МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 2005

УДК 532. 527.013.2 + 532.525.2

© 2005 г. В. Н. БЛАЖКО, С. Г. ЧЕФРАНОВ

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ ЗАКРУЧЕННОЙ СТРУИ

Показано, что для описания ядра спирального закрученного вихревого потока может быть использовано новое точное нестационарное решение уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, представляющее собой обобщение твердотельных асимптотик вихрей Бюргерса и Салливана в виде твердотельного вращения при конечной величине спиральности. Получена оценка частоты пульсаций давления, отвечающая этому вихревому нестационарному режиму, которая пропорциональна частоте твердотельного вращения ядра закрученной струи и также зависит от параметров, определяющих начальную структуру поля скорости течения. Отмечается возможность соответствия этой частоты и наблюдаемой частоты в спектре пульсаций давления, которая почти пропорциональна расходу закрученного потока жидкости в вихревых акустических излучателях.

Ключевые слова: закрученная струя, спиральность, твердотельное вращение, периодические пульсации давления, точное решение уравнений гидродинамики.

В природе имеется немало примеров реализации закрученных вихревых потоков, наблюдаемых как для интенсивных атмосферных торнадоподобных вихрей [1–3], так и в магистральных отделах сердечно-сосудистой системы [4–6]. В [1], в частности, показано, что именно для закрученных однородно винтовых вихревых режимов течения жидкости может быть установлено обобщение теоремы Гельмгольца–Рэлея о минимуме диссипации кинетической энергии, что отвечает оптимальному энергетически выгодному способу реализации соответствующих потоков жидкости в природных и искусственных транспортных системах.

При истечении закрученных струй могут наблюдаться интенсивные периодические пульсации давления и скорости потока [7–10], которые имеют важное значение для гидро- и газодинамических технических систем [11, 12], а также для перспектив развития дистанционных методов функциональной диагностики сердечно-сосудистой системы.

Существует два подхода к объяснению механизма этого явления. Во-первых, это гипотеза, основанная на представлении о прецессии вихревого ядра возникающей при истечении закрученной струи из вихревой камеры [8, 10]. Во-вторых, гипотеза о механизме пульсаций давления [13], обусловленном периодической перестройкой потока между двумя режимами течения [14]. В обоих случаях отсутствует адекватное теоретическое описание указанного нестационарного явления в сложном трехмерном вихревом закрученном потоке [10].

В настоящей работе показано, что для возникновения периодических пульсаций давления и скорости в закрученном потоке достаточно существования вихревого ядра потока, совершающего только твердотельное вращение даже в отсутствии прецессии соответствующей оси вращения. Получено новое точное нестационарное, периодическое во времени, решение уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, которое может описывать указанное выше наблюдаемое явление. Это решение имеет конечную спиральность и отвечает нестационарному обобщению известных вихрей Бюргерса и Салливана при рассмотрении их твердотельных асимптотик (для которых указанные вихри не могут обладать конечной спиральностью) в случае, когда имеется вращение системы как целого, отвечающего вращению ядра закрученного потока.

1. Точные решения. Рассмотрим для случая неограниченного осесимметричного потока уравнение неразрывности и уравнения Навье–Стокса во вращающейся с угловой скоростью $\Omega(t)$ цилиндрической системе координат, связанной с ядром неравномерно вращающейся как целое, закрученной затопленной струи

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta u_z$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{(u_\varphi+\Omega r)^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta u_r-\frac{u_r}{r^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_r u_\varphi}{r}+\dot{\Omega}r+2u_r\Omega = \nu\left(\Delta u_\varphi-\frac{u_\varphi}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,\quad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};\quad \dot{\Omega} = \frac{d}{dt}\Omega(t)$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости.

При рассмотрении нестационарных возмущений течения вблизи оси твердотельно вращающегося, с частотой Ω, ядра закрученной струи жидкости можно искать точное нестационарное решение уравнений (1) (отвечающее этим возмущениям) в виде

$$u_r = -c_0(t)r,\quad u_z = 2c_0(t)z,\quad u_\varphi = \omega(t)r,\quad p = p_0+(\omega_1 z^2+\omega_0 r^2)\rho_0/2 \tag{1.2}$$

где в отличии от заданной величины Ω, параметры $\omega(t)$ и $c_0(t)$ могут быть равны нулю в начальный момент времени $t = 0$.

При этом в (1.2) предполагается, что область изменения переменных r и z мала по сравнению с характерными масштабами струи, стационарный предел для которой может отвечать известным вихревым структурам (см. Приложение). Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к следующей системе из трех уравнений для четырех неизвестных функций $c_0(t)$, $\omega(t)$, $\omega_0(t)$ и $\omega_1(t)$

$$\frac{d}{dt}(\omega+\Omega) = 2c_0(\omega+\Omega)$$

$$\frac{d}{dt}c_0 = \omega_0+c_0^2-(\omega+\Omega)^2 \tag{1.3}$$

$$2\frac{dc_0}{dt} = -\omega_1-4c_0^2$$

Давлению как функции времени должна отвечать только одна независимая функция времени, определяемая согласно уравнению неразрывности из вида лапласиана давления $\Delta p = 2\omega_0(t) + \omega_1(t)$. Таким образом, функции ω_0 и ω_1 не являются независимыми и можно принять, что $\omega_0(t) = \varepsilon\omega_1(t)$, где ε – постоянное число, характеризующее симметрию распределения поля давления в (1.2). При этом система (1.3) приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = 2c_0 x,\quad x = \omega+\Omega$$

$$(2\varepsilon+1)\frac{dc_0}{dt} = -x^2 - c_0^2(4\varepsilon - 1) \qquad (1.4)$$

$$\omega_1 = -2\frac{dc_0}{dt} - 4c_0^2$$

Функция $x(t)$ в (1.4) описывает результирующую угловую скорость вращения жидких частиц уже относительно лабораторной системы координат (в отличие от тангенциальной скорости u_φ в (1.2)).

Рассмотрим решение системы (1.4) в случае $\varepsilon = 1$, отвечающему наиболее симметричному распределению давления в (1.2). При $\varepsilon = 1$ система (1.4) имеет инвариант

$$h = 3xc_0^2 + x^3/3 \qquad (1.5)$$

Выразим из (1.5) функцию $c_0(t)$ через $x(t)$ и подставим в первое уравнение (1.4)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[x\left(h - \frac{x^3}{3}\right)\right]^{1/2} \qquad (1.6)$$

При $x < 0$ в уравнении (1.6) надо лишь заменить x на $|x|$ и h на $|h|$. Введем новую переменную $y = x/(3h)^{1/3}$ и проинтегрируем уравнение (1.6) в виде

$$I = \int\frac{dy}{\sqrt{y(1-y^3)}} = \frac{2h^{1/3}t}{3^{2/3}} + c_1 \qquad (1.7)$$

Интеграл I выражается через эллиптический интеграл 1-го рода $F(\varphi, k)$ в виде [15, стр. 130, ф. 1.2.74(1)]

$$I = \frac{F(\varphi,k)}{3^{1/4}}, \quad 0 \le y \le 1, \quad \varphi = \arccos\frac{1 - y(1+\sqrt{3})}{1 + y(\sqrt{3}-1)}, \quad k = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \cos\frac{5\pi}{12} \qquad (1.8)$$

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \varphi = \operatorname{am} u \qquad (1.9)$$

Принимая во внимание соотношения [15] $\operatorname{cn} u = \cos(\operatorname{am} u)$, получаем из (1.7)

$$\operatorname{cn}(\tau + c_2) = \cos\varphi = \frac{1 - y(\sqrt{3}+1)}{1 + y(\sqrt{3}-1)}, \quad c_2 = c_1 3^{1/4}, \quad \tau = \frac{2h^{1/3}t}{3^{5/12}} \qquad (1.10)$$

Из (1.10) получаем для y выражение через эллиптическую функцию Якоби cn:

$$y = \frac{1 - \operatorname{cn}(\tau + c_2)}{\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)\operatorname{cn}(\tau + c_2)} \qquad (1.11)$$

Представления (1.11) и (1.5) полностью описывают решение системы (1.4) для ω, c_0 и ω_1 в следующем виде

$$\omega(t) = -\Omega(t) + (3h)^{1/3}y(t), \quad c_0(t) = \frac{h^{1/3}(1-y^3)^{1/2}}{3^{2/3}y^{1/2}}, \quad \omega_1(t) = \frac{2h^{2/3}(4y^3 - 1)}{3^{4/3}y} \qquad (1.12)$$

где y определяется из (1.11). Величина $k^2 = \cos^2 5\pi/12 \approx 0.066 \ll 1$, в силу чего в (1.11) $\operatorname{cn}(\tau + c_2) \approx \cos(\tau + c_2)$ [15]. Постоянная интегрирования c_2 в (1.11) определяется из вида h и начальных условий для $\omega(t)$, например, при $\omega(0) = c_0(0) = 0$ имеем $(3h)^{1/3} = \Omega$ и $c_2 = \pi$. При этом (1.11) запишется в виде

$$y = \frac{1+\cos\tau}{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)\cos\tau}, \quad \tau = \frac{2\Omega t}{3^{3/4}} \tag{1.13}$$

Это решение в рассматриваемом пределе малых по сравнению с радиусом струи r качественно отличается от нестационарного решения уравнений гидродинамики, полученного в работе [16] исходя из сходного с (1.2) представления для u_r и u_z. Действительно, решение (4) при $A = 0$, $c_1 = 0$ точно отвечает представлению u_z и u_r в (1.2), если в (1.2) заменить c_0 на $-c_0$. Если дополнительно в (4) работы [16] рассмотреть предел $\beta(t)r^2 \ll 1$ (положив $\gamma_1 = -\gamma_0$), то и для u_φ в [16] получается сходное с (1.2) представление $u_\varphi \approx \gamma_0\beta r/2\pi$, если положить $\omega(t) = \gamma_0\beta(t)/2\pi$. Величина γ_0 в (4) работы [16] имеет смысл циркуляции поля скорости, отвечающей компоненте завихренности вдоль оси z, а величина $(\beta(t))^{-1/2}$ радиуса экспоненциальной локализации такой завихренности по r (см. в Приложении о соответствующих локализованных вихрях при $t \to \infty$).

Различие между полученным выше решением и решением [16] связано с тем, что в [16] функция $c_0(t)$ принималась произвольно задаваемой и по ней определялась функция $\beta(t)$ или $\omega(t)$ только из уравнения, совпадающего в пределе $\beta(t)r^2 \ll 1$ с первым уравнением (1.3) (при $\Omega = 0$), т.е. без учета второго и третьего уравнений (1.3). Это соответствует случаю недоопределенности системы из трех уравнений (1.3) с четырьмя неизвестными, когда формально можно выразить ω, ω_0 и ω_1 через c_0.

Важной отличительной особенностью полученного решения (1.12) является его периодичность во времени, связанная с периодичностью эллиптической функции Якоби $\mathrm{cn}(\tau + c_2)$, имеющей период $4K(k)$, где

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Для приведенного значения k $K(k) \approx 1.597$, а величина периода T при этом определяется из условия

$$\begin{aligned} &\mathrm{cn}(2h^{1/3}(t+T)/3^{5/12}+c_2) = \mathrm{cn}(2h^{1/3}t/3^{5/12}+c_2+4K(k)) \\ &T = 2K(k)3^{5/12}/h^{1/3} \end{aligned} \tag{1.14}$$

В частности, если в начальный момент времени принять, что $\omega(0) = c_0(0) = 0$, то согласно (1.5) и (1.14) получаем $T = 2K(k)3^{3/4}/\Omega \approx 7.28/\Omega$. При этом очевидно, что для $\Omega \to 0$ решение с такими начальными данными уже не будет обладать конечным периодом.

Таким образом, при отмеченных начальных условиях частота ритмических пульсаций давления и скорости закрученного потока оказывается пропорциональной величине частоты Ω твердотельного вращения вихревого ядра струи. Этот вывод отчасти согласуется и с представлением о механизме вихревой пульсации давления, развиваемой в [8]. При этом имеется и качественное соответствие с данными экспериментов [8–10], свидетельствующими о наличии пропорциональности между величиной расхода жидкости и величиной доминирующей частоты.

2. Сопоставление с экспериментом. В работе [10] экспериментально исследовались периодические пульсации давления, возникающие при истечении затопленной закрученной струи в открытое пространство. Обнаружено, что доминирующая частота f в спектре пульсаций давления изменяется почти пропорционально расходу в виде $f_{\exp} = b(V - \upsilon_0)$, где V – тангенциальная скорость втекания воздуха (через щелевые каналы) в вихревую камеру радиуса R и длины L, а b и υ_0 – определяемые из эксперимента эмпирические параметры, зависящие от величины радиуса r выходного сопла спрофилированного в виде суживающегося конфузора длиной $\lambda = 10$ мм. Согласно фиг. 3 в [10] $v_0 \approx 2.5$ м/с при $r/R = 2/7$ и $v_0 = 5$ м/с при $r = 1/2, 5/7, 1$. В эксперименте [10] величина V изменялась от 6.2 до 62 м/с при постоянной величине $R \approx 14$ мм. Сравним $f_{\exp}$ из [10] и $f = 1/T$ для полученного выше представления (1.14) периода T пульсаций поля скорости и давления. Из (1.14) для угловой скорости $2\pi f$ имеем

$$2\pi f = 0.863(\Omega + \omega(0))\left[1 + \frac{9}{4}\frac{\gamma^2}{s^2}\right]^{1/3}$$

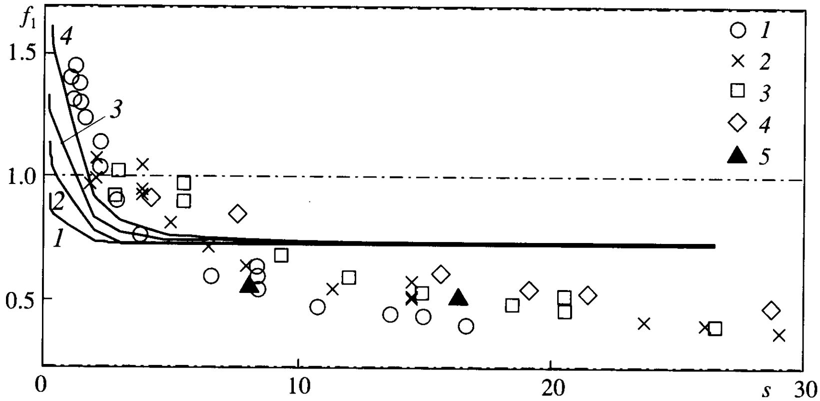
$$\Omega = \text{const}, \quad \gamma = \frac{r}{\lambda}, \quad s = \frac{(\omega(0) + \Omega)r}{2c_0(0)\lambda} \tag{2.1}$$

$$\frac{\pi}{K(k)3^{3/4}} \approx 0.863, \quad k^2 = 0.066$$

Представление для f в виде (2.1) уже позволяет дать интерпретацию эмпирическому параметру v_0 из [10]. Действительно, в (2.1) при $\omega(0) = -|\omega(0)|$ величина $f \to 0$ для $\Omega \to |\omega(0)|$ также, как $f_{\exp}$ при $V \to v_0$. Величины $\omega(0)$ в (2.1) вполне могут быть отрицательными, например, из-за наличия вязкого трения потока о стенки сопла, что допускает развитие диссипативно-центробежной неустойчивости [17], приводящей к возникновению именно антициклонической циркуляции (имеющей направление вращения противоположное направлению вращения Ω ядра потока на выходе из сопла). При этом Ω может быть связана с величиной V из [10] соотношением $V = \Omega r^2/R$, следующим из закона сохранения момента количества движения. Соответственно, v_0 тоже можно представить в виде $v_0 \approx |\omega(0)|r^2/R$. Например, при $r/R = 1/2$ согласно [10] $v_0 \approx 5$ м/с величина $|\omega(0)|/\Omega \approx 1/6$ для $V \approx 30$ м/с. В [10] на фиг. 6, *а* приведена, определяемая экспериментально, зависимость величины $Y = 2\pi br^2/R$ от параметра закрутки s, представляющего в [10], как и в (2.1), отношение вращательной компоненты скорости на радиусе сопла к средней осевой скорости через сопло. Поскольку можно с учетом отмеченных выше представлений для V и v_0 через Ω и $|\omega(0)|$ выразить $f_{\exp}$ в виде $f_{\exp} = br^2/R(\Omega - |\omega(0)|)$, то и для Y получаем $Y = 2\pi f_{\exp}/(\Omega - |\omega(0)|) \approx 2\pi f_{\exp}/\Omega$. В [10] действительно, отмечается, что Y приближенно (с учетом того, что $\Omega \gg |\omega(0)|$, так как $V \gg v_0$) есть отношение доминирующей частоты к частоте вращения Ω жидкости на радиусе сопла. Для сопоставления (2.1) с Y на фиг. 6, *а* в [10] введем на основе (2.1) аналогичную Y величину $f_1 = 2\pi f/\Omega$, когда, например, при $|\omega(0)|/\Omega \approx 1/6$ имеем

$$f_1 \approx 0.719\left[1 + \frac{9}{4}\frac{\gamma^2}{s^2}\right]^{1/3} \tag{2.2}$$

На фигуре приведено сопоставление зависимости f_1, от s при различных величинах γ, с полученной в [10] экспериментальной зависимостью Y от s. Имеется качественное и количественное соответствие между результатами экспериментов [8, 10] и теоретическими оценками, полученными в настоящей работе. При этом можно сделать вывод, что наблюдаемые в [10] автоколебания поля давления могут быть обусловлены не прецессией оси вращения вихревого ядра потока [8, 10], а периодическими спиральными антициклоническими (с $\omega < 0$ при $\Omega > 0$) вихревыми возмущениями вида (1.2) при (1.12) на фоне твердотельного вращения ядра потока с угловой скоростью Ω. Отметим, что только при $\Omega \neq 0$, в том числе для $\Omega = \text{const}$, согласно полученному точному решению (1.12) возможно развитие во времени таких конечных пери-



Частота автоколебаний давления f_1 из (2.2) в зависимости от параметра закрутки s: кривые *1–4* отвечают $\gamma = r/\lambda = 0.4, 0.7, 1$ и 1.4 соответственно. Экспериментальные данные [10] соответствуют точкам *1–4* для $r/R = 2/7, 1/2, 5/7, 1$, точка *5* – эксперименту [8]

одических возмущений даже для нулевых начальных возмущений с $\omega(0) = 0$ (так как при $\omega(0)$ инвариант $h = 0$ и для $\Omega = 0$ при любых t величина $\omega(t) = 0$).

Заключение. Получено новое точное нестационарное решение уравнений гидродинамики, отвечающее периодическим пульсациям поля скорости и поля давления с периодом T, который при нулевых начальных возмущениях поля скорости определяется только величиной угловой скорости Ω твердотельного вращения ядра закрученной затопленной струи. Это вихревое решение является нестационарным обобщением для твердотельных асимптотик известных стационарных вихревых структур (вихрей Бюргерса и Салливана), не обладающих в этом пределе конечной спиральностью в отличие от полученного решения. Это решение существенно уточняет также приведенное в [16] нестационарное решение. Новое периодическое решение может описывать наблюдаемые [10] периодические пульсации давления с доминирующей частотой f_{exp}, пропорциональной величине расхода закрученной затопленной струи. Действительно, угловая скорость твердотельного вращения Ω ядра закрученного потока, согласно [3], оказывается пропорциональной именно величине расхода жидкости. Сопоставление данных наблюдений о зависимости f_{exp} от степени закрученности потока s с зависимостью, следующей из полученного выражения для периода пульсации давления, иллюстрирует удовлетворительную степень соответствия развитой в настоящей работе теории с данными экспериментов [10].

Решения, полученные в [16], уже нашли применение при количественном анализе закрученной структуры потока крови в сердце и аорте [4–6]. В этой связи представляет интерес развитие сходного анализа с учетом полученных в настоящей работе новых нестационарных, периодических, спиральных вихревых решений уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, которые качественно уточняют решение работы [16] в пределе $r \to 0$.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований президиума РАН "Фундаментальные науки – медицине".

Приложение. В классической гидродинамике известны [18, стр. 343–345] следующие стационарные вихревые режимы, отвечающие точным стационарным решениям уравнений гидродинамики в виде вихря Бюргерса (П.1) ([18, стр. 343]) и вихря Салливана (П.2)

$$u_z = 2c_s z; \quad u_r = -c_s r$$

$$u_\varphi = \frac{\chi}{4\pi r}(1-\exp(-r^2/r_0^2)) \approx \begin{cases} \chi/2\pi r, & r \gg r_0 \\ \chi c_s r/4\pi\nu, & r \ll r_0 \end{cases} \tag{П.1}$$

$$\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r u_\varphi = \frac{\chi}{2\pi r_0^2}\exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

$$\psi = c_s r^2 z, \quad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

$$u_z = 2zc_{1s}(1-3\exp(-r^2/r_1^2)) \approx \begin{cases} 2zc_{1s}, & r \gg r_1 \\ -4zc_{1s}, & r \ll r_1 \end{cases}$$

$$u_r = -r\left(c_{1s} - \frac{6\nu}{r^2}(1-\exp(-r^2/r_1^2))\right) \approx \begin{cases} -rc_{1s}, & r \gg r_1 \\ 2c_{1s}r, & r \ll r_1 \end{cases}$$

$$u_\varphi = \frac{1}{r}\int dr r\omega_z \approx \begin{cases} c_p/r, & r \gg r_1 \\ c_p r/2, & r \ll r_1 \end{cases} \tag{П.2}$$

$$\omega_z \approx c_p \exp\left(\frac{1}{\nu}\int\frac{dru_r}{r}\right)$$

$$\psi = zr^2\left(\frac{c_{1s}}{2} - \frac{6\nu}{r^2(1-\exp(-r^2/r_1^2))}\right), \quad r_0^2 = \frac{2\nu}{c_s}, \quad r_1^2 = \frac{2\nu}{c_{1s}}$$

где $c_{1s} = \text{const}$, $c_s = \text{const}$, $c_p = \text{const}$, ω_z – вертикальная компонента завихренности ($\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$). Для вихря Бюргерса из (П.1) только в пределе $r \ll r_0$ получается асимптотика, отвечающая твердотельному вращению с частотой $\chi c_s/4\pi\nu$. Эта частота может оставаться конечной в пределе $c_s \to 0$ (так как только в этом пределе решение (П.1) для $r \ll r_0$ является точным решением системы (1.1) (или (1.3) для $\Omega = 0$)) при $\omega = \chi c_s/4\pi\nu = \omega_0$ и $\omega_1 = 0$) только при одновременном выполнении предела $\chi/\nu \to \infty$, например, для $\nu \to 0$, когда величина r_0 остается конечной при $c_s \to 0$ и $\nu \to 0$.

Для вихря Салливана можно провести аналогичное рассмотрение. При этом предел $r \ll r_1$ отвечает твердотельному вращению вихревого ядра с частотой $c_p/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чефранов А.С., Чефранов С.Г.* Экстремумы кинетической энергии и скорости ее диссипации в гидромеханике закрученных потоков // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 5. С. 624–628.
2. *Чефранов С.Г.* О масштабно-инвариантном критерии подобия для закрученных потоков при лабораторном моделировании торнадо подобных вихрей // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана 2003. Т. 39. № 6. С. 760–765.
3. *Чефранов С.Г.* Генерация спиральности в однородно-винтовых вихревых потоках // ЖЭТФ. 2004. Т. 126. Вып. 5(11). С. 1133–1145.
4. *Кикнадзе Г.И., Олейников В.Г., Городков А.Ю., Гачечиладзе И.А., Доброва Н.Б., Бакей Ш., Бара Ж.-Л.* О структуре потока в левом желудочке сердца и аорте на основании точных решений нестационарных уравнений гидродинамики и морфометрических исследований // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 1. С. 119–122.

5. *Gorodkov A., Dobrova N.B.,. Dubernard J.-Ph., Kiknadze G.I., Barat J.L., Baquey Ch.* Anatomical structures determing blood flow in the heart left ventricle // J. Material Sci.: Materials Med., 1996. V. 7. P. 153–160.
6. *Городков А.Ю.* Количественный анализ структурной организации пульсирующего потока крови в левом желудочке сердца и аорте // Дис. на соиск. учен. степени докт. биол. наук. М.: МГУ, 2004.
7. *Vonnequt B.A.* A vortex whistle // J. Acoust. Soc. Amer., 1954. V. 26. № 1. P. 18–20.
8. *Chanand R.C.* Experiments concerming the vortex whistle // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. V. 35. № 3. P. 953–960.
9. *Кныш Ю.А., Лукачев С.В.* Экспериментальное исследование вихревого генератора звука // Акуст. ж., 1977. Т. 23. Вып. 5. С. 766–782.
10. *Ахметов Д.Г., Никулин В.В., Петров В.М.* Экспериментальное исследование автоколебаний, возникающих при истечении закрученной струи // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 3. С. 60–68.
11. *Киясбейли А.Ш., Перельштейн М.Е.* Вихревые счетчики-расходометры // М.: Машиностроение. 1974. 164 с.
12. *Курзин В.Б.* Низкочастотные собственные акустические колебания в проточной части гидротурбин // ПМТФ. 1993. № 2. С. 96–105.
13. *Полянский А.С., Скурин Л.И.* К определению частоты звука, генерируемого вихревой камерой // Акуст. ж., 1993. Т. 39. Вып. 6. С. 1117–1122.
14. *Гольдштик М.А.* Вариационная модель турбулентного вращающегося потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 22–32.
15. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды // М., Наука. 1981. 662 с.
16. *Кикнадзе Г.И., Краснов Ю.К.* Эволюция смерчеобразных течений вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 6. С. 1315–1319.
17. *Чефранов С.Г.* Диссипативно-центробежная неустойчивость и циклон-антициклонная асимметрия вихрей Росби // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. С. 312–315.
18. *Бэтчелор Дж.* Введение в гидродинамику жидкости // М.: Мир. 1973. 758 с.

Москва,
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН.
Пущино,
Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН.
e-mail: schefranov@mail.ru

Поступила в редакцию
21.XII.2004