_{ixx} - \frac{1}{2} a_{ix}^2 \right) + b_5 \left(a_i a_{2xxx} - a_{ix} a_{ixxx} + \frac{1}{2} a_{ixx}^2 \right) \right\rangle, \quad E_i = \left\langle \frac{1}{2} a_i^2 \right\rangle$$

В случае вычисления плотностей усреднение осуществляется по переменной x , при вычислении потоков – по переменной t . Формулы для потоков и плотностей в законах сохранения выписаны для обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, записанного в виде (1.1), т.е. с произвольными коэффициентами при производных. Усредненные величины для состояния 2 легко вычислить, перейдя в систему координат, связанную с разрывом, поскольку в этой системе координат это состояние квазистационарно.

Соотношения (2.2) и (2.3) записаны в наиболее общем виде, пригодном для исследования разрывов произвольного типа, т.е. с двумя и более излучаемыми волнами. В рассматриваемом одноволновом случае для состояния 1 величина a не зависит от x , а для состояния 2 является периодической функцией. В более сложных моделях при наличии нескольких пересечений возможны разрывы с двумя и более излучаемыми волнами.

Этот подход может быть расширен и на системы из n уравнений, например на уравнения холодной плазмы (разд. 3). Тогда в систему соотношений на разрыве следует включать не один, а n законов сохранения импульсного типа, аналогов соотношения (2.2).

В соответствие с методикой определения эволюционности разрывов по числу пересечений прямой $V = \omega/k$ с дисперсионными кривыми по разные стороны разрыва, разработанной в [4], в данном случае расположение характеристик оказывается таким же, как и в случае кинка с излучением: имеются две уходящие характеристики, связанные с излучаемой волной, и n основных уходящих характеристик. Под основными характеристиками здесь понимаются характеристики упрощенных уравнений, полученных отбрасыванием членов с высшими производными. При этом предполагается, что дисперсионные кривые и основные характеристические скорости справа и слева от разрыва близки, а потому число пересечений справа и слева от разрыва одно и то же. Асимптотические оценки для обоснования справедливости сделанных утверждений приводятся ниже. Число условий на разрыве здесь равно $n + 4$, т.е. на одно условие больше, чем в случае классического кинка с излучением. Тем не менее рассматриваемый здесь разрыв оказывается эволюционным, поскольку имеется неизвестная величина μ . Это рассуждение связано с тем, что эволюционность означает математическую корректность постановки задачи Коши, т.е. достаточность информации для решения задачи об эволюции разрыва, поэтому, если помимо параметра V появляется некоторое число новых внутренних параметров разрыва, то для корректности постановки задачи на такое же число должно быть увеличено число условий на разрыве.

Применим этот подход к численному решению, полученному в разд. 1. Вначале убедимся в эволюционности разрыва. Для стороны 2 имеются две уходящие характеристики, связанные с излучаемой волной (соответствующие характеристические скорости $c_{1,2} \approx c_g|_{k=k_*} \gg V = \mu$, $c_g = \partial\omega/\partial k$ – групповая скорость), и одна приходящая, связанная с течением ($c_3 \sim A_2^2$, $|c_3| \ll \mu$).

Для стороны 1 – одна уходящая характеристика ($c = \delta \ll \mu$, δ – смещение уровня слева от разрыва), т.е. расположение характеристик именно такое, как и предполагалось выше. В справедливости приведенных выше неравенств нетрудно убедиться непосредственно: величина амплитуды излучаемой волны A_2 определяется формулой (1.5), формула для нахождения смещения уровня слева от разрыва δ дана ниже.

В работе [2] было введено понятие нелокального бездиссипативного разрыва, т.е. автомодельного решения, включающего в себя стационарную структуру разрыва и прилегающие к ней автомодельные волновые зоны, расширяющиеся со временем. Такие автомодельные элементы в комбинации с кинками и центрированными простыми волнами позволяют в общем случае построить решение о распаде произвольного разрыва в бездиссипативном случае. При этом можно выделить обычные разрывы, которые при решении задачи о распаде произвольного разрыва по числу свободных параметров аналогичны ударным волнам в газовой динамике, и кинкообразные, у которых число свободных параметров на единицу меньше. В связи с уменьшенным числом свободных параметров даже в скалярных моделях одного кинкообразного разрыва (локального или нелокального) не достаточно, чтобы построить решение о распаде произвольного разрыва в типичном случае. Обязательно появляется обычный разрыв или центрированная простая волна [2–5]. И в данном случае оказывается, что значение $a_1 = \delta$ слева от разрыва отлично от нулевого, и поэтому слева от разрыва следует ожидать появления элемента, аналогичного волне разрежения (область I''). Оценим скорость уменьшения амплитуды уединенной волны и величину δ .

Предположим, что энергия уединенной волны уменьшается в основном за счет излучения вправо линейной периодической волны с амплитудой A_2 . Тогда

$$\frac{d\mathcal{E}(\mu)}{dt} = -E_2(c_{g*} - V) = -\frac{A_2(\mu)^2}{4}(c_{g*} - V), \quad c_{g*} = \left. \frac{\partial\omega}{\partial k} \right|_{k=k_*} \quad (2.6)$$

При выводе этого соотношения учтено, то что энергия линейных волн переносится с групповой скоростью, и усредненная плотность энергии синусоидальной волны равна одной четверти от квадрата ее амплитуды.

Предположим теперь, что импульс уединенной волны уменьшается в основном за счет изменения уровня слева, тогда

$$\frac{d\mathcal{P}(\mu)}{dt} = -V\delta \quad (2.7)$$

Подставляя вычисленные выше значения $\mathcal{E}(\mu)$ и $\mathcal{P}(\mu)$ (2.4) и (2.5) в уравнения (2.6) и (2.7) и учитывая, что $V = \mu \ll c_g$ получаем

$$\frac{d}{dt}\mu = -\frac{A_2^2 c_g}{72\mu^{1/2}}, \quad \delta = \frac{A_2^2 c_g}{12\mu^2}$$

При асимптотической оценке погрешности сделанных выше допущений при $\mu \rightarrow 0$ основную роль играет показатель степени величины A_2 , а не показатель степени μ , которым при сравнении малости величин можно пренебречь в том случае, если показатели степени величины A_2 разные, поскольку величина A_2 экспоненциально мала (см. (1.5)). При такой оценке энергия, теряемая за счет смещения уровня, имеет порядок δ^2 , т.е. A_2^4 , что много меньше энергии порядка A_2^2 , уносимой коротковолновым излучением. Известно, что в случае волн малой амплитуды порождаемое ими среднее смещение уровня пропорционально квадрату амплитуды волны, т.е. величине A_2^2 , что много меньше потери импульса за счет изменения уровня на стороне 1, $V\delta = A_2^2 c_g / (12\mu)$. Следовательно, сделанные выше предположения не противоречат полученным результатам.

Таким образом, δ имеет порядок A_2^2 / μ^2 . Поскольку величина A_2 экспоненциально убывает с уменьшением μ (см. (1.5)), то при малых μ этот перепад уровня пренебрежимо мал. Но при умеренных значениях μ он существенен. Вид решения сходен с решением задачи о распаде произвольного разрыва – помимо разрыва должна быть еще и волна разрежения.

3. Эволюция уединенных волн в плазме. Одномерные движения квазинейтральной плазмы описываются системой уравнений [1, 11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{du}{dt} + n^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n^{-1} \frac{\partial}{\partial x} n &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - n^{-1} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} &= -R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ \frac{dw}{dt} - n^{-1} B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} &= R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \\ \frac{dB_y}{dt} - B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial x} &= R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dw}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{dB_z}{dt} - B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_z \frac{\partial u}{\partial x} = -R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

где x – независимая переменная, n – ионная плотность, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ – вектор магнитной индукции, $B_x = \text{const}$, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ – скорость ионов. Эти величины нормализованы по отношению к характерной длине l , плотности невозмущенной плазмы n_0 , величине невозмущенного магнитного поля \mathbf{B}_0 и альфвеновской скорости $V_A = |\mathbf{B}_0| / \sqrt{4\pi n_0(m_i + m_e)}$ соответственно. Здесь m_i, m_e – массы иона и электрона. Параметры дисперсии $R_i = \omega_{ic}/\omega_0$, $R_e = \omega_{ec}/\omega_0$, где ω_{ic} – ионная, а ω_{ec} – электронная циклотронные частоты, $\omega_0 = V_A/l$ – характерная частота явления. Параметр b определяет коэффициент зависимости давления от плотности в линеаризованном варианте уравнения состояния: $p = p(n) \approx b^2 n$ (температура электронов предполагается постоянной). При $b = 0$ получаем модель холодной плазмы, при $b > 0$ – плазму с горячими электронами, фактически при этом для описания движения электронов применяется известная в газовой динамике модель баротропного газа. Рассматриваемые модели выводятся непосредственно из системы, составленной из уравнений Максвелла и гидродинамических уравнений движения ионов и электронов посредством исключения электрического поля и скорости электронов (это можно сделать, если в уравнениях Максвелла пренебречь током смещения и предположить квазинейтральность, $n_e = n_i = n$). Система приведена в безразмерном виде.

Для удобства расчета выберем l таким, что $\omega_0 = \sqrt{\omega_{ic}\omega_{ec}}$, и следовательно $R_i = \sqrt{(\omega_{ic}/\omega_{ec})}$ и $R_e = \sqrt{\omega_{ec}/\omega_{ic}} = \sqrt{m_i/m_e}$. Неизвестные $n, u, v, w, B_x, B_y, B_z$ для невозмущенного состояния равны 1, 0, 0, 0, $\cos\theta, \sin\theta, 0$ соответственно, θ – угол между вектором магнитной индукции и направлением движения волны, которое совпадает с осью x .

Уравнения (3.1) могут быть записаны в виде законов сохранения

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) = 0$$

$$\frac{\partial(nv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \frac{dB_z}{dt} \right) = 0$$

(3.2)

$$\frac{\partial(nw)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \frac{dB_y}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(uB_y - B_x v - R_i^{-1} \frac{dw}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(uB_z - B_x w + R_i^{-1} \frac{dv}{dt} \right) = 0$$

Это законы сохранения массы, импульса, магнитного импульса.

Кроме того, в случае холодной плазмы существует закон сохранения энергии. Энергия здесь состоит из кинетической энергии и энергии электромагнитного поля. Проанализировав способ вывода уравнений [1] и подставив приведенные в этой работе выражения для скорости электронов и напряженности электрического поля в уравнение Умова – Поинтинга и закон сохранения полной энергии, можно сделать вывод о том, что плотность энергии в рассматриваемом приближении имеет вид:

$$E = \left(\frac{R_i}{R_e} + 1\right)^{-1} \left\{ n \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{R_i n}{R_e 2} \left\{ u^2 + \left[v + \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e}\right) n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right]^2 + \left[w - \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e}\right) n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right]^2 \right\} \right\} + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \quad (3.3)$$

Здесь первый член – кинетическая энергия, состоящая из энергии ионов и энергии электронов, второй член – энергия магнитного поля. В рассматриваемом приближении не учитывается ток смещения, поэтому в плотности энергии нет вклада от электрического поля. Выражение для потока энергии имеет вид:

$$F = \left(\frac{R_i}{R_e} + 1\right)^{-1} \left\{ nu \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{R_i nu}{R_e 2} \left\{ u^2 + \left[v + \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e}\right) n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right]^2 + \left[w - \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e}\right) n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right]^2 \right\} \right\} + \frac{1}{R_i} \left(\frac{dv}{dt} B_z - \frac{dw}{dt} B_y \right)$$

Закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Дисперсионная кривая $\omega = \omega(k)$ для линеаризованного варианта уравнений плазмы содержит быстрые и медленные магнитозвуковые, а также альфвеновские ветви. Их можно найти, исследовав уравнение [11]

$$(R_e R_i + k^2)^2 V^6 - \{ R_e^2 R_i^2 + R_e^2 R_i^2 \cos^2 \theta + R_e R_i [1 + \cos^2 \theta (\rho + 1)] k^2 + (R_e R_i + k^2)^2 b^2 \} V^4 + \cos^2 \theta [R_e^2 R_i^2 + 2 R_e^2 R_i^2 b^2 + R_e R_i (\rho + 2) b^2 k^2] V^2 - R_e^2 R_i^2 \cos^4 \theta b^2 = 0$$

$$\omega = kV, \quad \rho = \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2$$

В отличие от случая обобщенного уравнения Кортвега – де Вриза для каждого типа волн имеются ветви, соответствующие волнам, движущимся влево, и волнам, движущимся вправо, т.е. всего дисперсионных ветвей шесть. В случае холодной плазмы медленные магнитозвуковые ветви вырождаются в прямую $\omega = 0$. Фазовые скорости

бесконечно длинных волн, движущихся вправо для альфеновской, быстрой и медленной магнитозвуковых ветвей даются выражениями

$$V_a(0) = \cos \theta, \quad V_f(0) = V^+, \quad V_s(0) = V^-$$

$$V^\pm = \sqrt{\left[\left(1 + b^2 \pm \sqrt{(1 + b^2)^2 - 4 \cos^2 \theta b^2} \right) \right] / 2}, \quad 0 < V^- < V_a < V^+ \quad (3.4)$$

В данной работе исследуются уединенные волны, ассоциированные с быстрой магнитозвуковой ветвью, движущиеся вправо.

Начальные данные типа уединенной волны для величин, от которых в уравнениях (3.1) берутся производные второго порядка, находятся интегрированием линеаризованной системы уравнений бегущих волн [11]

$$(v, w, B_y, B_z) = (v_0, w_0, B_{y0}, B_{z0}) + \phi^T a + \phi'^T a' \quad (3.5)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \theta}{V^+} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi' = \frac{V^{+2}}{V^{+2} - \cos^2 \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} \left(\frac{\cos \theta}{V^+} \right)^2 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right) \frac{\cos \theta}{V^+} \end{pmatrix}$$

$$a = \mu \frac{3c_1^+}{2c_2^+} \operatorname{ch}^{-2} \frac{\sqrt{c_1^+} \mu}{2} \xi + O(\mu^2), \quad a' = \frac{da}{d\xi} + O(\mu^2)$$

$$c_1^+ = 2 \frac{R_e R_i}{\Delta^+} \left(\frac{\cos^2 \theta}{V^{+3}} + \frac{V^+ \sin^2 \theta}{(V^{+2} - b^2)^2} \right)$$

$$c_2^+ = \frac{R_e R_i \sin \theta}{\Delta^+ (V^{+2} - b^2)} \left(\frac{\cos^2 \theta}{V^{+2}} + \frac{1}{2} + \frac{V^{+2} \sin^2 \theta}{(V^{+2} - b^2)^2} \right)$$

$$\Delta^+ = \frac{V^{+2} - \cos^2 \theta - \rho \cos^2 \theta}{V^{+2} - \cos^2 \theta} > 0$$

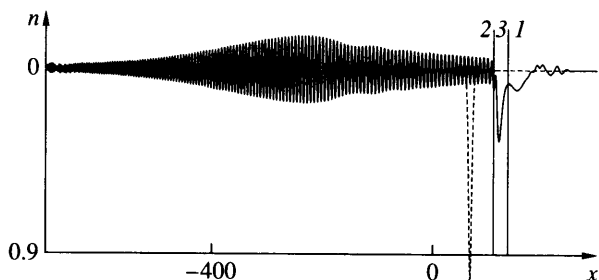
$$\xi = x - Vt, \quad V = V^+ + \mu$$

Для величин n и u начальные данные получаются путем линеаризации проинтегрированных законов сохранения массы и импульса ионов вдоль оси x

$$Vn + (nu) = Vn_0 + (nu)_0$$

$$unV + nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n = u_0 n_0 V + n_0 u_0^2 + \frac{B_{y0}^2 + B_{z0}^2}{2} + b^2 n_0 \quad (3.6)$$

$$(n, u) = (n_0, u_0) + a \phi_*^T, \quad \phi_*^T = \left(\frac{\sin \theta}{V(V - b^2/V)}, \frac{-\sin \theta}{V - b^2/V} \right)$$



Фиг. 4. Распад уединенной волны для плазмы с горячими электронами: 1 – зона справа от разрыва, 2 – зона с излучаемой волной слева от разрыва, 3 – зона структуры разрыва; $t = 1500$, $\mu = -0.7$, $\theta = 1.535$, $b = 0.5$, значения величин R_i и R_e соответствуют водородной плазме. Штриховой линией показан график при $t = 0$

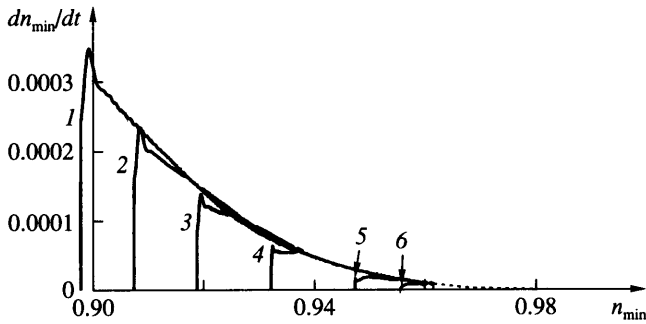
В зависимости от величины параметра θ прямая $V = \omega/k$ может пересекать или не пересекать быструю магнитозвуковую дисперсионную ветвь при $k \neq 0$. Поскольку точного решения в виде уединенной волны не существует, то в случае наличия пересечения уединенная волна начинает распадаться.

Для расчетов, как и в случае обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, использовалась трехслойная консервативная конечно-разностная схема с центральными пространственными и временными разностями. В силу наличия пространственно-временных производных здесь эта схема неявная. Для построения схемы, устойчивой на границах, требуются некоторые дополнительные преобразования уравнений (3.2) [10, 11].

Обнаружилось, что для холодной плазмы численное решение о распаде уединенной волны [10], как и в случае обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, аналогично решению задачи о распаде произвольного разрыва. При этом этот распад должен включать волны всех указанных выше типов, поскольку должны быть выполнены семь законов сохранения: законы сохранения импульсного типа (уравнения (3.2)) и закон сохранения энергии. Эти волны действительно наблюдаются в численном эксперименте. Однако главные эффекты связаны с быстрыми магнитозвуковыми волнами, движущимися вправо. Как и в случае обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, решение интерпретируется как решение о распаде произвольного разрыва с кинком с излучением и простой волной. Для холодной плазмы в силу наличия закона сохранения энергии, как и в предыдущем случае процесс уменьшения амплитуды уединенной волны можно описать уравнением, аналогичным уравнению (2.6). Для расчета энергии солитона и усредненной плотности энергии излучаемой волны следует воспользоваться формулой (3.3).

Для плазмы с горячими электронами решение обладает аналогичными качественными свойствами.

В отличие от исследования решений обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, где основное внимание было уделено асимптотическому анализу, здесь исследуются преимущественно конечно-амплитудные решения, причем процесс рассчитывался на достаточно большом временном промежутке, так, чтобы амплитуда уединенной волны снизилась на 50% и более. Пример графика решения показан на фиг. 4. В отличие от фиг. 1 цифрой 1 обозначена область справа от разрыва с тем, чтобы имелась аналогия с решениями обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, поскольку там область 2 была областью с излучаемой волной. На фиг. 5 приведены графики зависимости минимального значения плотности n_{\min} в рассматриваемом решении (параметр $\Delta = 1 - n_{\min}$ характеризует амплитуду уединенной волны) от времени при различных начальных значениях амплитуды уединенной волны.

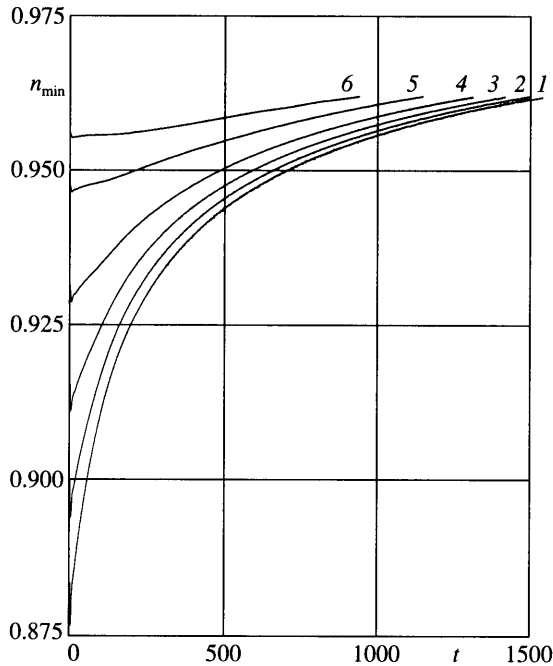


Фиг. 5. Снижение амплитуды уединенной волны за счет излучения при различных начальных значениях $\mu = -0.7, -0.6, -0.5, -0.4, -0.3, -0.25$ – кривые 1–6; остальные параметры те же, что и на фиг. 4

Система уравнений, описывающая бегущие волны, в данной модели инвариантна при преобразовании $x \rightarrow -x$ в предположении, что часть неизвестных (n, u, v, B_y) при таком преобразовании не меняется, а часть (w, B_z) меняет свой знак на противоположный. Соответствующие неизвестные были названы симметричными и антисимметричными [4]. Для магнитозвуковых волн малой амплитуды все симметричные неизвестные в соответствии с (3.5) и (3.6) в первом приближении линейно связаны между собой, поэтому и качественный вид графиков для всех этих величин сходный. В качестве наблюдаемой величины для оценки амплитуды волны была выбрана плотность n , но можно было бы выбрать любую другую величину симметричного типа: u, v, B_y . Кроме того, для уединенной волны малой амплитуды максимальные или минимальные отклонения этих величин от рассматриваемого однородного состояния линейно связаны с параметром μ . В соответствии с подходом, описанным в разд. 2, можно считать, что уединенная волна в случае малых амплитуд приближенно описывается соотношениями (3.5), (3.6), в которых параметр μ зависит от t , т.е. считать, что μ является определяющим параметром процесса снижения амплитуды уединенной волны в данной задаче.

Фигура 6 демонстрирует, что квазистационарная структура типа кинка с излучением действительно формируется. На этом рисунке фактически показаны графики усредненных по времени скоростей снижения амплитуды уединенной волны (величина dn_{\min}/dt) в зависимости от текущей амплитуды уединенной волны (параметр $\Delta = 1 - n_{\min}$ характеризует амплитуду) при различных начальных значениях μ . Видно, что существует предельная кривая (показан штриховой линией), к которой стремятся все графики при $\Delta \rightarrow 0$. Таким образом, со временем скорость снижения амплитуды перестает зависеть от начального значения амплитуды, что указывает на формирование структуры разрыва. Усредненная скорость, т.е. средняя скорость за достаточно большой промежуток времени Δt_a (для фиг. 6 $\Delta t_a = 100$), используется в связи с наличием нерегулярных колебаний амплитуды уединенной волны, особенно заметных в случае больших стартовых значений μ . Эти колебания могут быть связаны с взаимодействием с начальным пучком волн справа и численными эффектами.

Представляет интерес вопрос о том, какое время Δt требуется для снижения на некоторую заданную величину, например на 10% амплитуды уединенной волны Δ , наблюдаемой в некоторый текущий момент времени t . В соответствии с проведенными расчетами в случае конечных амплитуд это время зависит от того, какова была амплитуда при $t = 0$, т.е. от значения μ , использованного для получения начальных данных расчета. На фиг. 7 приведены соответствующие графики времени Δt , необходимого для снижения текущей амплитуды уединенной волны Δ на 10% в зависимости от вели-

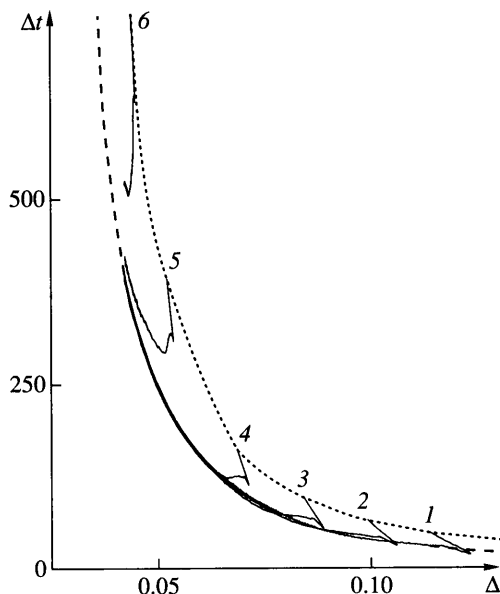


Фиг. 6. Скорость снижения амплитуды уединенной волны при начальных значениях μ тех же, что и на фиг. 5

чины параметра Δ при различных начальных значениях μ . Как и следовало ожидать, эти графики оказываются неоднозначными, поскольку процесс протекает таким образом, что вначале амплитуда уединенной волны растет, а затем убывает. С математической точки зрения это некоторые кривые на плоскости $(\Delta, \Delta t)$, параметризованные параметром t , поэтому многозначность не порождает никаких проблем при их построении. Все эти кривые при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремятся к предельной кривой, показанной штриховой линией. Как видно из фиг. 7, графики для различных начальных значений μ оказываются близкими не только при малых значениях Δ ($\Delta < 0.05$), но и при сравнительно больших значениях порядка 0.05–0.1, предельную кривую можно продолжить и в области больших значений Δ как общую касательную ко всем кривым, построенным при различных начальных значениях μ . Именно предельная кривая несет физически содержательную информацию, поскольку показывает время уменьшения амплитуды при установившемся процессе.

В самом деле, уединенная волна в реальных физических задачах формируется самопроизвольно и совсем не обязательно, что до развития установившегося процесса значения физических величин совпадут с математическими данными какого-либо из проведенных здесь расчетов. Для сравнения на фиг. 7 пунктирной линией приводится и более примитивная оценка времени снижения амплитуды уединенной волны – время, необходимое для снижения на 10% амплитуды начальной, т.е. при $t = 0$. Возможно, что при малых значениях амплитуды эти два графика будут практически совпадать из-за того, что на начальном этапе процесса относительное изменение амплитуды будет незначительным. Однако провести такие расчеты не представляется возможным из-за недостаточной производительности компьютера.

4. Обсуждение. В рассмотренных случаях касательная к дисперсионной ветви в начале координат пересекает ту же самую ветвь, и, видимо, обнаруженное здесь качест-



Фиг. 7. Время Δt , необходимое для снижения текущей амплитуды уединенной волны на 10%, при начальных значениях μ тех же, что и на фиг. 5. Штриховая линия – предельная кривая; пунктирная соответствует времени, необходимому для снижения начальной амплитуды на 10%

венное поведение решений следует считать типичными для подобных случаев, но не исчерпывающим все возможные варианты поведения решений.

В работах [16, 17] для упругих волн в композитном материале был рассмотрен пример эволюции начальных данных типа уединенной волны в случае, когда пересекается другая ветвь. Такой случай пересечения имеет место для медленных магнитозвуковых волн в плазме с горячими электронами, поэтому анализ решений в композитном материале представляет интерес для прогноза возможного характера процесса в случае медленных магнитозвуковых волн. В композите без предварительного напряжения точное решение в виде уединенной волны существует [16], но при его возмущении величина максимального значения, принимаемая выше в качестве амплитуды уединенной волны, начинает периодически колебаться со временем, убывая в среднем. Анализ решения показывает, что возникает комбинация из обычной уединенной волны и уединенной волны огибающей некоторого волнового пакета. Обе волны движутся с одинаковой скоростью. Длина волны в этом пакете определяется условием совпадения скорости движения этой комбинации волн и групповой скорости линейных волн: $c_g = V$. При этом наблюдается излучение волн, у которых фазовая скорость не совпадает со скоростью уединенной волны (нестационарное излучение).

В отличие от решений, рассмотренных в данной работе, скорость уменьшения амплитуды уединенной волны со временем не уменьшается, а растет. Для предварительно напряженного композита точное решение в виде уединенной волны отсутствует [17], поэтому наличие начального возмущения для запуска процесса распада не требуется. Помимо нестационарного излучения, как и в рассмотренных в разд. 1–3 решениях, наблюдается еще и излучение волн с длиной волны, определяемой условием совпадения скорости уединенной волны и фазовой скорости линейных волн: $\omega(k)/k = V$ (стационарное излучение). В соответствии с предложенной в разд. 2 интерпретацией решения о распаде уединенной волны как решения с разрывом здесь нужно вводить разрыв с

двумя излучаемыми волнами. Структура такого разрыва носит нестационарный характер и определяется двумя параметрами: μ_1 и μ_2 – амплитуды обычной уединенной волны и волны огибающей.

Заметим, что для рассмотренных в разд. 1–3 решений тоже имеется значение k , при котором скорость уединенной волны совпадает с групповой скоростью, тем не менее это не сказывается на характере решения.

При исследовании задачи о распаде разрыва малой интенсивности для обобщенного нелинейного уравнения Шредингера [2, 18] в указанных выше двух случаях пересечения дисперсионных кривых и прямой $V = \omega/k$, где V – скорость разрыва, также получают качественно различные решения. В первом случае (пересекается та же ветвь, для которой прямая $V = \omega/k$ близка к касательной в начале координат) возникает решение с разрывом с нестационарной структурой, содержащей обобщенную уединенную волну (комбинацию из уединенной и периодической волны), амплитуда которой колеблется относительно некоторого постоянного среднего значения. Во втором случае (пересечение другой ветви) вначале в решении возникает уединенная волна, отделяющая однородный участок от волновой зоны. Затем эта волна начинает распадаться, при этом излучаются две волны – стационарная и нестационарная. Процесс распада ускоряется со временем. С течением времени разрыв исчезает, образуется область с хаотическим поведением.

Это сравнение приводится здесь в связи с тем, что имеется явная аналогия в решениях задачи о распаде разрыва малой интенсивности и задачи о распаде уединенной волны: в обеих задачах солитонный элемент играет роль структуры разрыва. В то же время постановки этих задач как бы взаимно обратны. В задаче о распаде разрыва малой интенсивности задается перепад уровня, а уединенная волна возникает самопроизвольно, т.е. ее амплитуда подстраивается под перепад уровня. В задаче о распаде уединенной волны наоборот задается амплитуда уединенной волны, а самопроизвольно возникающий перепад уровня подстраивается под нее.

Заключение. Исследован некоторый характерный тип эволюции начальных данных типа уединенных волн. В результате потери энергии на излучение короткой волны амплитуда уединенной волны со временем снижается. Формируется решение, которое можно интерпретировать как решение с квазистационарной структурой разрыва типа кинка с излучением, в котором уединенная волна играет роль “резервуара энергии” и “резервуара импульса”. При этом процесс не сводится только к уменьшению амплитуды уединенной волны и возникновению коротковолнового излучения, имеется еще и смещение уровня с одной из сторон разрыва.

Автор благодарит А.Т. Ильичева за сотрудничество, а также А.Г. Куликовского и А.А. Бармина за обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00554) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1697.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
2. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. 318 с.
3. Куликовский А.Г., Свешникова Е.Н. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
4. Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных скачков в обратимых системах // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 52–62.
5. Бахолдин И.Б. Разрывы, описываемые обобщенными уравнениями Кортевега – де Вриза // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 95–109.

6. Бахолдин И.Б. Скачок с излучением в моделях, описываемых обобщенным уравнением Кортевега – де Вриза // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 59–68.
7. Бахолдин И.Б. Уединенные волны и структуры разрывов в бездиссипативных моделях с усложненной дисперсией // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 1. С. 49–64.
8. Bakholdin I., Il'ichev A. Radiational and modulational instability described by the fifth-order Korteweg – de Vries equation // Contemporary Mathematics. 1996. V. 200. P. 1–15.
9. Benilov E.S., Grimshaw R., Kuznetsova E.P. The generation of radiating waves in a singularly-perturbed Korteweg – de Vries equation // Physica D. 1993. V. 69. P. 270–278.
10. Bakholdin I., Il'ichev A. Solitary-wave decay in a cold plasma // J. Plasma Phys. 1998. V. 60. Pt. 3. P. 569–580.
11. Бахолдин И.Б., Жарков А.А., Ильичев А.Т. Распад солитонов в изотропной бесстолкновительной квазинейтральной плазме с изотермическим давлением // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. № 1. С. 125–141.
12. Ильичев А.Т., Марченко А.В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88–95.
13. Бахолдин И.Б. Структуры гидравлических прыжков при наличии ледового покрытия // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 139–146.
14. Akylas T.R. Unsteady and nonlinear effects near the cusp lines of the Kelvin ship-wave pattern // J. Fluid Mech. 1987. V. 175. № 5. P. 333–342.
15. Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
16. Bakholdin I., Il'ichev A., Tomashpol'skii V. Stability, instability and interaction of solitary pulses in a composite media // Europ. J. Mech. A. Solids. 2002. V. 21. № 2. P. 222–346.
17. Бахолдин И.Б., Томашпольский В.Я. Уединенные волны в модели предварительно деформированного нелинейного композита // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 527–538.
18. Бахолдин И.Б. Волновые скачки, описываемые модифицированным уравнением Шрёдингера // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1329–1348.

Москва
E-mail:bakh@orc.ru

Поступила в редакцию
8.II.2005