

УДК 532.529.5:517.4:536.24

© 2005 г. Е. С. АСМОЛОВ, А. В. КАЗАКОВ, А. Ф. КИСЕЛЕВ, А. П. КУРЯЧИЙ

**ВЛИЯНИЕ МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛООБМЕНА НА УСТОЙЧИВОСТЬ  
МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВИХРЕ**

Рассчитаны параметры осесимметричного турбулентного закрученного двухфазного течения вязкого теплопроводного газа, содержащего дисперсную фазу, при наличии процессов конденсации водяного пара на жидких частицах. Для дисперсной фазы введена модель, учитывающая изменения концентрации пара и размера частиц за счет процессов конденсации или испарения. Полученные в результате численного решения распределения параметров основного невозмущенного течения используются далее для численного решения линейной задачи гидродинамической устойчивости, сформулированной во временной постановке. В линейной постановке исследованы характеристики гармонических возмущений малой амплитуды, распространяющихся вдоль оси вихря. Обнаружено значительное влияние выделения тепла в газе в результате конденсации водяного пара на характеристики нейтральных возмущений и кривые нейтральной устойчивости.

*Ключевые слова:* двухфазные течения, закрученные течения, турбулентность, устойчивость.

Важные задачи динамики закрученных ламинарных и турбулентных течений – исследования концевых вихрей, сходящих с крыльев летательных аппаратов и взаимодействующих со струями двигателей, процессов генерации и диссипации турбулентности в ядре вихря, а также внутренних закрученных течений в тепловых трубах и вихревых камерах [1–3]. Большинство работ по изучению вихревых течений были выполнены в рамках модели несжимаемой жидкости [1–8], и используемые в них подходы, методы решения и полученные результаты без дополнительных предположений не могут быть применены для описания течений вязкого теплопроводного газа. В свою очередь, сжимаемость и теплопроводность газа, неоднородность температуры и подвод тепла к закрученному потоку могут существенно влиять на параметры течения и характеристики его устойчивости [9–11].

Закрученные течения на практике, как правило, оказываются турбулентными, поэтому исследования таких течений представляют наибольший интерес. При изучении турбулентных течений основная проблема заключается прежде всего в адекватном моделировании турбулентных напряжений, которые могут быть определены в зависимости, например, от осредненных значений параметров течения или с помощью дополнительных уравнений, непосредственно описывающих турбулентные напряжения. Например, в [12, 13] для их моделирования использована простейшая модель пути перемешивания.

Открытым остается вопрос о развитии возмущений в этих течениях. Рассмотрение этой проблемы может помочь выяснению процессов, приводящих к потере устойчивости и разрушению вихрей. Первым шагом в решении данной проблемы может стать рассмотрение поведения возмущений бесконечно малой амплитуды на фоне профилей скорости основного осредненного закрученного турбулентного течения. Для ламинарных течений проблема, как известно, сводится к задаче линейной устойчивости закрученного течения [6, 10, 11, 14]. В случае турбулентных течений эта задача осложняется тем, что на поведение малых возмущений влияют и индуцируемые ими са-

ними турбулентные пульсации, порождающие соответствующие им турбулентные напряжения [15, 16]. Следовательно, описание процесса развития возмущений требует знания поведения этих дополнительных турбулентных напряжений, которые равны разности полных турбулентных напряжений, возникающих в потоке при наличии организованного возмущенного движения малой амплитуды, и их соответствующих величин в основном невозмущенном потоке. В предельном случае возмущенного движения с амплитудой, стремящейся к нулю, можно полагать, что этими дополнительными турбулентными напряжениями, представляющими собой соответствующую квадратичную функцию пульсационных скоростей, можно пренебречь. Тогда можно считать, что процесс развития таких возмущений происходит на фоне осредненного поля скоростей основного турбулентного течения, в котором главную роль играет молекулярная вязкость.

В настоящей работе на основе данного предположения рассматривается влияние объемного подвода энергии на кривые нейтральной устойчивости гармонических возмущений, распространяющихся вдоль оси турбулентного вихря, находящегося в спутном дозвуковом потоке с постоянной циркуляцией окружной составляющей скорости вне вязкого ядра вихря. Предполагается наличие водяного пара и жидких частиц в вихре. Выделение тепла в газе обусловлено конденсацией водяного пара на частицах.

### 1. Постановка задачи и результаты расчета турбулентного течения в ядре вихря.

Рассматривается стационарное турбулентное многокомпонентное закрученное течение в спутном дозвуковом потоке, имеющем скорость  $V_0^*$ . В потоке вязкого теплопроводного газа содержатся водяной пар и жидкие частицы, на которых возможна конденсация пара. Для описания движения частиц в гетерогенных потоках применяются два основных подхода, основанных на переменных Эйлера или Лагранжа. Метод Эйлера больше подходит для настоящего исследования, поскольку он используется и для описания течения газа, так что численное решение уравнений движения дисперсной фазы может быть основано на тех же численных методах, что и для газового потока. В случае турбулентного течения осредненные уравнения движения частиц аналогичны уравнениям Рейнольдса для закрученного турбулентного течения газа [13].

Для исследования осесимметричного течения используется цилиндрическая система координат  $(x, r, \theta)$ , где безразмерные координаты  $x$  и  $r$  отнесены к продольной длине  $l^*$ , характеризующей масштаб, на котором происходит развитие течения в вязком ядре вихря. Предполагается, что продольная ось  $x$  совпадает с осью вихря. В указанной системе координат определяются векторы безразмерных скоростей газа и частиц  $\mathbf{V} = (V_x, V_r, V_\theta)$  и  $\mathbf{U} = (U_x, U_r, U_\theta)$  соответственно. В качестве характерной скорости использована скорость спутного потока  $V_0^*$ .

Для описания течения в вязком ядре вихря, поперечный размер которого при больших значениях числа Рейнольдса  $Re$  много меньше продольного масштаба течения  $l^*$ , вводятся новые переменные

$$\begin{aligned} r_1 &= rRe^{1/2}, & V_{r1} &= V_rRe^{1/2}, & U_{r1} &= U_rRe^{1/2} \\ V_{\theta 1} &= V_\theta r_1, & U_{\theta 1} &= U_\theta r_1, & Re &= \frac{\rho_0^* V_0^* l^*}{\mu_0^*} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho_0^*$  и  $\mu_0^*$  – плотность и коэффициент динамической вязкости газа во внешнем потоке. Уравнение неразрывности для дисперсной фазы в новых переменных имеет вид

$$\frac{\partial n_p U_x}{\partial x} + \frac{\partial n_p U_{r1}}{\partial r_1} + \frac{n_p U_{r1}}{r_1} = 0 \quad (1.2)$$

где  $n_p$  – числовая плотность частиц, отнесенная к ее характерному значению  $n_{p0}^*$ . В общем случае в уравнении (1.2) необходимо также учитывать турбулентную диффузию частиц. Однако для частиц, размер которых изменяется только вследствие конденсации или испарения, это привело бы к неоправданному усложнению постановки задачи, так как в каждой точке пространства необходимо было бы вводить функцию распределения частиц по размерам и в дальнейшем моделировать поведение каждого отдельного сорта частиц.

В уравнении импульса для осредненного вектора скорости частиц в закрученном потоке необходимо учитывать центробежную силу и силу сопротивления Стокса, вызванную взаимодействием частиц с газовым потоком. Столкновения частиц между собой в данной модели не учитываются. Проекция безразмерного уравнения импульса для частиц запишутся в виде

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r_1} = \frac{V_x - U_x}{\tau_p}, \quad -\frac{U_{\theta 1}^2}{r_1^3} = \frac{V_{r1} - U_{r1}}{\text{Re} \tau_p} \quad (1.3)$$

$$U_x \frac{\partial U_{\theta 1}}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_{\theta 1}}{\partial r_1} = \frac{V_{\theta 1} - U_{\theta 1}}{\tau_p}, \quad \tau_p = \frac{2\rho_s \text{Re}_p^2}{9\text{Re}}, \quad \text{Re}_p = \frac{\rho_0^* V_0^* a_0^*}{\mu_0^*}$$

Здесь  $\tau_p$  – безразмерное время релаксации скорости частиц,  $\rho_s$  – плотность материала частиц, отнесенная к плотности газа в спутном потоке,  $a_0^*$  – начальный радиус частиц. Правые части уравнений (1.3) представляют проекции безразмерной силы сопротивления.

Для оценки различных членов в уравнениях (1.3) примем в качестве характерных следующие значения параметров потока:  $\rho_0^* \sim 0.1 \text{ кг/м}^3$ ,  $U_0^* \sim 100 \text{ м/с}$ ,  $l^* \sim 0.1 \text{ м}$  и  $a_0^* \sim 1 \text{ мкм}$ . Плотность вещества жидких частиц  $\rho_s^* = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . В результате получаем оценки для  $\text{Re} \sim 10^5$ ,  $\text{Re}_p \sim 1$  и времени релаксации скорости частиц  $\tau_p \sim 10^{-3}$ . Это означает, что скорости частиц в продольном и окружном направлении мало отличаются от соответствующих компонент скорости газа. Члены в левых частях уравнений (1.3) порядка единицы, следовательно, из первого и третьего уравнений для скоростей скольжения в этих направлениях получим оценку  $|V_x - U_x| \sim \tau_p \ll 1$ ,  $|V_{\theta 1} - U_{\theta 1}| \sim \tau_p \ll 1$ . В радиальном направлении скорость частиц может значительно отличаться от скорости газа, поскольку значение безразмерного параметра  $\text{Re} \tau_p \sim 10^2$  достаточно большое и, следовательно,  $|V_r| \sim \text{Re} \tau_p \ll |U_r|$ .

Обратное влияние движения частиц на газовый поток описывается в рамках приближения запыленных газов [17]. В качестве одного из основных предположений данного подхода принимается малое значение объемной доли частиц, так что эффект вытеснения газа частицами можно пренебречь, и уравнение неразрывности для газа остается неизменным

$$\frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_{r1}}{\partial r_1} + \frac{\rho V_{r1}}{r_1} = 0 \quad (1.4)$$

Тем не менее массовая доля частиц может быть конечной вследствие большой величины отношения плотностей жидких частиц и газа. В результате влияние частиц на

течение газа эквивалентно действию некоторой объемной силы. Для конденсирующихся или испаряющихся капель наиболее важен межфазный обмен энергией, так как удельная теплота парообразования обычно велика по сравнению с энтальпией газа. Вязкое обтекание отдельной частицы и ее теплообмен считаются квазистационарными, так что сила, действующая на частицу, описывается законом Стокса. Скорость ее теплообмена пропорциональна разности температур поверхности частицы и газа на больших расстояниях от частицы по сравнению с ее радиусом. Температура внутри частицы считается постоянной.

Для описания турбулентного течения в вихре используется модель турбулентной вязкости [13]. При сделанных предположениях проекции безразмерных уравнений импульса, энергии и состояния для газа запишутся в виде [9]

$$\rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho V_{r1} \frac{\partial V_x}{\partial r_1} + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial r_1} \left[ (\mu + \mu_{tx}) \frac{\partial V_x}{\partial r_1} \right] - \frac{(\mu + \mu_{tx})}{r_1} \frac{\partial V_x}{\partial r_1} = -\rho_p \frac{V_x - U_x}{\tau_p} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r_1} - \rho \frac{V_{\theta 1}^2}{r_1^3} = -\rho_p \left( \frac{V_{r1} - U_{r1}}{\text{Re} \tau_p} \right) \quad (1.6)$$

$$\rho V_x \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial x} + \rho V_{r1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} - \frac{\partial}{\partial r_1} \left[ (\mu + \mu_{t\theta}) \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} \right] + \frac{(\mu + \mu_{t\theta})}{r_1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} + \frac{2V_{\theta 1}}{r_1} \frac{\partial (\mu + \mu_{t\theta})}{\partial r_1} = -\rho_p \frac{V_{\theta 1} - U_{\theta 1}}{\tau_p} \quad (1.7)$$

$$\rho V_x \frac{\partial h}{\partial x} + \rho V_{r1} \frac{\partial h}{\partial r_1} - V_x \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\rho V_{r1} V_{\theta 1}^2}{r_1} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left[ \left( \frac{\mu}{\sigma} + \frac{\mu_{tx}}{\sigma_t} \right) r_1 \frac{\partial h}{\partial r_1} \right] - (\mu + \mu_{tx}) \left[ \left( \frac{\partial V_x}{\partial r_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} - \frac{2V_{\theta 1}}{r_1} \right)^2 \right] = -\rho_p \frac{T - T_p}{(\gamma - 1) M_0^2 \tau_{ph}} \quad (1.8)$$

$$P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h, \quad T = (\gamma - 1) M_0^2 h$$

$$\mu_{tx} = \text{Re}^{1/2} \rho l_\lambda^2 \left\{ \left( \frac{\partial V_x}{\partial r_1} \right)^2 + \left[ r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{V_{\theta 1}}{r_1} \right) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad \mu_{t\theta} = \frac{\mu_{tx}}{\sigma_{r\theta}}, \quad l_\lambda = \lambda r_{0.05} \quad (1.9)$$

$$\tau_{ph} = \frac{\rho_s \text{Re}_p^2 \sigma}{3 \text{Re}}, \quad \rho_p = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_s n_p$$

Здесь  $P$  – давление газа, отнесенное к  $\rho_0^* V_0^{*2}$ ,  $\rho = \rho^*/\rho_0^*$  – безразмерная плотность газа,  $\rho_p$  – относительное массовое содержание частиц в газе,  $a = a^*/a_0^*$  – их безразмерный радиус,  $\sigma$  и  $\sigma_t$  – ламинарное и турбулентное числа Прандтля,  $h$  и  $h_p$  – энтальпии газа и частиц, отнесенные к  $V_0^{*2}$ ,  $\gamma$  – показатель адиабаты газа,  $\tau_{ph}$  – время релаксации температуры частиц. Формулы расчета параметров  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\lambda$ ,  $r_{0.05}$  модели турбулентной вязкости (1.9) приведены в [9]. Коэффициент молекулярной вязкости газа предполагается зависящим от температуры по степенному закону  $\mu/\mu_0 = (h/h_0)^\omega$ . В проведенных расчетах принято  $\sigma = 0.72$ ,  $\sigma_t = 0.9$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$ .

Дополнительные источниковые члены в правых частях уравнений (1.5)–(1.8) обусловлены межфазным обменом импульсом вследствие действия силы сопротивления Стокса, а дополнительный член в правой части уравнения энергии (8) связан с межфазным обменом энергией. Отметим, что в силу приведенных оценок и малости относительной плотности частиц при численных расчетах учитывались только обменные члены в уравнении поперечного импульса и энергии.

Начальные и граничные условия для системы уравнений (1.4)–(1.9) имеют вид

$$x = 0: V_x = V_{x0}(r_1), \quad V_{\theta 1} = V_{\theta 10}(r_1), \quad h = h_0(r_1)$$

$$r_1 = 0: \frac{\partial V_x}{\partial r_1} = 0, \quad V_{r1} = 0, \quad V_{\theta 1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial r_1} = 0 \quad (1.10)$$

$$r_1 \rightarrow \infty: V_x = 1, \quad V_{\theta 1} = \Gamma = \text{const}, \quad h = h_e = [(\gamma - 1)M_0^2]^{-1}$$

Здесь  $\Gamma$  – безразмерная циркуляция окружной составляющей скорости,  $M_0$  – число Маха спутного потока.

Поскольку рассматривается двухфазное течение с конденсацией пара на каплях, необходимо учитывать изменение их радиуса, от которого существенно зависит значение параметра  $\rho_p$ , ответственного за межфазный обмен импульсом и энергией. Предполагается, что в начальном сечении все частицы имеют одинаковый радиус  $a_0^*$ . Уравнение, описывающее рост капель, с начальным условием можно представить как

$$V_x \frac{\partial a}{\partial x} + V_{r1} \frac{\partial a}{\partial r_1} = a_t, \quad a(0, r_1) = 1 \quad (1.11)$$

Входящая в правую часть уравнений (1.11) скорость изменения радиуса капли  $a_t$  определяется в результате решения уравнений баланса тепла и диффузии пара вблизи отдельной частицы. Поскольку масштаб изменения параметров течения газа велик по сравнению с радиусом частицы, распределения температуры и концентрации пара вдали от нее можно считать однородными. Предполагая, что коэффициенты теплопроводности и диффузии не зависят от температуры, можно получить аналитические решения для сферически симметричных полей температуры и концентрации вблизи частицы. В результате получим следующие безразмерные соотношения для скорости изменения радиуса капли

$$a_t = -\frac{\text{Re}}{\rho_s \text{ScRe}_p^2} \frac{c_{vs}(T_p) - c_v(x, r_1)}{a(x, r_1)}, \quad a_t = \frac{\text{Re}}{\rho_s L \sigma \text{Re}_p^2} \frac{T_p(x, r_1) - T(x, r_1)}{a(x, r_1)} \quad (1.12)$$

$$L = \frac{L^* \rho_0^*}{c_p^* T_0^*}, \quad c_v = \frac{\rho_v^*}{\rho_0^*}$$

Здесь  $\text{Sc}$  – число Шмидта, которое принималось равным числу Прандтля  $\sigma$ ,  $L^*$  – удельная теплота парообразования,  $c_p^*$  – теплоемкость газа при постоянном давлении,  $c_v$  – концентрация пара,  $c_{vs}$  – концентрация насыщенного пара при температуре поверхности капли  $T_p$ . Решение полученных нелинейных алгебраических уравнений позволяет определить скорость изменения радиуса  $a_t(x, r_1)$  и температуру капель  $T_p(x, r_1)$  в каждой точке течения, а также вычислить источниковый член в правой части уравнения энергии (1.8).

Концентрация пара определяется из уравнения диффузии с соответствующими краевыми условиями

$$\rho V_x \frac{\partial c_v}{\partial x} + \rho V_{r_1} \frac{\partial c_v}{\partial r_1} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left[ \left( \frac{\mu}{\sigma} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) r_1 \frac{\partial c_v}{\partial r_1} \right] = -4\pi \rho_s n_p \phi_0 a^2 a_t, \quad (1.13)$$

$$x = 0: c_v = c_{v0}(r_1); \quad r_1 = 0: \frac{\partial c_v}{\partial r_1} = 0; \quad r_1 \rightarrow \infty: c_v = c_{ve}$$

где  $\phi_0 = n_{p0}^* a_0^{*3}$  – характерное значение объемной доли частиц,  $c_{ve}$  – значение концентрации пара вне вязкого ядра вихря.

При определении начальных условий для параметров течения газа (1.10) значение энтальпии газа считалось постоянным и равным ее значению в невязком потоке  $h_0(r_1) = h_e$ . Распределения продольной и циркуляции азимутальной скоростей задавались в соответствии с моделью вихря Ламба–Озеена [6, 7] закрученного течения струйного типа

$$V_{x0}(r_1) = 1 + \Delta \exp(-\beta r_1^2), \quad V_{\theta 10}(r_1) = \Gamma [1 - \exp(-\beta r_1^2)], \quad \Delta = 0.01, \quad \beta = 3$$

Начальные распределения давления и плотности газа определялись из решения азимутальной составляющей уравнения импульса (1.6) без правой части и уравнения состояния.

Плотность частиц в начальном сечении задавалась постоянной:  $n_p(0, r_1) = 1$ . Начальное распределение плотности пара  $c_v(0, r_1) = c_{vs}(T_{p0})$  определялось по распределению температуры частиц

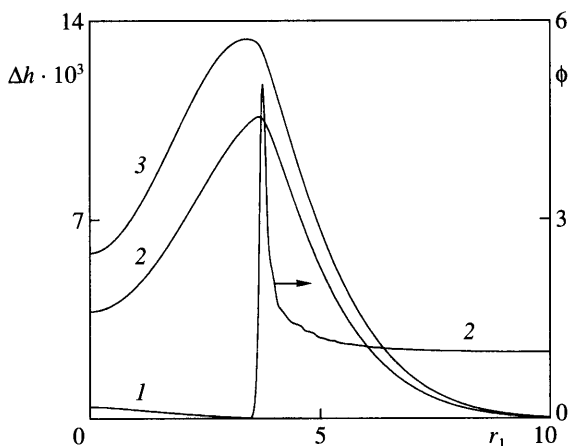
$$T_{p0}(r_1) = 1 + \Delta_p \exp(-\beta_p r_1^2), \quad \Delta_p = T_0^*/T_{p0}^*$$

$$T_{p0}^* = 293 \text{ К}, \quad \beta_p = 0.075$$

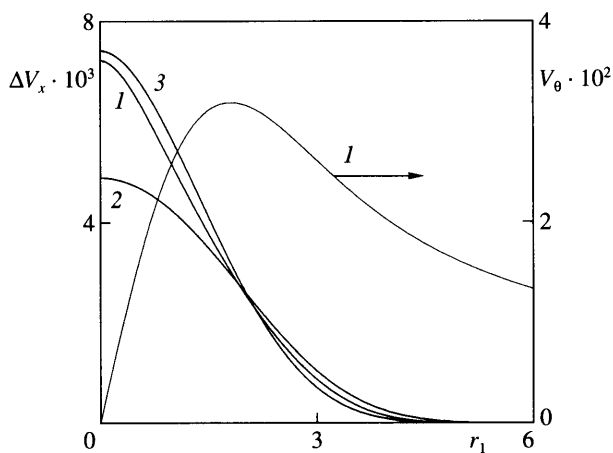
Решение краевой задачи (1.2)–(1.13) получено на основе использования численного метода решения системы параболических уравнений, имеющего второй порядок точности [18]. В проведенных расчетах были фиксированы следующие параметры задачи:  $M_0 = 0.6$ ,  $\text{Re} = 1.5 \cdot 10^6$ ,  $\Gamma = 0.08$ ,  $T_0^* = 273 \text{ К}$ ,  $\rho_0^* = 0.918 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0^* = 0.7 \text{ мкм}$ ,  $c_{ve} = 6.15 \cdot 10^{-3}$  – концентрация насыщенного водяного пара при  $T_0^*$ ,  $\rho_s^* = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Были проведены расчеты как однофазного течения (вариант 1), так и многокомпонентного при двух характерных значениях объемного содержания частиц:  $\phi_0 = 2.5 \cdot 10^{-6}$  и  $5 \cdot 10^{-6}$  (варианты 2 и 3), которым соответствуют значения начальной концентрации частиц  $n_{p0}^* = 7.29 \cdot 10^{12}$  и  $1.46 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$ .

Влияние межфазного взаимодействия при наличии конденсации пара на параметры течения газа в сечении  $x = 0.5$  отражено на фигурах 1 и 2. На фиг. 1 представлены распределения приращения энтальпии газа  $\Delta h = (h - h_e)/h_e$ , а на фиг. 2 – избытка продольной скорости  $\Delta V_x = V_x - 1$  в вязком ядре вихря как в однофазном, так и в многокомпонентном течениях.

Наиболее существенное влияние процессы конденсации пара оказывают, как и следовало ожидать, на распределение энтальпии газа, возрастание которой тем значительнее, чем больше объемное содержание частиц (при фиксированном начальном значении их размера). Увеличение энтальпии газа в ядре вихря при этом имеет монотонный характер. Это объясняется вытеснением частиц от оси вихря на его периферию под действием центробежной силы. В результате частицы концентрируются в



Фиг. 1. Распределения приращения энтальпии газа  $\Delta h = (h - h_e)/h_e$  и относительного объемного содержания частиц  $\phi = n_p a_3 / \phi_0$  в сечении  $x = 0.5$ : 1–3 – варианты 1–3



Фиг. 2. Профили азимутальной  $V_\theta$  и избытка осевой  $\Delta V_x = V_x - 1$  скорости в ядре вихря; нумерация та же, что и на фиг. 1

достаточно узкой кольцеобразной области, что отражает распределение относительного объемного содержания частиц  $\phi = n_p a^3 / \phi_0$  для варианта 2 на фиг. 1. Реальное распределение должно быть более пологим вследствие турбулентной диффузии частиц. Однако изменение энтальпии газа определяется общим числом частиц и их размером, поскольку происходит интенсивный турбулентный перенос тепла и пара к слою частиц. Видно, что максимумы функции  $\phi$  и энтальпии газа совпадают, но распределение  $\Delta h$  гораздо более пологое.

Существенная особенность, отраженная на фиг. 2 – немонотонное влияние тепловыделения при конденсации пара на продольную составляющую скорости газа в ядре вихря. Если в варианте 2 тепловыделение приводит к уменьшению продольной скорости на оси ядра вихря и возрастанию на его периферии, то при увеличении объемного содержания частиц в 2 раза в варианте 3 наблюдается противоположный эффект.

Влияние межфазного взаимодействия на распределения азимутальной скорости  $V_\theta = V_{\theta 1}/r_1$ , показанной на фиг. 2, и давления газа в ядре вихря при рассмотренных параметрах течения незначительно.

**2. Анализ нейтральных когерентных возмущений.** Полученные в результате численного решения задачи о движении газа и дисперсных частиц распределения параметров газа использованы для анализа устойчивости течения и выяснения влияния дисперсных частиц и конденсации пара на характеристики нейтральных возмущений. Система уравнений, описывающая эволюцию малых возмущений в вязком ядре вихря записывается во введенных ранее безразмерных цилиндрических координатах  $(x, r_1, \theta)$ . Для представления уравнений в безразмерном виде характерное время определяется как  $t^* = l^*/(V_0^* \text{Re}^{1/2})$ . Безразмерные компоненты скорости газа  $(u, v, w)$  отнесены к

$V_0^*$ , давление  $p$  – к  $\rho_0^* V_0^{*2}$ , энтальпия  $h$  – к  $V_0^{*2}$ . Эволюция возмущений рассматривается в предположении, что невозмущенное течение (осредненное по Рейнольдсу) в ядре вихря является стационарным и локально параллельным. В этом случае мгновенные параметры течения задаются следующим образом:

$$u(x, r, \theta, t) = U(r) + u^*(r) \exp[i(\alpha x + n\theta - \omega t)] \quad (2.1)$$

$$v(x, r, \theta, t) = v^*(r) \exp[i(\alpha x + n\theta - \omega t)]$$

$$w(x, r, \theta, t) = W(r) + w^*(r) \exp[i(\alpha x + n\theta - \omega t)]$$

$$p(x, r, \theta, t) = P(r) + p^*(r) \exp[i(\alpha x + n\theta - \omega t)]$$

$$h(x, r, \theta, t) = H(r) + h^*(r) \exp[i(\alpha x + n\theta - \omega t)]$$

Здесь  $U \equiv V_x$ ,  $W \equiv V_\theta$ ,  $H, P$  – параметры осредненного основного течения, полученные из решения краевой задачи (1.4)–(1.10), а величины с верхним индексом обозначают комплексные амплитуды возмущений. Нижний индекс 1 у переменной  $r_1$  опущен. Волновые числа  $\alpha, n$  и частота возмущений  $\omega$  – в общем случае комплексные величины.

Межфазное взаимодействие в уравнениях для малых возмущений не учитывается. Подстановка функций течения (2.1) в уравнения Навье–Стокса после осреднения, согласно [15], и отбрасывания квадратичных членов приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для малых возмущений, которую можно представить в виде

$$\left( \mathbf{A} \frac{d^2}{dr^2} + \mathbf{B} \frac{d}{dr} + \mathbf{C} + \omega \mathbf{D} \right) \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad (2.2)$$

где  $\boldsymbol{\Psi} = [u^*, v^*, w^*, h^*, p^*]$  – вектор из пяти элементов, а  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  – матрицы размерностью  $5 \times 5$  с ненулевыми элементами

$$A_{11} = \frac{\mu}{\text{Re}}, \quad A_{22} = \frac{4}{3} A_{11}, \quad A_{33} = A_{11}, \quad A_{44} = \frac{1}{\sigma} A_{11}$$

$$B_{11} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\mu}{r} + \frac{d\mu}{dH} H' \right), \quad B_{12} = i\alpha \frac{\mu}{3\text{Re}}, \quad B_{14} = \frac{U'}{\text{Re} dH}$$

$$B_{21} = B_{12}, \quad B_{23} = \frac{in}{r} \frac{\mu}{3\text{Re}}, \quad B_{22} = \frac{4}{3} B_{11}, \quad B_{25} = -1$$



$$B_{32} = B_{23}, \quad B_{33} = B_{11}, \quad B_{34} = \frac{1}{\text{Re}dH}\Delta W$$

$$B_{41} = 2\mu\frac{U'}{\text{Re}}, \quad B_{42} = \frac{2\mu}{\text{Re}}\Delta W, \quad B_{44} = \frac{1}{\sigma\text{Re}}\left(\frac{\mu}{r} + 2\frac{d\mu}{dr}H'\right), \quad B_{53} = 1$$

$$C_{11} = -i\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{H}Auw - \frac{\mu}{\text{Re}}\left(\frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)$$

$$C_{12} = i\frac{\alpha}{\text{Re}}\left(\frac{\mu}{3r} + \frac{d\mu}{dH}H'\right) - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{H}U', \quad C_{13} = -\frac{\alpha n}{r}\frac{\mu}{3\text{Re}}$$

$$C_{14} = \frac{1}{\text{Re}}\left[\frac{d^2\mu}{dH^2}H'U' + \frac{d\mu}{dH}\left(U'' + \frac{U'}{r}\right)\right], \quad C_{15} = -i\alpha, \quad C_{21} = -i\alpha\frac{2}{3\text{Re}}\frac{d\mu}{dH}H'$$

$$C_{22} = -i\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{H}Auw - \frac{1}{\text{Re}}\left[\mu\left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) + \frac{2}{3r}\left(\frac{2\mu}{r} + \frac{d\mu}{dH}H'\right)\right]$$

$$C_{23} = 2\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{PW}{Hr} - i\frac{n}{3r\text{Re}}\left(7\frac{\mu}{R} + 2\frac{d\mu}{dH}H'\right)$$

$$C_{24} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{PW^2}{H^2r} + \frac{i}{\text{Re}dH}\left[\alpha U' + \frac{n}{r}\Delta W\right], \quad C_{25} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{W^2}{rH}$$

$$C_{31} = C_{13}, \quad C_{32} = i\frac{n}{r\text{Re}}\left(\frac{7\mu}{3r} + \frac{d\mu}{dH}H'\right) - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{H}\Delta W$$

$$C_{33} = -i\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{H}Auw - \frac{1}{\text{Re}}\left[\mu\left(\alpha^2 + \frac{4n^2}{3r^2} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{d\mu}{dH}\frac{H'}{r}\right]$$

$$C_{34} = \frac{1}{\text{Re}}\left[\frac{d^2\mu}{dH^2}H'\Delta W + \frac{d\mu}{dH}\left(W'' + \frac{W'}{r} - \frac{W}{r^2}\right)\right], \quad C_{35} = -i\frac{n}{r}$$

$$C_{42} = P' - \frac{\gamma}{\gamma-1}P\frac{H'}{H} + 2i\frac{\mu}{\text{Re}}\left[\alpha U' + \frac{n}{r}\Delta W\right], \quad C_{43} = -\frac{2\mu}{r\text{Re}}\Delta W$$

$$C_{44} = -\frac{1}{\text{Re}}\left\{\frac{\mu}{\sigma}\left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) - \frac{1}{\sigma}\frac{d^2\mu}{dH^2}H'^2 - \frac{d\mu}{dH}\left[\frac{1}{\sigma}\left(H'' + \frac{H'}{r}\right) + U'^2 + \Delta W^2\right]\right\} -$$

$$-i\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{H}Auw, \quad C_{45} = iAuw, \quad C_{51} = i\alpha, \quad C_{52} = \frac{1}{r} + \frac{P'}{P} - \frac{H'}{H}$$

$$C_{53} = i\frac{n}{r}, \quad C_{54} = -\frac{i}{H}Aiw, \quad C_{55} = -\frac{H}{P}C_{54}$$

$$D_{11} = i \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{H}, \quad D_{52} = D_{11}, \quad D_{33} = D_{11}, \quad D_{44} = D_{11}, \quad D_{45} = -i$$

$$D_{54} = \frac{i}{H}, \quad D_{55} = -\frac{i}{P} \left( \Delta W = W' - \frac{W}{r}, \quad A_{uw} = \alpha U + \frac{n}{r} W \right)$$

Здесь штрих – дифференцирование по переменной  $r$ .

Как показано в [10], граничные условия для системы уравнений (2.2) – условия затухания возмущений на больших расстояниях от вязкого ядра вихря и равенство нулю возмущений компонент скорости и энтальпии на его оси

$$r = 0, \quad r \rightarrow \infty: \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0 \quad (2.3)$$

Система уравнений и граничных условий (2.2), (2.3) представляет собой задачу на собственные значения для частоты  $\omega$  и волновых чисел  $\alpha, n$ . При заданном числе Рейнольдса  $Re$  эта задача приводит к комплексному дисперсионному соотношению в виде  $\omega = \omega(\alpha, n)$ , связывающему параметры  $\alpha, n, \omega$ , которые в общем случае все комплексны. В данной работе эволюция возмущений рассматриваемого течения рассматривается во временной постановке, при которой волновые числа  $\alpha, n$  полагаются действительными, а частота  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  – комплексной. При  $\omega_i = \text{Im}(\omega) > 0$  возмущения нарастают, а при  $\omega_i = \text{Im}(\omega) < 0$  затухают во времени. Выбор временной постановки задачи устойчивости приводит к линейной задаче на собственные значения для частоты возмущений  $\omega$ , для решения которой использован конечно-разностный метод, аналогичный предложенному в [19].

Интервал  $r \in [0, r_e]$ , на котором рассчитывались параметры основного течения  $U, W, H, P$ , отображался на единичный отрезок  $y \in [0, 1]$  с помощью дробно-линейного преобразования  $y = gr/(L + r)$ , где  $g = 1 + L/r_e, L = 2r_m, r_m$  – координата, в которой окружная скорость  $W$  имеет максимальное значение. В новой переменной система уравнений и граничных условий (2.2), (2.3) принимает вид

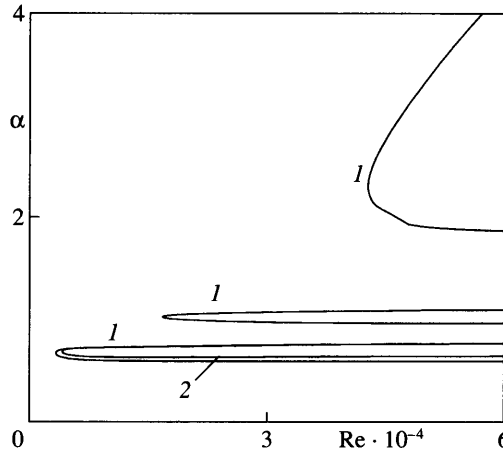
$$\left( \mathbf{A}^* \frac{d}{dy^2} + \mathbf{B}^* \frac{d}{dy} + \mathbf{C} + \omega \mathbf{D} \right) \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (2.4)$$

$$y = 0, \quad y = 1: \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$$

$$\mathbf{A}^* = f_3 \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}^* = f_2 \mathbf{A} + f_1 \mathbf{B}, \quad f_1 = \frac{(g-y)^2}{gL}, \quad f_2 = -2f_1 \frac{g-y}{gL}, \quad f_3 = f_1^2 \quad (2.5)$$

Для представления системы уравнений и граничных условий (2.4)–(2.5) в конечно-разностном виде со вторым порядком точности расчетная область  $0 \leq y \leq 1$  делится на  $N - 1$  равных интервалов. Узлы разностной сетки имеют номера  $j = 1, 2, \dots, N$ . Значения ненулевых элементов матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  системы уравнений (2.4)–(2.5) в узлах  $y_j$  определяются интерполяцией соответствующих функций переменной  $r$ , рассчитанных при решении краевой задачи (1.4)–(1.13).

Так как возмущения давления являются произвольными как на оси вихря ( $j = 1$ ), так и вне его ядра ( $j = N$ ), они вычисляются в промежуточных точках, расположенных посередине между узлами разностной сетки, используемой для расчета компонент скорости и энтальпии, что обеспечивает корректную постановку конечно-разностной задачи на собственные значения. Три уравнения импульса и уравнение энергии второго порядка, а также уравнение неразрывности первого порядка представляются в виде



Фиг. 3. Кривые нейтральной устойчивости однофазного (1) и многокомпонентного (2) течений

$$A_{ii}^{*(j)} \frac{\psi_i^{(j-1)} - 2\psi_i^{(j)} + \psi_i^{(j+1)}}{(\Delta y)^2} + \sum_{k=1}^4 \left[ B_{ik}^{*(j)} \frac{\psi_k^{(j+1)} - \psi_k^{(j-1)}}{2\Delta y} + (C_{ik}^{(j)} + \omega D_{ik}^{(j)}) \psi_k^{(j)} \right] + B_{i5}^{*(j)} \frac{\psi_5^{(j)} - \psi_5^{(j-1)}}{\Delta y} + (C_{i5}^{(j)} + \omega D_{i5}^{(j)}) \frac{\psi_5^{(j)} + \psi_5^{(j-1)}}{2} = 0 \quad (2.6)$$

$$i = 1-4, \quad j = 2, 3, \dots, N-1$$

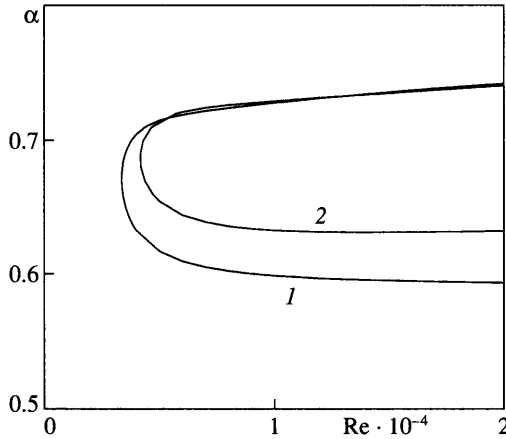
$$\frac{\psi_2^{(j+1)} - \psi_2^{(j)}}{\Delta y} + \sum_{k=1}^4 \left( \frac{C_{5k}^{(j)} + C_{5k}^{(j+1)}}{2} + \omega \frac{D_{5k}^{(j)} + D_{5k}^{(j+1)}}{2} \right) \frac{\psi_2^{(j+1)} + \psi_2^{(j)}}{2} + \left( \frac{C_{55}^{(j)} + C_{55}^{(j+1)}}{2} + \omega \frac{D_{55}^{(j)} + D_{55}^{(j+1)}}{2} \right) \psi_i^{(j)} = 0, \quad i = 5, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6)–(2.7) с учетом граничных условий (2.5) представляют систему  $5N - 9$  алгебраических уравнений для  $5N - 9$  неизвестных. В матричном виде эти уравнения принимают вид

$$A^* \Psi = \omega B^* \Psi, \quad \Psi = |p^{*(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}, \dots, \psi^{(N-1)}| \quad (2.8)$$

где  $\omega$  – собственное значение,  $\Psi$  – конечно-разностное представление собственной функции,  $A^*$  и  $B^*$  – блочно-тредиагональные матрицы. Для определения собственных значений и функций уравнения (2.8) при численных расчетах использовался известный метод нахождения собственных значений матриц, основанный на "QZ"-алгоритме вычисления собственных значений комплексных матриц.

Расчеты при значениях азимутального волнового числа  $n = \pm 1, \pm 2$  показали, что для всех рассматриваемых вариантов основного течения, описанных в предыдущем разделе, в диапазоне числа Рейнольдса  $0 \leq Re \leq 6 \cdot 10^4$  возмущения с волновыми числами  $n = 1, \pm 2$  затухают. Возмущения однофазного течения (вариант 1) с азимутальным волновым числом  $n = -1$  в указанном диапазоне  $Re$  имеют три области неустойчивости. Нейтральные кривые, соответствующие этим возмущениям, показаны на фиг. 3 (кривые 1).



Фиг. 4. Нейтральные кривые первой моды неустойчивости однофазного (1) и многокомпонентного (2) течений

Первая неустойчивая область появляется при  $Re \geq 3341$ , значения продольного волнового числа в этой области при  $Re = 6 \cdot 10^4$  находятся в диапазоне  $0.591 \leq \alpha \leq 0.769$ . Следующая область неустойчивости характеризуется критическим числом Рейнольдса  $Re \cong 16774$  и диапазоном волновых чисел  $0.964 \leq \alpha \leq 1.101$ . Наконец, третья область появляется при  $Re \geq 42878$  и  $\alpha \geq 1.877$ .

В рассматриваемой постановке задачи влияние межфазного взаимодействия и тепловыделения на эволюцию малых возмущений течения проявляется через изменение параметров основного невозмущенного течения, рассмотренное в предыдущем разделе. В уравнениях устойчивости межфазное взаимодействие не учитывается. Проведенные расчеты показали, что для варианта 2 многокомпонентного течения сохраняется только первая длинноволновая область неустойчивости, показанная на фиг. 3 (кривая 2). На фиг. 4 нейтральные кривые этой области представлены в увеличенном масштабе как для однофазного течения (кривая 1), так и для многокомпонентного (кривая 2). Значение критического числа Рейнольдса многокомпонентного течения увеличивается до  $Re \cong 4155$ , диапазон значений продольного волнового числа нарастающих возмущений сужается при  $Re = 6 \cdot 10^4$  до  $0.642 \leq \alpha \leq 0.768$  в основном за счет перемещения нижней ветви нейтральной кривой в область меньших длин волн и больших значений волнового числа  $\alpha$ .

Уменьшение диапазона неустойчивых возмущений в плоскости  $(Re, \alpha)$  в варианте 2 по сравнению с вариантом 1 качественно согласуется с результатами исследования устойчивости ламинарного сжимаемого закрученного течения, проведенного в [10], где было показано, что при уменьшении значения продольной скорости течения на оси вихря и возрастания энтальпии область неустойчивости в плоскости  $(Re, \alpha)$  сужается и смещается в сторону больших значений числа Рейнольдса.

В случае варианта 3 многокомпонентного течения нарастающие возмущения при  $Re \leq 6 \cdot 10^4$  не обнаружены. Напомним, что в вариантах 1 и 3 профили компонент скорости и давления основного течения отличаются незначительно, причем продольная скорость на оси вихря в двухфазном течении даже немного больше. Главное же различие проявляется в профилях энтальпии и, как следствие, изменении распределения коэффициента динамической вязкости, которое, по-видимому, и ведет к столь значительной стабилизации малых возмущений.

**Заключение.** Проведенные численные исследования показали, что нагрев газа в результате тепловыделения за счет конденсации пара на жидких частицах приводит к

немонотонному изменению продольной составляющей скорости вблизи оси вязкого ядра вихря. Причем величина продольной скорости в этой области может как возрастать, так и уменьшаться в зависимости от объемного содержания дисперсной фазы. Распределение энтальпии газа в ядре вихря имеет максимум во внешней области вязкого ядра вихря, что связано с резким возрастанием концентрации частиц в узкой кольцеобразной области, в которую частицы выносятся за счет действия центробежной силы. Изменение энтальпии газа вследствие конденсации пара ведет к существенному уменьшению диапазонов неустойчивых возмущений многокомпонентного турбулентного течения в ядре вихря.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (№ 1477) и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00149 и № 05-01-00847).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
2. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
3. Hall M.G. Vortex breakdown // Annu. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 195–218.
4. Leibovich S. Vortex stability and breakdown survey and extension // AIAA Journal. 1984. V. 22. № 9. P. 1192–1206.
5. Сычев Вик. В. Асимптотическая теория разрушения вихря // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 78–90.
6. Lessen M.R., Singh P.J., Paillet F. The stability of the trailing line vortex. Pt 1. Inviscid theory // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. Pt 4. P. 753–763.
7. Batchelor G.K. Axial flow in trailing line vortices // J. Fluid Mech. 1964. V. 20. Pt 4. P. 645–658.
8. Brown G.L., Lopez J.M. Axisymmetric vortex breakdown. Pt 2. Physical Mechanisms // J. Fluid Mech. 1990. V. 221. P. 553–576.
9. Казаков А.В. К расчету закрученных турбулентных течений вязкого теплопроводного газа с объемным подводом энергии // Теплофизика высоких температур. 1999. Т. 37. № 5. С. 758–764.
10. Казаков А.В. Устойчивость закрученного дозвукового течения вязкого теплопроводного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 50–59.
11. Казаков А.В., Курячий А.П. Влияние неоднородности температуры на устойчивость закрученного течения газа в круглой трубе // Теплофизика высоких температур. 1999. Т. 37. № 2. С. 254–259.
12. Reyna L.G., Menne S. Numerical prediction of flow in slender vortices // Comput. and Fluids. 1988. V. 16. № 3. P. 239–256.
13. Lilley D.G. Prediction of inert turbulent swirl flows // AIAA Journal. 1973. V. 11. № 7. P. 955–960.
14. Lessen M., Paillet F. The stability of a trailing line vortex. Pt 2. Viscous theory. // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. Pt. 4. P. 769–779.
15. Reynolds W.C., Hussain A.K.M.F. The mechanisms of an organized wave in turbulent shear flow. Pt 3. Theoretical models and comparisons with experiments // J. Fluid Mech. 1972. V. 54. Pt 2. P. 263–288.
16. Reau N., Tumin A. On harmonic perturbations in turbulent mixing layer // Europ. J. Mech. B / Fluids. 2002. V. 21. № 2. P. 143–155.
17. Marble F.E. Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397–446.
18. Денисенко О.В., Провоторов В.П. Исследование течений вязкого газа при умеренных числах Рейнольдса // Тр. ЦАГИ. 1985. Вып. 2269. С. 111–127.
19. Malik M.R., Orszag S.A. Efficient Computation of the Stability of Three-Dimensional Compressible Boundary Layers // AIAA Paper 1981. № 81–1277. 13 p.