

УДК 532.525.5:517.955.8

© 2005 г. В. И. ЖУК, И. Г. ПРОЦЕНКО

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ИСПУСКАЕМОЙ ВДОЛЬ СТЕНКИ СТРУИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается линейная и слабо нелинейная теория устойчивости ламинарной пристеночной струи вязкой жидкости. При больших числах Рейнольдса (определенных по характерной длине струи) невозмущенное стационарное движение жидкости сосредоточено в узкой прилегающей к твердой поверхности области. Нестационарные возмущения этого движения описываются уравнениями, аналогичными уравнениям теории свободного взаимодействия пограничного слоя. Возможность такого описания связана с введением асимптотических порядковых соотношений между числом Рейнольдса, амплитудами и длинами волн возмущений. Дисперсионное соотношение линейной задачи устойчивости среди множества своих решений содержит собственные значения фазовых скоростей и волновых чисел, отвечающие нейтральным, а также неустойчивым модам возмущений. Для конечных амплитуд пульсаций эволюция волновых полей подчиняется уравнению Кортевега-де Вриза.

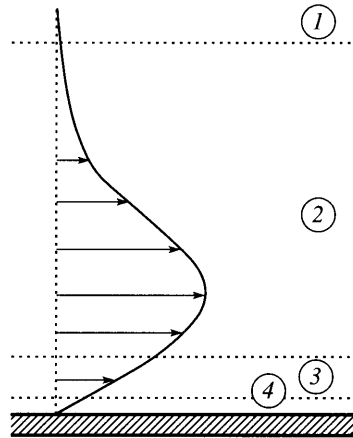
Ключевые слова: устойчивость, асимптотика, нейтральная кривая, волна Толлмина – Шлихтинга, уравнение Кортевега-де Вриза, кноидальная волна, солитон.

1. Постановка задачи. Теория свободного взаимодействия [1–5] в ее нестационарном варианте [6, 7] оказалась применимой к задачам теории гидродинамической устойчивости, поскольку она правильно описывает асимптотическую структуру волн Толлмина – Шлихтинга в пределе больших чисел Рейнольдса [7–9].

Остановимся на одной из модификаций теории свободного взаимодействия для исследования особенностей возмущенного движения в плоской струе несжимаемой вязкой жидкости, распространяющейся вдоль твердой стенки. Пусть исходный стационарный двумерный поток в каком-нибудь фиксированном сечении струи $x^* = L_\infty^*$ обладает распределением тангенциальной составляющей скорости $u^* = U_\infty^* U_0(Y_m)$ таким, как на фиг. 1. Здесь и ниже звездочками в качестве верхнего индекса помечены размерные величины. Обозначим через ρ_∞^* и μ_∞^* плотность и коэффициент вязкости несжимаемой жидкости. Предположим, что задающая масштаб скорости постоянная U_∞^* и характерная длина L_∞^* потока по совмещенной с твердой стенкой оси x^* декартовой системы $\{x^*, y^*\}$ таковы, что число Рейнольдса $Re = \rho_\infty^* U_\infty^* L_\infty^* / \mu_\infty^* \rightarrow \infty$. В качестве постоянной U_∞^* может быть взята, например, максимальная скорость в сечении струи $x^* = L_\infty^*$.

Если стационарное течение в струе имеет вязкую природу (несмотря на большие значения числа Рейнольдса), то баланс главных членов в уравнениях Навье – Стокса дает оценку $Re^{-1/2} L_\infty^*$ толщины струи по поперечной координате y^* . Следовательно, аргументом функции U_0 , задающей профиль продольной скорости в струе, является переменная

$$Y_m = Re^{1/2} y^* / L_\infty^* \quad (1.1)$$



Фиг. 1. Многоярусная схема возмущенного поля скоростей

При этом в отличие от теории пограничного слоя Прандтля скорость U_0 обращается в нуль не только на стенке, но и на внешнем крае струи:

$$U_0(Y_m) \rightarrow 0, \quad Y_m \rightarrow +\infty, \quad U_0(Y_m) = \lambda_1 Y_m + 1/2 \lambda_2 Y_m^2 + \dots, \quad Y_m \rightarrow +0 \quad (1.2)$$

Поток несжимаемой жидкости с профилем скорости (фиг. 1), характерным для струи, ограниченной снизу плоским экраном, может рассматриваться как комбинация пограничного слоя (в пристеночной части струи) и слоя сдвига (во внешней части струи). Из-за наличия точки перегиба на профиле скорости внешняя зона струи подвержена невязкой неустойчивости типа Кельвина – Гельмгольца. Одновременно во внутренней зоне струи имеет место восприимчивость по отношению к возмущениям, порождающим вязкую неустойчивость типа волн Толлмина – Шлихтинга. Настоящее исследование посвящено второму типу неустойчивых мод, при этом внешняя зона невозмущенного потока в струе, принципиально отличающаяся от пограничного слоя, делает поведение и спектр внутренних волн достаточно своеобразным. В частности, как показано ниже, наряду с волнами Толлмина – Шлихтинга, свойственными для пограничного слоя несжимаемой жидкости и дозвукового потока, существуют собственные функции задачи о линейных возмущениях в струе, которые аналогичны возникающим в пограничном слое сверхзвукового потока и описывают предотрывные области. Существование сразу нескольких форм внутренних волн в течениях струйного типа является достаточно неожиданным обстоятельством. Переход в асимптотической теории возмущений на нелинейный уровень приводит к решениям в форме солитонов уравнения Кортевега-де Вриза. В связи с этим заметим, что для течений в пограничных слоях известны [7] режимы распространения возмущений, подчиняющиеся уравнениям Бюргера (сверхзвуковой случай) и уравнению Бенджамина – Оно (дозвуковой случай).

Развиваемая ниже теория рассматривает коротковолновые возмущения, т.е. характерные пространственные масштабы $\Lambda = (x^* - L_\infty^*) L_\infty^{*-1}$ удовлетворяют неравенству $\Lambda \ll 1$. На таких масштабах Λ входящие в (1.2) коэффициенты λ_1, λ_2 можно считать не зависящими от продольной координаты x^* константами. Из уравнений для возмущений указанные константы λ_1, λ_2 исключаются групповыми преобразованиями переменных. В этом смысле устанавливаемые ниже качественные свойства воз-

мушечного течения в пристеночной струе универсальны и не зависят от конкретной функции, задающей невозмущенный профиль продольной скорости на фиг. 1.

Интерес к течениям вида (1.2) не ограничивается двумерным случаем, реализующимся, например, в задачах о движении жидкости около подогреваемой вертикальной пластины [10] или об отрыве плоской струи [11]. Возможность разложить вектор скорости на компоненты в направлении внешней линии тока и ортогональную к ней в трехмерных пограничных слоях на вращающемся диске [12] и скользящем крыле [13] приводит к профилям скорости поперечного течения такого же типа, близким в качественном отношении к семейству профилей Фолкнера – Скэн – Кука [14]. Среди различных механизмов развития возмущений в таких течениях [15] обращает на себя внимание так называемая абсолютная неустойчивость [16]. Что касается двумерных вторичных структур в плоской пристеночной струе, то их роль в различных сценариях эволюции неустойчивостей по-прежнему служит предметом интенсивных исследований [17, 18].

Рассматривая переднюю и заднюю кромки ориентированной вертикально нагретой пластины в качестве разрывов граничных условий, вносящих возмущения в прилегающий к пластине тонкий слой конвективного движения, асимптотическую картину поля потока удастся построить при больших значениях чисел Рейнольдса и Грасгофа [19]. В задачах о взаимодействии двух пристеночных струй [11], о струйном течении в окрестности точки излома стенки [20], а также вблизи расположенного на стенке препятствия [21] асимптотическая теория формулируется в терминах трехпалубной модели возмущенного поля скоростей. Нестационарные процессы, развивающиеся под действием вносимых в струю возмущений [22], при определенных предположениях также могут изучаться на основе упомянутой трехпалубной асимптотической теории [23].

Отличительной особенностью асимптотических подходов [11, 19–21, 23] является выделение в поле потока так называемой области свободного взаимодействия [1–5], описание которой сводится к системе уравнений пограничного слоя с неизвестным заранее градиентом давления. Сама область взаимодействия состоит из нескольких расположенных друг над другом подслоев (палуб). В формировании структуры возмущений в плоской пристеночной струе несжимаемой жидкости основную роль играет подобласть 2, где влияние вязкости мало, а управляющие уравнения линейны, и нелинейная подобласть 3, которая в анализе [11, 19–21, 23] совпадает с вязкой подобластью 4 (фиг. 1). Деформация струек тока в основной толще струи порождает соприкасающуюся с верхним краем струи слабо возмущенную подобласть 1 на фиг. 1; последняя не оказывает обратного влияния на подобласти 2, 3 (и часто не рассматривается в струйных течениях со взаимодействием).

Флуктуационные поля с несколько иными пространственно-временными характеристиками и сравнительно большими амплитудами поддаются описанию в рамках четырехпалубной теории свободного взаимодействия [24, 25]. Именно такая схема течения изображена на фиг. 1.

2. Класс нелинейных возмущений с трехъярусной структурой. Следуя [11, 23], зададим компоненты u^* , v^* вектора скорости и давление p^* в основной толще струи (область 2 на фиг. 1) в виде асимптотических последовательностей

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = U_0(Y_m) + \text{Re}^{-1/7} u_{1m}(T, X, Y_m) + \text{Re}^{-2/7} u_{2m}(T, X, Y_m) + \dots$$

$$\frac{v^*}{U_\infty^*} = \text{Re}^{-3/14} v_{1m}(T, X, Y_m) + \text{Re}^{-5/14} v_{2m}(T, X, Y_m) + \dots$$
(2.1)

$$\frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \text{Re}^{-2/7} p_{1m}(T, X, Y_m) + \text{Re}^{-3/7} p_{2m}(T, X, Y_m) + \dots$$

$$T = \text{Re}^{2/7} \frac{U_\infty^*}{L_\infty^*} t^*, \quad T = \text{Re}^{3/7} \frac{x^* - L_\infty^*}{L_\infty^*}, \quad Y_m = \text{Re}^{1/2} \frac{y^*}{L_\infty^*} \quad (2.2)$$

Здесь через p^* обозначено давление вдали от верхнего края струи.

Функция $U_0 = U_0(Y_m)$ – профиль невозмущенной продольной скорости со свойствами (1.2) – полагается не зависящей от переменной X , поскольку возмущения исходного стационарного ламинарного потока (порядок малости которых определяется отрицательными степенями числа Рейнольдса $\text{Re} \rightarrow \infty$) содержат в соответствии с (2.1) в качестве своих аргументов быстрые переменные (2.2). Протяженность по координате x^* области $X = O(1)$ составляет $(x^* - L_\infty^*) L_\infty^{*-1} = O(\text{Re}^{-3/7})$; на таких коротких масштабах длины непараллельность линий тока в исходном течении незначительна.

В результате подстановки (2.1), (2.2) в систему уравнений Навье – Стокса имеем для главных членов

$$U_0 \frac{\partial u_{1m}}{\partial X} + v_{1m} \frac{dU_0}{dY_m} = 0, \quad U_0 \frac{\partial v_{1m}}{\partial X} = -\frac{\partial p_{1m}}{\partial Y_m}, \quad \frac{\partial u_{1m}}{\partial X} + \frac{\partial v_{1m}}{\partial Y_m} = 0 \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.3) допускает интегрирование

$$u_{1m} = A_1(T, X) \frac{dU_0}{dY_m}, \quad v_{1m} = -\frac{\partial A_1}{\partial X} U_0(Y_m)$$

$$p_{1m} = \frac{\partial A_1^2}{\partial X^2} \int_0^{Y_m} U_0^2(Y'_m) dY'_m + P_1(T, X) \quad (2.4)$$

Здесь $A_1(T, X)$ и $P_1(T, X)$ – произвольные функции. Чтобы удовлетворить условиям затухания возмущений на выходе из струи: $[u_{1m}, v_{1m}, p_{1m}] \rightarrow 0$ ($Y_m \rightarrow +\infty$) – в случае функции U_0 , подчиняющейся первому условию (1.2), достаточно положить

$$P_1(T, X) = -\Delta \frac{\partial A_1^2}{\partial X^2}, \quad \Delta = \int_0^\infty U_0^2(Y_m) dY_m \quad (2.5)$$

Таким образом, требование затухания возмущений на верхней границе ($Y_m \rightarrow +\infty$) области 2 устанавливает линейную связь между избыточным давлением p_{1m} и кривизной линий тока (которая пропорциональна $\partial^2 A_1 / \partial X^2$) внутри названной области.

В окрестности стенки ($Y_m \rightarrow +0$) предельный вид разложений (2.1), (2.4), (2.5) следует из второго условия (1.2)

$$u_{1m} = \lambda_1 Y_m + \text{Re}^{-1/7} \lambda_1 A_1 + \dots, \quad v_{1m} = -\text{Re}^{-3/14} \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} Y_m + \dots, \quad p_1 = -\text{Re}^{-2/7} \Delta \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} + \dots \quad (2.6)$$

Поле скоростей в области 2 является завихренным, но фактор вязкости, как видно из уравнений (2.3), в первом приближении не проявляется. В силу этого невозможно удовлетворить условию $u_{1m} = 0$ на стенке $Y_m = 0$ посредством решений (2.1), (2.4), (2.5).

В формировании потока в донной части области 2 доминирующую роль играют вязкие и нелинейные эффекты. Назовем тонкий пристеночный подслой, где пред-

ставление (2.1) теряет силу, областью 3 (фиг. 1). Толщина области 3 может быть определена, например, из того, что в разложении (2.6) первые два члена асимптотики функции u_{1m} становятся одного порядка для $Y_m = O(\text{Re}^{-1/7})$. Вводя новую вертикальную координату $Y_l = \text{Re}^{9/14} y^* / L_\infty^*$, из (1.1) получаем $Y_m = \text{Re}^{-1/7} Y_l$.

Отсюда условие $Y_l = O(1)$ устанавливает вертикальный масштаб области 3, в которой вместо (2.1) решение следует искать в асимптотической форме

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = \text{Re}^{-1/7} u_{1l}(T, X, Y_l) + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \text{Re}^{-5/14} v_{1l}(T, X, Y_l) + \dots, \tag{2.7}$$

$$\frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \text{Re}^{-2/7} p_{1l}(T, X, Y_l) + \dots$$

Внося искомые функции (2.7) в систему уравнений Навье – Стокса, находим

$$\frac{\partial u_{1l}}{\partial T} + u_{1l} \frac{\partial u_{1l}}{\partial X} + v_{1l} \frac{\partial u_{1l}}{\partial Y_l} = -\frac{\partial p_{1l}}{\partial X} + \frac{\partial^2 u_{1l}}{\partial Y_l^2}, \quad \frac{\partial p_{1l}}{\partial Y_l} = 0, \quad \frac{\partial u_{1l}}{\partial X} + \frac{\partial v_{1l}}{\partial Y_l} = 0 \tag{2.8}$$

Асимптотики (2.6), верные при $Y_m \rightarrow +0$ и переписанные в переменной Y_l с помощью соотношения $Y_m = \text{Re}^{-1/7} Y_l$, служат условиями сращивания разложений (2.1) и (2.7) при $Y_l \rightarrow +\infty$ (на нижнем крае области 2 и верхнем крае области 3). В частности, упомянутые условия и второе уравнение из системы (2.8) дают

$$p_{1l} = P_1(T, X); \quad Y_l \rightarrow +\infty: u_{1l} \rightarrow \lambda_1 Y_l + \lambda_1 A_1(T, X) \tag{2.9}$$

Здесь функция $P_1(T, X)$ определена посредством (2.5). К требованиям сращивания (2.9) необходимо добавить очевидные равенства (прилипание жидких частиц на твердой стенке)

$$Y_l = 0: u_{1l} = v_{1l} = 0 \tag{2.10}$$

Несущественные постоянные Δ и λ_1 исключаются из (2.5), (2.9) в результате растяжения зависимых и независимых переменных

$$t = \Delta^{-2/7} \lambda_1^{8/7} T, \quad x = \Delta^{-3/7} \lambda_1^{5/7} X, \quad y = \Delta^{-1/7} \lambda_1^{4/7} Y_l, \quad A = \Delta^{-1/7} \lambda_1^{4/7} A_1 \tag{2.11}$$

$$u = \Delta^{-1/7} \lambda_1^{-3/7} u_{1l}, \quad v = \Delta^{1/7} \lambda_1^{-4/7} v_{1l}, \quad p = \Delta^{-2/7} \lambda_1^{-6/7} p_{1l}$$

По отношению к замене (2.11) система уравнений (2.8) инвариантна. Присоединяя к уравнениям (2.8) условия (2.9), (2.10), получим в новых переменных (2.11) краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.12}$$

$$p = -\frac{\partial^2 A(t, x)}{\partial x^2}; \quad y \rightarrow +\infty: u \rightarrow y + A(t, x); \quad y = 0: u = v = 0$$

В задаче (2.12) уравнения формально совпадают с уравнениями Прандтля. Однако в отличие от классической теории пограничного слоя Прандтля давление $p(t, x)$, как и функция $A(t, x)$ подлежат определению, а не вычисляются заранее из решения внешней (по отношению к области 3) задачи обтекания. Фигурирующая в (2.12) дифференциальная связь между (неизвестными) функциями $p(t, x)$ и $A(t, x)$ является след-

ствием взаимодействия возмущений в основной толще струи 2 и в ее пристеночной части 3.

3. Линейное приближение для возмущений с трехъярусной структурой. Будем искать решение системы (2.12) в виде свободных колебаний вязкой жидкости

$$u = y - a \frac{df}{dy} e^{i\omega t + ikx}, \quad v = iakf(y) e^{i\omega t + ikx}, \quad p = ae^{i\omega t + ikx} \quad (3.1)$$

Второе и третье уравнения системы (2.12) удовлетворяются тождественно этим решением, в то время как в результате линеаризации первого уравнения по амплитуде $a \rightarrow 0$ возмущений возникает дифференциальное уравнение

$$\frac{d^3 f}{dy^3} - i(\omega + kx) \frac{df}{dy} + ikf + ik = 0 \quad (3.2)$$

Граничные условия из (2.12) дают

$$y = 0: f = \frac{df}{dy} = 0; \quad y \rightarrow +\infty: \frac{df}{dy} \rightarrow -\frac{1}{k^2} \quad (3.3)$$

Краевая задача (3.2), (3.3) – задача на собственные значения.

Проведем на комплексной плоскости k разрез вдоль положительной мнимой полуоси и положим $-\pi/2 < \arg k < \pi/2$. Тем самым выделяется однозначная ветвь функции $k^{1/3}$ в выражении

$$Z = i^{1/3} \frac{\omega}{k^{2/3}} + i^{1/3} k^{1/3} y \quad (3.4)$$

Переход от y к новой независимой переменной Z посредством (3.4) сводит уравнение (3.2), предварительно продифференцированное по y , к уравнению Эйри

$$\frac{d^4 f}{dZ^4} - Z \frac{d^2 f}{dZ^2} = 0 \quad (3.5)$$

относительно второй производной $d^2 f/dZ^2$. Общее решение уравнения Эйри [26, 27] представим как линейную комбинацию с коэффициентами r_0 и q_0 следующих функций:

$$\frac{d^2 f}{dZ^2} = r_0 \text{Ai}(Z) + g_0 \text{Bi}(Z) \quad (3.6)$$

$$\text{Bi}(Z) = e^{i\pi/6} \text{Ai}(e^{2i\pi/3} Z) + e^{-i\pi/6} \text{Ai}(e^{-2i\pi/3} Z) \quad (3.7)$$

Здесь $\text{Ai}(Z)$ – функция Эйри [26], а $\text{Bi}(Z)$ – второе линейно независимое решение [27] уравнения Эйри.

Применим асимптотическое разложение функции Эйри [26]

$$\text{Ai}(Z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-2/3 Z^{3/2}} \left[Z^{1/4} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n Z^{-3/2n - 1/4} \right], \quad Z \rightarrow \infty, \quad \arg Z \in (-\pi, \pi) \quad (3.8)$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)! 72^n} \prod_{s=1}^{3n} (2s - 1), \quad n \geq 1$$

для исследования обеих базисных функций в линейной комбинации (3.6) на бесконечности. Условие $-\pi/2 < \arg k < \pi/2$ равносильно условию $-\pi/3 < \arg(i^{1/3} k^{1/3} y) < \pi/3$, так как y действительно. Поэтому при $|Z| \rightarrow \infty$ аргумент переменной Z в (3.4) также

принадлежит $(-\pi/3, \pi/3)$. Вдоль любого луча, лежащего в секторе $(-\pi/3, \pi/3)$, функция Эйри $Ai(Z)$ экспоненциально затухает, а функция $Bi(Z)$ экспоненциально растет. Следовательно, асимптотическое предельное условие при $y \rightarrow +\infty$ в задаче (3.3) может удовлетворено лишь в случае $q_0 = 0$.

Поскольку условия при $y = 0$ в (3.3) эквивалентны условиям

$$f(\zeta) = \frac{df(\zeta)}{dZ} = 0, \quad \zeta = i^{1/3} \frac{\omega}{k^{2/3}} \tag{3.9}$$

решение для самой функции f из (3.6) приобретает вид

$$f = r_0 \int_{\zeta}^Z dZ' \int_{\zeta}^{Z'} Ai(Z'') dZ'' \tag{3.10}$$

С другой стороны, уравнение (3.2) само становится краевым условием для уравнения (3.5):

$$\frac{d^3 f(\zeta)}{dZ^3} = -1 \tag{3.11}$$

Подстановка формулы (3.10) в равенство (3.11) дает значение постоянной $r_0 = -[dAi(\zeta)/dZ]^{-1}$, что приводит к выражению

$$f = -\left[\frac{dAi(\zeta)}{dZ}\right]^{-1} \int_{\zeta}^Z dZ' \int_{\zeta}^{Z'} Ai(Z'') dZ'' \tag{3.12}$$

Используем теперь условие при $y \rightarrow +\infty$ в (3.3), т.е.

$$\frac{df}{dZ} \rightarrow -\frac{1}{i^{1/3} k^{7/3}}, \quad Z \rightarrow \infty, \quad \arg Z \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \tag{3.13}$$

Дифференцируя выражение (3.12) по Z и переходя в нем к пределу $Z \rightarrow \infty$, с учетом (3.13) выводим дисперсионное соотношение

$$\frac{dAi(\zeta)}{dZ} \left[\int_{\zeta}^{\infty} Ai(Z) dZ \right]^{-1} = i^{1/3} k^{7/3} \tag{3.14}$$

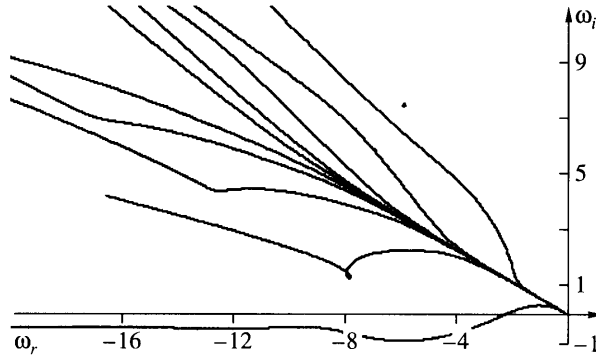
связывающее частоту свободных колебаний ω с волновым числом k .

Решения дисперсионного соотношения (3.14) являются собственными значениями ω и k , а соответствующие собственные функции задаются (3.12).

4. Некоторые решения дисперсионного соотношения. Ответ на вопрос об устойчивости вязкого потока зависит от того, имеется ли у дисперсионного уравнения (3.14) хотя бы один корень $\omega = \omega_r + i\omega_i$ с отрицательной мнимой частью ω_i при вещественных k . Определяемые при помощи функции (3.12) возмущения (3.1) в случае вещественных k принято называть волнами Толлмина – Шлихтинга.

Развиваемый здесь асимптотический подход устанавливает предельный вид волн Толлмина–Шлихтинга, описываемых полным уравнением Орра–Зоммерфельда, для $Re \rightarrow \infty$. Условие $\omega_i = 0$ фиксирует асимптотику нижней ветви нейтральной кривой на плоскости вещественных параметров $\{Re, \alpha^\circ\}$, причем в уравнение Орра–Зоммерфельда входит волновое число α° . В силу нормировки (2.2) для продольной координаты x^* , а также вследствие растяжения в соответствии с (2.11) безразмерной величины X имеет место связь

$$\alpha^\circ = Re^{3/7} \Delta^{-3/7} \lambda_1^{5/7} k \tag{4.1}$$



Фиг. 2. Траектории дисперсионных кривых $\omega = \omega(k)$ на комплексной плоскости ω при действительных $k = k_r$.

На отрицательной вещественной полуоси – так называемой линии Стокса – асимптотическое представление (3.8) неверно. Вместо (3.8) для $Z \rightarrow -\infty$ имеем [26]

$$\text{Ai}(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|Z|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}|Z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(|Z|^{-7/4}), \quad |Z| \rightarrow \infty, \quad \arg Z = \pm\pi \quad (4.2)$$

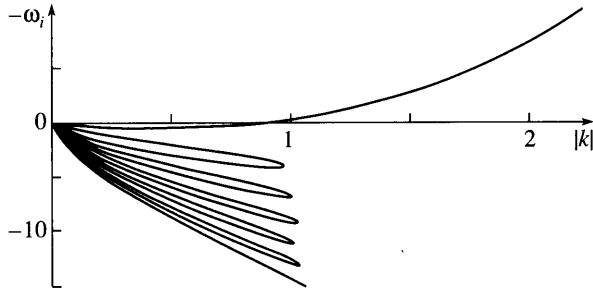
Счетное множество нулей производной функции Эйри располагается, как видно из (4.2), на линии Стокса $\arg \zeta = \pm\pi$. Нули входящего в (3.14) интеграла от функции Эйри с увеличением их номера асимптотически приближаются на комплексной плоскости ζ к линии Стокса. Данное обстоятельство сразу позволяет утверждать, что для каждого фиксированного k существует дискретный бесконечный спектр собственных значений параметра ζ , а следовательно, согласно (3.9), и дискретный бесконечный спектр собственных частот $\omega = i^{-1/3}k^{2/3}\zeta$. На фиг. 2 изображены траектории нескольких первых корней из указанного спектра, вычерчиваемые на комплексной плоскости ω , когда вещественный параметр k пробегает промежуток $[0, +\infty)$. Соответствующие траектории на комплексной плоскости ζ при малых k выходят из нулей производной функции Эйри и с ростом k стремятся к нулям интеграла из левой части (3.14).

Основной результат состоит в том, что первая траектория на плоскости ω пересекает действительную ось (фиг. 2) в точке $\omega = \omega_r = \omega_* = -2.29772$ при $k = k_* = 1.0003$. Такие значения параметров ω_* , k_* отвечают нейтральной волне Толлмина – Шлихтинга, распространяющейся вниз по потоку с фазовой скоростью $c = c_r = c_* = -\omega_* k_*^{-1} = 2.29703$. В случае $k < k_*$ имеем $-\omega_i < 0$ – движение устойчиво; в случае $k > k_*$ справедливо неравенство $-\omega_i > 0$ – движение неустойчиво.

Для получения асимптотики при $\text{Re} \rightarrow \infty$ нижней ветви нейтральной кривой на плоскости $\{\text{Re}, \alpha^\circ\}$ достаточно подставить $k = k_*$ в формулу (4.1). Аналогично асимптотика при $\text{Re} \rightarrow \infty$ нижней ветви нейтральной кривой на плоскостях $\{\text{Re}, \omega^\circ\}$ и $\{\text{Re}, c^\circ\}$ задается выражениями

$$\omega^\circ = \text{Re}^{2/7} \Delta^{-2/7} \lambda_1^{8/7} \omega_*, \quad c^\circ = \text{Re}^{-1/7} \Delta^{1/7} \lambda_1^{3/7} c_* \quad (4.3)$$

Здесь $\omega^\circ = \omega_r^\circ$ и $c^\circ = c_r^\circ$ – частота и фазовая скорость нейтральной волны в той безразмерной системе единиц, где масштабами длины, времени и скорости служат величины L_∞^* , $L_\infty^* U_\infty^{*-1}$ и U_∞^* соответственно. Формулы (4.3) выведены с учетом нормировки (2.2) и коэффициентов растяжения (2.11).



Фиг. 3. Инкремент роста $-\omega_i$ в зависимости от $|k|$ для нескольких первых волновых мод при $k = -ik_i$

Внесем собственные функции краевой задачи в формулы (3.1) для нижней, соприкасающейся со стенкой области 3 и воспользуемся (2.4), (2.5) для области 2 – основной толщи струи (фиг. 1). Тем самым построены поля возмущенного течения в струе, которые можно трактовать как внутренние волны, порождаемые взаимодействием самоиндуцированного давления в области 2 и вязких тангенциальных напряжений в области 3. Фазовая скорость возмущений c° (4.3) и скорость частиц жидкости $u^* U_\infty^{*-1}$ в области 3 (2.7) имеют один и тот же порядок $O(\text{Re}^{-1/7})$. Следовательно, внутренние волны рассмотренного типа представляют собой волны Толлмина–Шлихтинга с прилегающим к стенке критическим слоем. Эти волны аналогичны волнам Толлмина–Шлихтинга в пограничных слоях [7, 9, 28] и в течении Пуазейля [29, 30].

Хотя волновое число α° в уравнении Орра – Зоммерфельда обычно полагается чисто действительным, распространим допустимые значения α° на любые комплексные числа, тогда параметр k , связанный с α° через (4.1), также комплексный. Для стационарных возмущений (3.1) с $\omega = 0$ один из корней k дисперсионного уравнения (3.14) является чисто мнимым, поскольку в этом случае $\zeta = 0$ и левая часть (3.14) – вещественная величина.

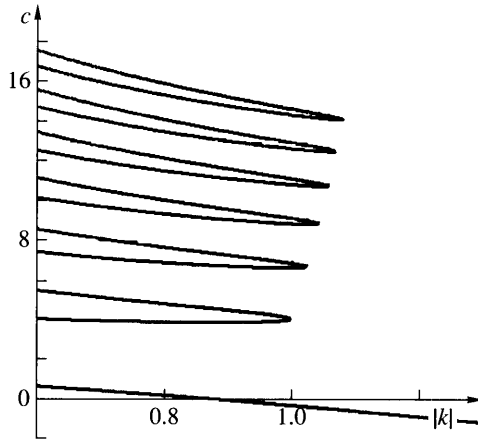
Рассмотрим класс решений $\omega = \omega(k)$, $k = k_r + ik_i$, $\omega = \omega_r + i\omega_i$ дисперсионного соотношения (3.14) такой, что $k = -i|k|$, $\omega = i\omega_i$ ($\omega_r = 0$). Поскольку $\arg k \in (-3\pi/2, \pi/2)$, то в данном классе дисперсионное соотношение приводится к виду

$$\frac{d\text{Ai}(\zeta)}{dZ} \left[\int_{-\zeta}^{\infty} \text{Ai}(Z) dZ \right]^{-1} = -|k|^{7/3}, \quad \zeta = -\frac{\omega_i}{|k|^{2/3}} \tag{4.4}$$

Полученное соотношение удобно тем, что ζ чисто действительное. Для случая чисто мнимых значений $k = -i|k|$ зависимость возмущений (3.1) от пространственной координаты и времени дается экспоненциальным множителем $\exp(-\omega_i t + |k|x) = \exp[|k|(x - ct)]$, где $c = \omega_i |k|^{-1}$. Таким образом, изучаемый класс решений отвечает бегущим с фазовыми скоростями c волнами (фиг. 3, 4).

Вычисляя производную функции Эйри в (4.4) по ее асимптотике (4.2) и используя оценки [27]

$$\int_0^\tau \text{Ai}(Z) dZ = \frac{1}{3} + O(|\tau|^{-3/4}), \quad \int_0^\tau \text{Ai}(-Z) dZ = \frac{2}{3} + O(|\tau|^{-3/4}), \quad \tau \rightarrow +\infty$$



Фиг. 4. Фазовая скорость c в зависимости от $|k|$ для нескольких первых волновых мод при $k = -ik_i$

запишем приближенно дисперсионное соотношение

$$|\zeta|^{1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|\zeta|^{2/3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\pi}|k|^{7/3} + O(|\zeta|^{-1/2}), \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad \arg \zeta = \pm\pi \quad (4.5)$$

Нули функции из левой части асимптотического равенства (4.5) достигаются в точках $\zeta^{(j)} = -|\zeta^{(j)}|$, j – целое, причем

$$|\zeta^{(j)}| = [3\pi/2(1/2 + j)]^{2/3} \quad (4.6)$$

Разумеется, формула (4.6) устанавливает асимптотику нулей производной функции Эйри из (4.4) только при достаточно больших j . Положим $\zeta = \zeta^{(j)}(1 + \varepsilon)$, тогда выражение (4.5) можно переписать в виде

$$|\zeta^{(j)}|^{1/4} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) (-1)^{j+1} \sin(\varepsilon|\zeta^{(j)}|^{3/2}) = \sqrt{\pi}|k|^{7/3} + O(|\zeta^{(j)}|^{-1/2}) \quad (4.7)$$

Левая часть данного выражения равна нулю при $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = \varepsilon_1 = \pi|\zeta^{(j)}|^{-3/2}$ и достигает экстремума при $\varepsilon = \varepsilon_1/2$. В случае нечетного j подстановка $\varepsilon = \varepsilon_1$ в выражение для $\zeta = \zeta^{(j)}(1 + \varepsilon)$ дает $|\zeta^{(j)}|(1 + \varepsilon) = |\zeta^{(j+1)}|$. Таким образом, получаем, что ветвь кривой $|k|$ как функции от $|\zeta|$ для нечетного j достигает в точке $\varepsilon = \varepsilon_1/2$ своего максимума

$$k_{\max} = \frac{|\zeta^{(j)}|^{3/28}}{\pi^{3/14}} = \left[\frac{3(j+1/2)}{2\pi^2}\right]^{1/14} \quad (4.8)$$

и переходит в ветвь для $j + 1$.

Из фиг. 4 видны качественные свойства спектра внутренних волн. Если первая мода из упомянутого спектра волн может распространяться вверх по потоку ($c < 0$) при достаточно больших $|k|$, то остальная часть спектра отвечает волнам, сносимым вниз по потоку ($c > 0$).

5. Предельный случай сильно нелинейных возмущений. Возникновение четырехярусной структуры. Обратимся к системе уравнений пограничного слоя с самоиндуцированным давлением (2.12), описывающей взаимодействие донной части пло-

ской струи (область 3 на фиг. 1) с ее основной толщей (область 2). Вводя параметр χ и преобразуя зависимые и независимые переменные

$$u = \chi^2 u_a, \quad v = \chi^5 v_a, \quad p = \chi^4 p_a, \quad A = \chi^2 A_a, \quad x = \chi^{-1} x_a, \quad y = \chi^2 y_a, \quad t = \chi^{-3} t_a \quad (5.1)$$

из (2.12) получим

$$\frac{\partial u_a}{\partial t_a} + u_a \frac{\partial u_a}{\partial x_a} + v_a \frac{\partial u_a}{\partial y_a} = -\frac{\partial p_a}{\partial x_a} + \chi^{-7} \frac{\partial^2 u_a}{\partial y_a^2}, \quad \frac{\partial p_a}{\partial y_a} = 0, \quad \frac{\partial u_a}{\partial x_a} + \frac{\partial v_a}{\partial y_a} = 0 \quad (5.2)$$

$$p_a = -\frac{\partial^2 A_a(t_a, x_a)}{\partial x_a^2}; \quad y_a \rightarrow +\infty: u_a \rightarrow y_a + A_a(t_a, x_a); \quad y_a = 0: u_a = v_a = 0$$

Неизменными остаются все соотношения (2.12), за исключением первого, в котором при $\chi \rightarrow +\infty$ появляется малый параметр при старшей производной, соответствующей вязким тангенциальным напряжениям. Отбрасывая член порядка χ^{-7} (при $\chi \rightarrow +\infty$) в названном уравнении, получим систему невязких уравнений

$$\frac{\partial u_a}{\partial t_a} + u_a \frac{\partial u_a}{\partial x_a} + v_a \frac{\partial u_a}{\partial y_a} = -\frac{\partial p_a}{\partial x_a}, \quad \frac{\partial p_a}{\partial y_a} = 0, \quad \frac{\partial u_a}{\partial x_a} + \frac{\partial v_a}{\partial y_a} = 0 \quad (5.3)$$

Выражения

$$u_a = y_a + A_a(t_a, x_a), \quad v_a = -y_a \frac{\partial A_a}{\partial x_a}, \quad p_a = -\frac{\partial^2 A_a}{\partial x_a^2} \quad (5.4)$$

удовлетворяют уравнениям тогда и только тогда, когда функция $A_a(t_a, x_a)$ является решением уравнения Кортевега-де Вриза

$$\frac{\partial A_a}{\partial t_a} + A_a \frac{\partial A_a}{\partial x_a} = \frac{\partial^3 A_a}{\partial x_a^3} \quad (5.5)$$

Решение (5.4) удовлетворяет предельному условию из (5.2) при $y_a \rightarrow +\infty$ и условию непротекания $v_a = 0$ при $y_a = 0$. Переход от уравнений (5.2) к уравнениям (5.3) ведет к потере граничного условия прилипания частиц жидкости $u_a = 0$ при $y_a = 0$ из-за понижения порядка системы. Если рассматривать выражения (5.4) как асимптотику решения системы (5.2) при $\chi \rightarrow +\infty$, то она пригодна всюду, за исключением тонкого подслоя, примыкающего к стенке $y_a = 0$ (область 4 на фиг. 1). Поскольку в данном подслое производные по вертикальной координате y_a велики, то в первом уравнении системы (5.2) член с малым параметром в качестве коэффициента должен быть сохранен.

Решение в пристеночном подслое, где существенны задаваемые членом $\partial^2 u_a / \partial y_a^2$ вязкие тангенциальные напряжения, назовем внутренним решением, в то время как невязкое решение (5.4) назовем внешним. Равенство по порядку величины вязкого и конвективных членов в первом уравнении системы (5.2) устанавливает оценку $\Delta u_a = O(\chi^{-14})$ толщины примыкающего к стенке вязкого подслоя 4. Следовательно, внутреннее решение имеет вид:

$$u_a = u_l(t_l, x_l, y_l) + \dots, \quad v_a = \chi^{-14} v_l(t_l, x_l, y_l) + \dots, \quad p_a = p_l(t_l, x_l) + \dots \quad (5.6)$$

$$t_l = t_a, \quad x_l = x_a, \quad y_l = \chi^{14} y_a$$

В помеченных нижним индексом l внутренних переменных приходим к вытекающим из (5.2) соотношениям

$$\frac{\partial u_l}{\partial t_l} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial y_l} = -\frac{\partial p_l}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial y_l^2}, \quad \frac{\partial p_l}{\partial y_l} = 0, \quad \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial y_l} = 0$$

$$p_l = -\frac{\partial^2 A_a(t_l, x_l)}{\partial x_l^2}; \quad y_l \rightarrow +\infty: u_l \rightarrow A_a(t_l, x_l); \quad y_l = 0: u_l = v_l = 0$$
(5.7)

Предельное условие при $y_l \rightarrow +\infty$ в (5.7) является главной частью переписанного во внутренних переменных внешнего решения для u_a из (5.4):

$$u_l \rightarrow \chi^{-14} y_l + A_a(t_l, x_l)$$

Как видно из (5.6), в случае больших χ внешний край $y_l \rightarrow +\infty$ пристеночного подслоя 4 отвечает нижней границе $y_a \rightarrow +0$ внешней (по отношению к зоне 4) области 3, где справедливы выражения (5.4). В системе (5.7) функция $A_a(t_l, x_l)$, как и давление $p_l(t_l, x_l)$, берутся из уравнения Кортевега-де Вриза (5.5). Поскольку решение последнего может быть найдено независимо, внешняя и внутренняя задачи разделяются, причем вязкий пристеночный подслой 4 (фиг. 1) описывается классическими уравнениями Прандтля с заданным градиентом давления.

6. Кноидальные волны. В классе функций вида

$$A_a(t_a, x_a) = \Phi_0(\xi_0), \quad \xi_0 = x_a - c_0 t_a$$
(6.1)

уравнение Кортевега-де Вриза (5.5) после однократного интегрирования сводится к уравнению

$$\frac{d^2 \Phi_0}{d\xi^2} = -c_0 \Phi_0 + \frac{\Phi_0^2}{2}$$
(6.2)

Замена

$$\Phi_0 = |c_0| \Phi(\xi), \quad \xi = |c_0|^{1/2} \xi_0$$
(6.3)

позволяет исключить c_0 из уравнения (6.2):

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} = -\Phi \operatorname{sign} c_0 + \frac{\Phi^2}{2}$$
(6.4)

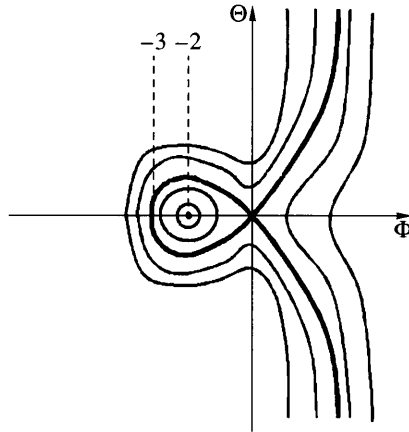
Без ограничения общности полагаем $c_0 < 0$, поскольку знак перед линейным членом в правой части (6.4) меняется на противоположный при подстановке $\Phi = \Phi_1 + 2 \operatorname{sign} c_0$. Переход к стандартной переменной Θ понижает порядок уравнения (6.4):

$$\Theta = \frac{d\Phi}{d\xi}, \quad \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} = \Theta \frac{d\Theta}{d\Phi}$$
(6.5)

$$\Phi^2 + \Phi^3/3 = \Theta^2 + K$$

На фазовой плоскости $\{\Phi, \Theta\}$ кривая (6.5) при $K = 0$ является сепаратрисой седла (фиг. 5) и соответствует уравнению

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \pm \Phi \sqrt{1 + \frac{\Phi}{3}}$$



Фиг. 5. Фазовая плоскость уравнения Кортевега-де Вриза для автомодельного типа бегущей волны

интегрирование которого в предположении $\Phi < 0$ дает солитонное (экспоненциально стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \pm\infty$) решение

$$\Phi = -3 \operatorname{ch}^{-2} [1/2(\xi - \xi_{00})] \tag{6.6}$$

Солитон уравнения Кортевега-де Вриза (5.5) получается внесением зависимостей (6.1), (6.3) в функцию (6.6) и задается выражением, включающим два параметра c_0 и x_{00} :

$$A_a = -3|c_0| \operatorname{ch}^{-2} \left[\frac{|c_0|^{1/2}}{2} (x_a + |c_0|t_a - x_{00}) \right] \tag{6.7}$$

Таким образом, амплитуда $3|c_0|$ сохраняющего свою форму и бегущего в отрицательном направлении оси x_a солитона уравнения Кортевега-де Вриза однозначно связана с его фазовой скоростью $-|c_0|$.

Обозначим $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$ корни полинома

$$\Phi^3 + 3\Phi^2 - 3K = (\Phi - \beta_1)(\Phi - \beta_2)(\Phi - \beta_3) \tag{6.8}$$

Солитон (6.6) изображается фазовой траекторией $\beta_3 < \Phi < \beta_1$ уравнения (6.4) в виде петли (фиг. 5), содержащей две сепаратрисы седловой точки $\Phi = \Theta = 0$ и отвечает кратному корню полинома (6.8): $\beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_3 = -3$. Замкнутые траектории, соответствующие $\beta_1 > 0 > \beta_2 > \beta_3$, охватывают стационарную точку типа центра $\Phi = -2, \Theta = 0$. В этом случае имеем периодические решения уравнения (6.4), неявно задаваемые эллиптическим интегралом

$$\xi - \xi_{00} = \pm \int_{\beta_3}^{\Phi} \frac{\sqrt{3}d\beta}{\sqrt{(\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2)(\beta - \beta_3)}}, \quad \beta_2 < \Phi < \beta_3 \tag{6.9}$$

Введем величины α, φ и совершим в правой части (6.9) замену переменной

$$\sin^2 \alpha = \frac{\beta_2 - \beta_3}{\beta_1 - \beta_3}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{\Phi - \beta_3}{\beta_1 - \beta_3}, \quad \beta = \beta_3 + \sqrt{\beta_2 - \beta_3} \sin^2 \theta \tag{6.10}$$

Тогда представление (6.9) периодических решений приобретает форму эллиптического интеграла первого рода

$$\xi - \xi_{00} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\beta_1 - \beta_3}} \int_{\xi_{00}}^{\xi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \quad (6.11)$$

В области изменения параметра K из (6.8) рассмотрим малую одностороннюю окрестность

$$K = 4/3 - \delta, \quad \delta \rightarrow +0 \quad (6.12)$$

Поведение корней полинома (6.8) в зависимости от δ становится более обозримым в терминах новой переменной $\Phi = -2 + \Phi_1$. Обращение в нуль выражения (6.8) имеет место в случае

$$\Phi_1^3 - 3\Phi_1^2 + 3\delta = 0, \quad \delta \rightarrow +0 \quad (6.13)$$

При малых δ наибольший корень уравнения (6.13) располагается вблизи точки $\Phi_1 = 3$, а два других корня лежат в право- и левосторонней окрестностях точки $\Phi_1 = 0$. Более точно, в предположении (6.12) из (6.13) получаем

$$\beta_1 = 1 + O(\delta), \quad \beta_2 = -2 + \sqrt{\delta} + O(\delta), \quad \beta_3 = -2 - \sqrt{\delta} + O(\delta) \quad (6.14)$$

В описывающие замкнутую фазовую траекторию уравнения (6.10), (6.11) подставим асимптотику (6.14). Поскольку из (6.10) имеем $\alpha = O(\delta^{1/4})$, то (6.11) переписывается в виде

$$\varphi = \pm 1/2(\xi - \xi_{00})[1 + O(\sqrt{\delta})]$$

Внося данное выражение во второе соотношение из (6.10), находим

$$\Phi = \frac{\beta_2 + \beta_3}{2} - \frac{\beta_2 + \beta_3}{2} \cos(\xi - \xi_{00})[1 + O(\sqrt{\delta})]$$

В силу (6.14) верны равенства $\beta_2 + \beta_3 = -4 + O(\delta)$, $\beta_2 - \beta_3 = 2\sqrt{\delta} + O(\delta)$, поэтому периодическое решение уравнения (6.14) (зависящее от двух параметров ξ_{00} и δ) имеет вид

$$\Phi = -2 - \sqrt{\delta} \cos(\xi - \xi_{00}) + O(\delta)$$

Воспользовавшись формулами (6.1), (6.3) и обозначив

$$x_0 = \xi_{00} + \pi, \quad \hbar = |c_0| \sqrt{\delta} \rightarrow 0$$

получим трехпараметрическое семейство решений уравнения Кортевега-де Вриза. Бегущая с отрицательной фазовой скоростью c_0 периодическая волна с точностью до $O(\hbar^2)$ задается выражением

$$A_a(t_a, x_a) = -2|c_0| + \hbar \cos[|c_0|^{1/2}(x_a - x_0 + |c_0|t_a)] + O(\hbar^2) \quad (6.15)$$

Пользуясь инвариантностью уравнения Кортевега-де Вриза (5.5) относительно преобразования Галилея

$$x_a \rightarrow x_a - D_0 t_a, \quad A_a \rightarrow D_0 + A_a \quad (6.16)$$

перепишем решение (6.15) в движущейся со скоростью D_0 системе координат (для $D_0 > 0$ новая система координат перемещается в отрицательном направлении оси x_a).

Групповое свойство (6.16) уравнения Кортевега-де Вриза позволяет расширить семейство решений (6.15), вводя еще один параметр, и избавиться от предположения об отрицательных фазовых скоростях c_0 . Положим в (6.16) $D_0 = k^2 + c$, где $k = |c_0|^{1/2}$ – волновое число в (6.15). Тогда, применяя (6.16) к (6.15), получим четырехпараметрическое семейство волновых решений уравнения Кортевега-де Вриза (5.5) с фазовыми скоростями c любого знака:

$$A_a(t_a, x_a) = c - k^2 + \hbar \cos[k(x_a - x_0 - ct_a)] + O(\hbar^2) \quad (6.17)$$

Как видно из (6.17), периодическое возмущение распространяется по постоянному фону $c - k^2$. Функциональная зависимость (6.10), (6.11) разрешается относительно $\Phi = \Phi(\xi)$ через специальную функцию [27], а именно эллиптический косинус Якоби (кноиду). Поэтому периодические нелинейные решения уравнения (5.5), (6.4) называются иногда кноидальными волнами [31, 32].

7. Роль вязкого пристеночного подслоя. Класс осцилляционных решений (6.17) нелинейной системы уравнений (5.3) (сводящейся к уравнению (5.5) и относящейся к области 3 на фиг. 1) естественно назвать классом внешним решений по отношению к области 4. Действительно, выражения (6.17) получены (в слабонелинейном приближении) независимо от описывающей область 4 краевой задачи (5.7). Наоборот, функции (6.17) определяют внешнее краевое условие в (5.7), необходимое для построения внутреннего решения в подслое 4. Само присутствие в потоке тонкого пристеночного подслоя 4 связано с необходимостью удовлетворить условию отсутствия скольжения $u_l = v_l = 0$ на стенке $y_l = 0$ (которому внешнее решение (5.4) с функцией (6.17) в качестве A_a не удовлетворяет).

Поскольку не только уравнение (5.5), но и система уравнений Прандтля из (5.7) обладает свойством инвариантности относительно преобразования Галилея (6.16):

$$x_a \rightarrow x_a - D_0 t_a, \quad A_a \rightarrow D_0 + A_a, \quad u_l \rightarrow D_0 + u_l \quad (7.1)$$

не умаляя общности выберем систему координат, где волна (6.17) является стационарной. Для этого применим к (5.5), (5.7) преобразования (6.16), (7.1), полагая в них $D_0 = -c$. Тогда стационарное решение системы уравнений (5.7) следует искать при граничном условии на твердой поверхности (стенка для $c > 0$ движется в отрицательном направлении оси x_a по касательной к себе) и предельном условии на внешнем крае вязкого подслоя 4

$$\begin{aligned} y_l = 0: u_l = -c, \quad v_l = 0 \\ y_l \rightarrow +\infty: u_l \rightarrow -k^2 + \frac{\hbar}{2}[e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}] + O(\hbar^2) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь и ниже $\sigma = kx_a$. Подставим в (5.7) выражения вида

$$\begin{aligned} u_l = -k^2 - \hbar \left[\frac{df}{dy_l} e^{i\sigma} + \frac{df^c}{dy_l} e^{-i\sigma} \right] \\ v_l = i\hbar k [f(y_l) e^{i\sigma} - f^c(y_l) e^{-i\sigma}], \quad p_l = \frac{\hbar k^2}{2} [e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}] \end{aligned} \quad (7.3)$$

и опустим квадратичные по \hbar члены. В (7.3) верхний индекс c означает комплексное сопряжение. Функция $f(y_l)$ находится как решение краевой задачи

$$\frac{d^3 f}{dy_l^3} + ik^3 \frac{df}{dy_l} = -\frac{ik^3}{2}; \quad y_l = 0: f = \frac{df}{dy_l} = 0; \quad y_l \rightarrow +\infty: \frac{df}{dy_l} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad (7.4)$$

Общее решение уравнения второго порядка в (7.4) относительно функции $q = df/dy_l$ имеет вид

$$g = -\frac{1}{2}[1 + K_+ e^{(1-i)\eta} + K_- e^{-(1-i)\eta}], \quad \eta = 2^{-1/2} k^{3/2} y_l \quad (7.5)$$

Требование отсутствия экспоненциального роста функции g при $y_l \rightarrow \infty$ в случае вещественных положительных k означает $K_+ = 0$, а условие при $y_l = 0$ из (7.4) дает $K_- = -1$. Таким образом, удовлетворяющее условию сращивания с внешним (стационарным) решением уравнения Кортевега-де Вриза продольная компонента скорости в пристеночном подслое имеет вид

$$u_l = -k^2 + \hbar/2\{[1 - e^{(i-1)\eta}]e^{i\sigma} + [1 - e^{-(1+i)\eta}]e^{-i\sigma}\} \quad (7.6)$$

Вернемся в систему координат, где стенка покоится, то есть применим к (7.6) преобразование (7.1) с $D_0 = c$:

$$u_l = c - k^2 + \hbar/2\{[1 - e^{(i-1)\eta}]e^{\rho} + [1 - e^{-(1+i)\eta}]e^{-\rho}\} \quad (7.7)$$

где $\rho = k(x_a - ct_a)$. Отсюда следует, что продольная скорость (7.7) в вязкой пристеночной части течения удовлетворяет условию $u_l = 0$ при $y_l = 0$ в краевой задаче (5.7) лишь в случае $c = k^2$.

Дисперсионное соотношение $c = k^2$ получено из условия существования периодического решения в вязком подслое, между тем в невязком решении (6.17) два параметра c и k независимы.

8. Осциллирующая стенка. Пусть источником возмущений исходного стационарного течения в струе с профилем скорости (1.2) служит установленный на стенке осциллятор, а именно в окрестности $x^* = L_\infty^*$ расположен подвижный участок обтекаемой поверхности с уравнением контура

$$y^* = y^*(t^*, x^*) = \frac{\chi^2}{\text{Re}^{9/14}} L_\infty^* G\left(\chi^3 \text{Re}^{2/7} \frac{U_\infty^*}{L_\infty^*} t^*, \chi \text{Re}^{3/7} \frac{x^* - L_\infty^*}{L_\infty^*}\right) \quad (8.1)$$

Здесь зависящая от двух аргументов функция $G = O(1)$. Как следует из разд. 2, для $\chi = O(1)$, $\text{Re} \rightarrow \infty$ вносимые неровностью (8.1) возмущения приобретают трехъярусную структуру, а в разд. 5 показано, что для $\chi \rightarrow +\infty$ (но $\chi \text{Re}^{-1/14} \rightarrow 0$) картина возмущенного движения становится четырехъярусной. Остановимся на случае $1 \ll \chi \ll \text{Re}^{1/14}$, тогда высота неровности (8.1) совпадает по порядку величины с толщиной области 3 четырехъярусной структуры (фиг. 1). В переменных (2.11), (5.1) деформируемый участок поверхности (8.1) задается функцией $y_a = G_a(t_a, x_a)$. В описывающей область 3 системе уравнений и краевых условий (5.2) (с отброшенной второй производной $\chi^{-7} \partial u_a / \partial y_a^2$) условие непротекания $v_a = 0$ при $y_a = 0$ должно быть заменено на условие непротекания на подвижном контуре

$$y_a = G_a(t_a, x_a): v_a - \frac{\partial G_a}{\partial t_a} = u_a \frac{\partial G_a}{\partial x_a} \quad (8.2)$$

Выполним преобразование Прандтля

$$x_a = x^\circ, \quad u_a = u^\circ$$

$$y_a = y^\circ + G_a(t_a, x_a), \quad v_a = v^\circ + \frac{\partial G_a}{\partial t_a} + u_a \frac{\partial G_a}{\partial x_a}$$

$$t_a = t^\circ, \quad p_a = p^\circ$$

тогда вместо (5.2), (8.2) получаем систему невязких уравнений и краевых условий

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial t^\circ} + u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\circ} + v^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} = -\frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ}, \quad \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\circ} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} = 0, \quad p^\circ = -\frac{\partial^2 A_a(t^\circ, x^\circ)}{\partial x^{\circ 2}} \quad (8.3)$$

$$y^\circ \rightarrow +\infty: u^\circ \rightarrow y^\circ + A_a(t^\circ, x^\circ) + G_a(t^\circ, x^\circ); \quad y^\circ = 0: v^\circ = 0$$

Обозначая $A^\circ = A_a + G_a$, $G^\circ = C_a$, заметим, что выражения

$$u^\circ = y^\circ + A^\circ, \quad v^\circ = -y^\circ \frac{\partial A^\circ}{\partial x^\circ} - \frac{\partial A^\circ}{\partial t^\circ} - A^\circ \frac{\partial A^\circ}{\partial x^\circ} - \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ}$$

являются решением задачи (8.3) тогда и только тогда, когда функция $A^\circ = A^\circ(t^\circ, x^\circ)$ удовлетворяет уравнению Кортевега-де Вриза с неоднородной правой частью:

$$\frac{\partial A^\circ}{\partial t^\circ} + A^\circ \frac{\partial A^\circ}{\partial x^\circ} = \frac{\partial^3 A^\circ}{\partial x^{\circ 3}} - \frac{\partial^3 G^\circ}{\partial x^{\circ 3}} \quad (8.4)$$

В дальнейшем с целью упрощения обозначений верхние индексы градус у всех переменных будут отброшены. Рассмотрим малые колебания поверхности

$$G(t, x) = \hbar G_1(t, x), \quad A(t, x) = \hbar A_1(t, x) + O(\hbar^2), \quad \hbar \rightarrow 0$$

$$G_1(t, x) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ H_1(x) \sin \Omega_0 t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

и, подставляя (8.5) в (8.4), ограничимся линейными по амплитуде \hbar членами. Для линейаризованного неоднородного уравнения Кортевега-де Вриза поставим задачу Коши $A_1 = 0$ при $t = 0$

Применим к нему преобразование Фурье по x , а затем преобразование Лапласа по t

$$A_1^* = \int_{-\infty}^{\infty} A_1 e^{-ikx} dx, \quad H_1^* = \int_{-\infty}^{\infty} H_1 e^{-ikx} dx \quad (8.6)$$

$$A_1^{**} = \int_0^{\infty} A_1^* e^{-\Omega t} dt, \quad H_1^{**} = \int_0^{\infty} H_1^* e^{-\Omega t} dt$$

Тогда указанная задача Коши с функцией G_1 из (8.5) сводится к конечному соотношению

$$A_1^{**}(\Omega, k) = \frac{ik^3 \Omega_0 H_1^*(k)}{(\Omega + ik^3)(\Omega^2 + \Omega_0^2)} \quad (8.7)$$

Совершим теперь обратное преобразование Лапласа

$$A_1^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} A_1^{**} e^{\Omega t} d\Omega \quad (8.8)$$

Сдвигая контур интегрирования в (8.8) в левую полуплоскость и вычисляя вычеты в полюсах $\Omega = \pm i\Omega_0$, $\Omega = -ik^3$ подынтегральной функции (8.7), находим

$$A_1^*(t, k) = \frac{k^3 H_1^*(k)}{2i} \left[\frac{e^{i\Omega_0 t}}{k^3 + \Omega_0} - \frac{e^{-ik^3 t}}{k^3 + \Omega_0} - \frac{e^{-i\Omega_0 t}}{k^3 - \Omega_0} + \frac{e^{-ik^3 t}}{k^3 - \Omega_0} \right] \quad (8.9)$$

Выполним обратное преобразование Фурье:

$$A_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1^*(t, k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \text{Real} \int_0^{\infty} A_1^*(t, k) e^{ikx} dk \quad (8.10)$$

В (8.10) учтено, что $A_1^*(t, -k) = [A_1^*(t, k)]^c$, где индекс c сверху обозначает комплексно сопряженные величины. Равенства (8.9), (8.10) дают

$$A_1(t, x) = \frac{1}{\pi} \text{Real}(\Pi_1 + \Pi_2)$$

$$\Pi_1 = \int_0^{\infty} \frac{k^3 H_1^*(k)}{2i} \left[\frac{2\Omega_0 e^{-ik^3 t + ikx}}{(k^3 + \Omega_0)(k^3 - \Omega_0)} - \frac{e^{-i\Omega_0 t + ikx}}{k^3 - \Omega_0} \right] dk \quad (8.11)$$

$$\Pi_2 = e^{i\Omega_0 t} \int_0^{\infty} \frac{k^3 H_1^*(k) e^{ikx}}{2i(k^3 + \Omega_0)} dk$$

Исследуем каждый из интегралов Π_1 и Π_2 отдельно. Предположим, что функция $H_1(x)$ в (8.5) финитна, т.е. отличная от нуля деформация стенки сосредоточена на конечном отрезке $-b \leq x \leq b$, $b > 0$. Тогда $H_1^*(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $\Pi_2 \rightarrow 0$ не слабее $|x|^{-4}$ в случае $|x| \rightarrow \infty$. Итак, осциллирующий член Π_2 в (8.11) затухает при удалении от вибрирующего участка поверхности.

В интеграле Π_1 сделаем замену переменной $k = i^{-1/3}s$ и, предполагая сначала $x < 0$, разобьем его на два интеграла:

$$\Pi_1 = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

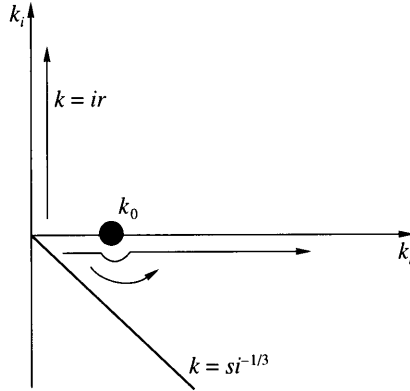
$$\Gamma_1 = \Omega_0 \int_0^{\infty} \frac{s^3 H_1^*(i^{-1/3}s) e^{-s^3 t + i^{2/3} s x}}{(s^3 + i\Omega_0)(s^3 - i\Omega_0)} ds, \quad \Gamma_2 = -\frac{e^{-i\Omega_0 t}}{2i^{4/3}} \int_0^{\infty} \frac{s^3 H_1^*(i^{-1/3}s) e^{i^{2/3} s x}}{s^3 - i\Omega_0} ds$$

Интегрирование по частям дает затухание Γ_2 не слабее $|x|^{-4}$ при $x \rightarrow -\infty$. Подстановка $ts^3 = v^3$ в Γ_1 приводит к выражению

$$\Gamma_1 = \frac{\Omega_0}{t^{4/3}} \int_0^{\infty} \frac{v^3 H_1^*(i^{-1/3} t^{-1/3} v) e^{-v^3 + i^{2/3} t^{-1/3} v x}}{(v^3 t^{-1} + i\Omega_0)(v^3 t^{-1} - i\Omega_0)} dv \quad (8.12)$$

что делает очевидной оценку $\Gamma_1 = O(t^{-4/3})$ при $t \rightarrow +\infty$.

Иное поведение возмущений, представленных в интегральной форме (8.11), имеет место в случае $x > 0$. Пусть $\Omega_0 > 0$. Так как точка $k = k_0 = \Omega_0^{1/3}$ не является особой для функции в квадратных скобках в Π_1 , продеформируем путь интегрирования $[0, +\infty)$ так, чтобы обойти эту точку снизу против часовой стрелки (фиг. 6), а затем снова



Фиг. 6. Пути интегрирования на комплексной плоскости $k = k_r + ik_i$

положим $\Pi_1 = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Здесь для Γ_1 по-прежнему верна формула (8.12) и вытекающая из нее оценка скорости затухания по времени.

В применении ко второму интегралу

$$\Gamma_2 = -\frac{e^{-i\Omega_0 t}}{2i} \int_{C^*} \frac{k^3 H_1^*(k) e^{ikx}}{k^3 - \Omega_0} dk \tag{8.13}$$

сделаем замену переменной $k = ir$. В (8.13) контур C^* совпадает с действительной положительной полуосью всюду, за исключением той его части, которая обходит точку $k_0 = \Omega_0^{1/3}$ снизу. Упомянутая замена $k = ir$ эквивалентна совмещению нового контура интегрирования с полуосью $\text{Im} k > 0$. Но поскольку при непрерывной деформации контура C^* с целью совместить его с положительной мнимой полуосью пересекается полюс k_0 (фиг. 6) подынтегральной функции в Γ_2 , значение интеграла (8.13) испытывает скачок. В результате имеем

$$\Gamma_2 = \Gamma_0 + \Gamma_{00}, \quad \Gamma_0 = \frac{ie^{-i\Omega_0 t \infty}}{2} \int_0^{\infty} \frac{r^3 H_1^*(ir) e^{-rx}}{ir^3 + \Omega_0} dr, \quad \Gamma_{00} = -\frac{\pi k_0}{3} H_1^*(k_0) e^{ik_0 x - i\Omega_0 t}$$

причем интеграл Γ_0 сходится и затухает как $|x|^{-4}$ при $x \rightarrow +\infty$.

Итак, для фиксированного $x > 0$ из возмущенного фона выделяется компонента решения задачи Коши

$$A_1(t, x) = \frac{1}{\pi} \text{Real} \Gamma_{00} = \tag{8.14}$$

$$= \frac{\Omega_0^{1/3}}{3} [H_{1i}^*(\Omega_0^{1/3}) \sin(\Omega_0^{1/3} x - \Omega_0 t) - H_{1r}^*(\Omega_0^{1/3}) \cos(\Omega_0^{1/3} x - \Omega_0 t)]$$

где H_{1r}^* , H_{1i}^* – действительная и мнимая части комплекснозначной функции H_1^* . Выражение (8.14) показывает, что ниже по потоку от установленного на обтекаемой поверхности осциллятора возникает волна Толлмина–Шлихтинга. Решение задачи с начальными данными (8.6) позволило выразить амплитуду волны Толлмина–Шлихтинга (8.14) через фурье-образ функции H_1 из (8.5), задающей геометрическую форму осциллятора.

Если периодическое решение (8.14) устанавливается в пределе $t \rightarrow +\infty$ при ограниченных $x > 0$, то непрерывный переход от невозмущенного состояния при $x \rightarrow +\infty$ к индуцированной осциллятором волне Толлмина–Шлихтинга происходит через волновой пакет. Структуру распространяющегося с некоторой групповой скоростью волнового пакета впереди волны Толлмина–Шлихтинга найдем методом перевала.

Стационарная точка (точка перевала) показателя экспоненты первого слагаемого в квадратных скобках подынтегральной функции из Π_1 в (8.11), соответствующего

$$\Gamma_1 = \Omega_0 \int_0^{\infty} \frac{k^3 H_1^*(k) e^{-ik^3 t + ikx}}{i(k^3 + \Omega_0)(k^3 - \Omega_0)} dk$$

находится из условия $d(-ik^3 t + ikx)/dk = 0$. Последнее равенство достигается при $k = k_{00} = \sqrt{x/(3t)}$. Будем считать $x/t = O(1)$. Согласно методу перевала выбираем контур интегрирования в комплексной плоскости k таким образом, чтобы он проходил через точку перевала k_{00} (седловую точку) в направлении наискорейшего убывания экспоненциальной функции в Γ_1 . В малой окрестности седловой точки

$$k - k_{00} = \varepsilon e^{i\varphi}, \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

$$ikx - ik^3 t = 2itk_{00}^3 - 3i\varepsilon^2 tk_{00} \cos 2\varphi + 3\varepsilon^2 tk_{00} \sin 2\varphi + O(\varepsilon^3)$$

следовательно, перевальный контур проходит через точку k_{00} , составляя с действительной осью угол $-\pi/4$. Поэтому удобно продеформировать контур интегрирования в Γ_1 таким образом, чтобы он состоял из отрезка $[0, ik_{00}]$ и луча $[ik_{00}, +\infty i^{-1/2}]$ (фиг. 6). В результате такого деформирования имеем

$$\Gamma_1 = \Gamma_{11} + \Gamma_{12}, \quad k(v) = k_{00} + ve^{-i\pi/4}$$

$$\Gamma_{11} = -2\Omega_0 \int_0^{k_{00}} \frac{r^3 H_1^*(ir) e^{-r^3 t - rx}}{(\Omega_0 - ir^3)(\Omega_0 + ir^3)} dr$$

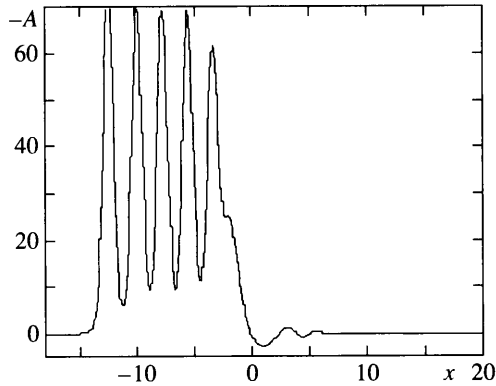
$$\Gamma_{12} = 2\Omega_0 \int_{-\sqrt{2}k_{00}}^{\infty} \frac{k^3(v) H_1^*[k(v)] e^{-ik^3(v)t + ik(v)x - i\pi/4}}{[k^3(v) + \Omega_0][k^3(v) - \Omega_0]} dv$$

Деля в Γ_{11} подстановку $r_1 = rt^{1/3}$, находим оценку $\Gamma_{11} = O(t^{-4/3})$ при $t \rightarrow +\infty$. Для оценки Γ_{12} достаточно рассмотреть малую окрестность $-\delta \leq v \leq \delta$ перевальной точки. Выполняя замену переменной

$$v = \frac{\mu}{\sqrt{3tk_{00}}} [1 + O(\mu)]$$

получим главную часть интеграла Γ_{12} при $t \rightarrow +\infty$:

$$\Gamma_{12} = \frac{2\Omega_0 k_{00}^3 H_1^*(k_{00}) e^{2itk_{00}^3 - i\pi/4} \delta \sqrt{3tk_{00}}}{(k_{00}^3 + \Omega_0)(k_{00}^3 - \Omega_0)} \int_{-\delta \sqrt{3tk_{00}}}^{\infty} \frac{e^{-\mu^2} [1 + O(\delta)] d\mu}{\sqrt{3tk_{00}}} + O\left(e^{-3tk_{00}\delta^2}\right) \quad (8.15)$$



Фиг. 7. Рождение солитонов на неоднородности стенки. Решение $A = A(t, x)$ уравнения Кортевега-де Вриза для $t = 0.5$

Совершим вначале в (8.15) предельный переход $t \rightarrow +\infty$, а затем полагаем $\delta \rightarrow 0$, что приводит к асимптотике

$$\Gamma_{12} = 2\Omega_0 \sqrt{\frac{\pi}{3t}} \frac{k_{00}^{5/2} H_1^*(k_{00})}{k_{00}^6 - \Omega_0^2} e^{2itk_{00}^3 - i\pi/4} \quad (8.16)$$

Формула (8.16) получена в предположении $k_{00} = \sqrt{x/(3t)} = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Оценка интеграла Γ_2 в (8.13) не отличается от рассмотренной выше; Γ_2 затухает не слабее $O(x^{-4})$, $x \rightarrow +\infty$. Таким образом, в головной части волнового возмущения, возбуждаемого началом колебательного движения локального участка обтекаемой поверхности, образуется волновой пакет

$$A_1(t, x) = \frac{1}{\pi} \text{Real} \Pi_1 = \text{Real} \left[\frac{2\Omega_0 x^{5/4}}{\pi^{1/2} 3^{7/4} t^{7/4}} \left(\frac{x^3}{27t^3} - \Omega_0^2 \right)^{-1} H_1^* \left(\sqrt{\frac{x}{3t}} \right) e^{2i(x/3)^{3/2} t^{-1/2} - i\pi/4} \right] \quad (8.17)$$

Структура волнового пакета (8.17) получена для случая $t \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x/t = O(1)$, причем $k_{00} > k_0$. Последнее неравенство равносильно требованию $(x/3t)^3 > \Omega_0^2$, исключающему сингулярность функции (8.17). Для $x \gg t$, т.е. $k_{00} \gg k_0$, передний фронт волны (8.17) переходит в невозмущенный фон $A_1 \rightarrow 0$.

9. Генерация солитонов на неоднородности поверхности. Обратимся к нелинейному уравнению Кортевега-де Вриза (8.4) со свободным членом (источником) вида $-\partial^3 G(t, x)/\partial x^3$ (здесь $G = G^\circ$, $t = t^\circ$, $x = x^\circ$). Источник в правой части (8.4) соответствует наличию деформации обтекаемой стенки. При этом сама неровность индуцирует возникновение четырехъярусной структуры возмущенного потока, если уравнение контура неровности принадлежит классу (8.1) для $\text{Re} \gg 1$, $\chi \gg 1$, $\chi \text{Re}^{-1/4} \ll 1$. В [33, 34], а также в [7] обращено внимание на следующее обстоятельство: не зависящий от времени свободный член в уравнении Кортевега-де Вриза приводит к генерации возмущений солитонного типа, бегущих с отрицательными фазовыми скоростями.

Фигура 7 демонстрирует возникновение солитонов на препятствии $G = \hbar e^{-x^2}$, $\hbar = -0.001$. В качестве начального условия при $t = 0$ использовалось нулевое решение. Как вид-

но из фиг. 7, вверх по потоку от препятствия распространяется цепочка солитонов; внизу по потоку возникает так называемая осцилляторная волна. С течением времени t длина цепочки солитонов увеличивается.

Заключение. Рассмотренная выше теория вязких течений типа пристеночной струи с многоярусной структурой волновых возмущений сводит построение поля флуктуаций к решению некоторой краевой задачи для уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением. Изложенный формализм свободен от каких-либо параметров, связанных с числом Рейнольдса, которое предполагается стремящимся к бесконечности. Отсюда вытекает, что достоверность качественных выводов о свойствах устойчивости, полученных путем линеаризации названных уравнений, достигается применительно к асимптотике нижней ветви кривой нейтральных колебаний, а также некоторой окрестности этой кривой. Область определения (по вертикальной координате) соответствующих собственных функций распадается на три палубы. Волны Толлмина – Шлихтинга с наибольшей скоростью роста амплитуды имеют именно трехъярусную структуру. Последнее следует из изложенных результатов анализа поведения инкремента нарастания первой неустойчивой моды из спектра собственных функций.

Отличительная особенность спектра собственных функций состоит в том, что возможные возмущения могут одновременно содержать как моды Толлмина – Шлихтинга, аналогичные волнам в пограничном слое дозвукового потока [15], так и внутренние волны, характерные для пограничного слоя сверхзвукового потока [7]. В этом смысле спектр имеющих гидродинамический смысл решений дисперсионного уравнения для возмущений в пристеночной струе оказывается более сложным по сравнению с возникающим в задаче устойчивости пограничного слоя.

Специальный случай течений в пристеночных струях, когда амплитуда возмущений сравнительно велика, при некоторых дополнительных предположениях правильно моделируется четырехъярусной асимптотической теорией. В этой ситуации ее формализм может базироваться на уравнении Кортвега-де Вриза. Солитонные решения данного уравнения, а также решения в форме кноидальных волн указывают на один из возможных механизмов, ответственных за возникновение упорядоченных детерминированных нелинейных пульсаций на ранних стадиях ламинарно-турбулентного перехода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 04-01-00807 и 04-01-00773).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейланд В.Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
2. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // Adv. Appl. Mech. 1974. V. 14. P. 145–239.
3. Smith F.T. On the high Reynolds number theory of laminar flows // IMA J. Appl. Math. 1982. V. 28. № 3. P. 207–281.
4. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987. 255 с.
5. Нейланд С.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003. 456 с.
6. Рыжов О.С. Уравнение нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 4. С. 780–783.
7. Жук В.И. Волны Толлмина – Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.
8. Smith F.T. On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 366. № 1724. P. 91–109.
9. Рыжов О.С., Савенков И.В. Асимптотический подход в теории гидродинамической устойчивости // Математическое моделирование. 1989. Т. 1. № 4. С. 61–86.

10. *Von Schmidt E., Beckmann W.* Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld von einer Warme abgeben senkrechten Platte bei naturliche Konvektion // *Forsch. Gebiete Ingenieurwesens. Tech. Mech. und Therm.* 1930. Bd. 1. № 10, 11.
11. *Smith F.T., Duck P.W.* Separation of jets or thermal boundary layers from a wall // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1977. V. 30. Pt 2. P. 143–156.
12. *Von Karman Th.* Über laminare und turbulente Reibung // *ZAMM.* 1921. Bd. 1. Ht. 4. S. 233–252.
13. *Kohama Y.* Some expectation on the mechanism of cross-flow instability in a swept-wing flows // *Acta Mech.* 1987. V. 66. P. 21–38.
14. *Cooke J.C.* The boundary layer of a class of infinite yawed cylinders // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1950. V. 46. P. 645–648.
15. *Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.* Возникновение турбулентности в пристенных течениях. Новосибирск: Наука, 1999. 328 с.
16. *Lingwood R.J.* Absolute instability of the boundary layer on a rotating disk // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 299. P. 17–33.
17. *Wernz S., Fasel H.* Numerical investigation of resonance phenomena in wall jet transition // *Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Symp. Eds. H.F. Fasel, W.S. Saric. Sedona/AZ, 1999. Berlin: Springer, 2000. P. 217–221.*
18. *Seidel J., Fasel H.* Numerical investigation of heat transfer mechanisms in wall jet transition // *Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Symp. Eds. H.F. Fasel, W.S. Saric. Sedona/AZ, 1999. Berlin: Springer, 2000. P. 652–656.*
19. *Messiter A.F., Liñán A.* The vertical plate in laminar free convection: Effects of leading and trailing edges and discontinuous temperature // *ZAMP.* 1976. V. 27. H. 5. P. 633–651.
20. *Merkin J.H.m, Smith F.T.* Free convection boundary layers near corners and trailing edges // *ZAMP.* 1982. V. 33. H. 1. P. 36–52.
21. *Merkin J.H.* Free convection boundary layers over humps and indentations // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1983. V. 36. Pt 1. P. 71–85.
22. *Amitay M., Cohen J.* The mean flow of a laminar wall-jet subjected to blowing or suction // *Phys. Fluids. A.* 1993. V. 5. № 8. P. 2053–2057.
23. *Рыжов О.С.* Неустойчивость распространяющейся вдоль стенки струи вязкой жидкости // *ПМТФ.* 1982. № 2. С. 26–33.
24. *Жук В.И., Рыжов О.С.* О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 263. № 1. С. 56–59.
25. *Smith F.T., Burggraf O.R.* On the development of large-sides short-scaled disturbances in boundary layers // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1985. V. 399. № 1816. P. 25–55.
26. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
27. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с.*
28. *Жук В.И., Рыжов О.С.* Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 253. № 6. С. 1326–1329.
29. *Жук В.И., Рыжов О.С.* О свободном взаимодействии пристеночных слоев с ядром течения Пуазейля // *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 257. № 1. С. 55–59.
30. *Богданова Е.В., Рыжов О.С.* О колебаниях, возбуждаемых гармоническим осциллятором в течении Пуазейля // *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 257. № 4. С. 837–841.
31. *Drazin P.G.* On the stability of cnoidal waves // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1977. V. 30. Pt 1. P. 91–105.
32. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука, 2000. 272 с.
33. *Жук В.И., Попов С.П.* О нелинейном развитии длинноволновых невязких возмущений в пограничном слое // *ПМТФ.* 1989. № 3. С. 101–108.
34. *Жук В.И., Попов С.П.* Моделирование нелинейных волн в пограничных слоях на основе уравнений Бюргерса, Бенджамина – Оно и Кортевега-де Вриза // *Математическое моделирование.* 1990. Т. 2. № 7. С. 96–109.