

УДК 532.5.296:534.12

© 2005 г. А. А. АГАНИН, М. А. ИЛЬГАМОВ, Л. А. КОСОЛАПОВА, В. Г. МАЛАХОВ

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ИЗМЕНЕНИИ ДАВЛЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Изучены эллипсоидальные линейные и нелинейные колебания газового пузырька при гармоническом изменении давления окружающей жидкости. Рассмотрены такие параметры указанной системы, при которых наблюдается периодическая сонолюминесценция отдельного пузырька в стоячей акустической волне. Предложена математическая модель динамики пузырька, в которой изменение формы межфазной поверхности описывается с точностью до квадрата амплитуды искажения сферической формы пузырька. Исследован характер колебаний воздушного пузырька в воде в зависимости от его начального радиуса и амплитуды изменения давления жидкости. Показано, что несферические колебания ограниченной амплитуды могут иметь место и за границей области линейно-устойчивых сферических колебаний. При этом наблюдаются как колебания с периодом, равным одному или двум периодам изменения давления жидкости, так и аperiodические колебания.

Ключевые слова: газовый пузырек, нелинейные колебания, неустойчивость сферической формы, вязкая жидкость, потенциальное течение.

Экспериментальное открытие в 1990 г. явления периодической сонолюминесценции отдельного пузырька в стоячей волне вызвало повышенное внимание к задачам динамики пузырька на этом режиме [1, 2]. С применением сферически симметричных моделей на режимах сонолюминесценции изучались зависимости радиальной динамики пузырька от частоты и амплитуды колебаний давления в жидкости, вязкости жидкости, теплопроводности жидкости и газа, диффузии газа через поверхность пузырька [1,2]. Несферические колебания пузырька исследовались в связи с определением границ устойчивости сферических колебаний [3–5], когда степень сжатия газа в пузырьке максимальна. С этой целью применены линейные уравнения для амплитуды искажения поверхности пузырька [3–5]. В линейной теории выход за границу области устойчивости сферических колебаний ведет к неограниченному росту амплитуды искажений, поэтому вопрос о движении пузырька за этой границей в случае уточненных соотношений представляет значительный интерес.

Цель настоящей работы – исследование нелинейных эллипсоидальных колебаний пузырька при изменении давления в жидкости с частотой и амплитудой, близкими к тем, что имеют место на режиме периодической сонолюминесценции. Предлагается простая математическая модель, в которой искажения сферической формы пузырька описываются второй сферической гармоникой. В уравнениях учитываются члены второго порядка малости относительно амплитуды искажения сферической формы.

1. Постановка и методика решения задачи. Принимаются следующие предположения: движение жидкости потенциальное, влияние вязкости учитывается через динамическое граничное условие на межфазной поверхности; жидкость около пузырька считается несжимаемой, ее сжимаемость приближенно учитывается вдали от пузырька.

Движение жидкости, окружающей пузырек, в сферической системе координат r, θ, φ описывается уравнениями

$$\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{p}{\rho_f} = f(t) \quad (1.1)$$

где t – время, p – давление, ρ_f – плотность жидкости, Φ – потенциал скорости.

Считается, что газ в пузырьке невязкий, с равномерным распределением давления, подчиняющийся закону Ван-дер-Ваальса

$$p^- = p_b^0 \left(\frac{V_0 - bV_0}{V - bV_0} \right)^\gamma \quad (1.2)$$

Здесь p_b^0 – начальное давление газа в пузырьке, V_0, V – начальный и текущий объемы пузырька, b – постоянная, γ – показатель адиабаты.

На поверхности пузырька $r = r_s(\theta, t)$ записываются кинематическое граничное условие

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r_s^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \frac{\partial r_s}{\partial\theta} = \frac{\partial r_s}{\partial t} \quad (1.3)$$

и динамическое граничное условие равенства нулю суммы проекций сил на нормаль \vec{n} к деформированной поверхности

$$p^+ = p^- - 2\sigma H + \tau_{nn} \quad (1.4)$$

где σ – поверхностное натяжение, τ_{nn} – вязкое напряжение,

$$\tau_{nn} = 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}$$

где μ – динамический коэффициент вязкости. Предположение о потенциальности поля скоростей в жидкости исключает возможность использования динамического граничного условия по касательной, так как система становится переопределенной. В предлагаемой модели требуется выполнение только условия (1.4). Сравнение моделей с различными способами учета вязкости в [6] показывает возможность использования такого подхода.

Уравнение поверхности пузырька задается как в [7]

$$r_s(\theta, t) = R(t)[1 + \varepsilon(t)P(\eta)] \quad (1.5)$$

а потенциал скорости Φ – в виде

$$\Phi(r, \theta, t) = \frac{A(t)}{r} + \frac{B(t)P(\eta)}{r^3} \quad (1.6)$$

Здесь $P(\eta) = (3\eta^2 - 1)/2$ – полином Лежандра второй степени, $\eta = \cos\theta$, R и ε – средний радиус пузырька и амплитуда искажения его сферической формы.

Функция $f(t)$ с учетом сжимаемости жидкости на большом удалении от пузырька, где давление равно p_∞ , представляется соотношением

$$f(t) = \frac{p_\infty}{\rho_f} + \frac{1}{a} \ddot{A} \quad (1.7)$$

где a – скорость звука в жидкости. В (1.7) и далее точка над переменной – дифференцирование по времени.

Дальнейшие соотношения получены из (1.1)–(1.4) в предположении, что безразмерная амплитуда искажения ε – малая величина и значением ε^3 можно пренебречь по сравнению с единицей. При этом имеют место оценки

$$\frac{R}{a} \sim \varepsilon, \quad \frac{R\dot{\varepsilon}}{\dot{R}} \sim \varepsilon, \quad \frac{\mu}{a\rho_f R_0} \sim \varepsilon, \quad \frac{\delta}{A} \sim \varepsilon, \quad \frac{\dot{\delta}}{\dot{A}} \sim \varepsilon, \quad \frac{\ddot{A}}{a} \sim \varepsilon, \quad \left(\delta = \frac{B(t)}{R^2} \right) \quad (1.8)$$

Подставим выражения (1.5), (1.6) в уравнения (1.3), (1.4) с учетом (1.1) и (1.7). Применяя при интегрировании полученной системы по координате θ процедуру метода Бубнова–Галеркина и учитывая ограничения (1.8), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных $R(t)$, $A(t)$, $\varepsilon(t)$, $\delta(t)$

$$\dot{R} = \frac{1}{R^2} \left[- \left(1 + \frac{3}{5} \varepsilon^2 \right) A + \frac{6}{5} \varepsilon \delta \right] \quad (1.9)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{3}{R^3} \left[\left(\varepsilon - \frac{2}{7} \varepsilon^2 \right) A - \left(1 - \frac{6}{7} \varepsilon \right) \delta \right] \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} 2 \left(1 + \frac{1}{5} \varepsilon^2 + \frac{A}{aR^2} + \frac{4\mu}{a\rho_f R} \right) \dot{A} - \frac{6}{5} \varepsilon \dot{\delta} = - \frac{1}{R^3} \left[\left(1 + 2\varepsilon^2 - \frac{3\dot{R}}{a} \right) A^2 - \right. \\ \left. - \frac{24}{5} \varepsilon A \delta + 3\delta^2 - 16R\dot{R} \frac{\mu}{a\rho_f} A \right] - \frac{2}{\rho_f} \left\{ R \left(1 + \frac{\dot{R}}{a} \right) (p^- - p_\infty) + \right. \\ \left. + \frac{R^2}{a} (\dot{p}^- - \dot{p}_\infty) - 2(1 - \varepsilon^2) \sigma + \frac{4\mu}{R^2} \left[\left(1 - \frac{3}{5} \varepsilon^2 \right) A - \frac{6}{5} \varepsilon \delta \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \left(-\varepsilon + \frac{2}{7} \varepsilon^2 \right) \dot{A} + \left(1 - \frac{6}{7} \varepsilon \right) \dot{\delta} = \\ = - \frac{1}{R^3} \left[\left(-2\varepsilon + \frac{10}{7} \varepsilon^2 \right) A^2 + \left(1 - \frac{24}{7} \varepsilon \right) A \delta + \frac{12}{7} \delta^2 \right] + \\ + \frac{4\sigma}{\rho_f} \left(\varepsilon - \frac{5}{7} \varepsilon^2 \right) - \frac{12\mu}{\rho_f R^2} \left[\left(-\varepsilon + \frac{1}{7} \varepsilon^2 \right) A + 2 \left(1 - \frac{6}{7} \varepsilon \right) \delta \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Эта система с учетом предположений (1.8) приводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно среднего радиуса и амплитуды искажений $R(t)$, $\varepsilon(t)$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{5} \varepsilon^2 - \frac{\dot{R}}{a} - \frac{2}{5} \varepsilon \frac{R\dot{\varepsilon}}{a} + \frac{4\mu}{a\rho_f R} \right) \ddot{R} = \\ = - \frac{3\dot{R}^2}{2R} \left(1 - \frac{3}{5} \varepsilon^2 - \frac{1}{3} \frac{\dot{R}}{a} - \frac{8}{15} \varepsilon \frac{R\dot{\varepsilon}}{a} \right) + \frac{2}{5} \dot{R} \varepsilon \dot{\varepsilon} - \frac{7}{30} R \dot{\varepsilon}^2 + \\ + \frac{1}{\rho_f R} \left\{ \left(1 + \frac{\dot{R}}{a} \right) (p^- - p_\infty) + \frac{R}{a} (\dot{p}^- - \dot{p}_\infty) - \right. \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\sigma}{R}\left(1 - \frac{11}{5}\varepsilon^2\right) - \frac{4\mu}{R}\left[\left(1 - 3\varepsilon^2\right)\dot{R} - \frac{6}{5}R\varepsilon\dot{\varepsilon}\right] \Big\} \\
 \ddot{\varepsilon} = & -5\frac{\dot{R}}{R}\dot{\varepsilon} - \frac{2}{7}\dot{\varepsilon}^2 - \left(3\varepsilon - \frac{6}{7}\varepsilon^2\right)\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{12\sigma}{\rho_f R^3}\left(\varepsilon - \frac{5}{7}\varepsilon^2\right) - \\
 & - \frac{12\mu}{\rho_f R^2}\left[\left(3\varepsilon - \frac{9}{7}\varepsilon^2\right)\frac{\dot{R}}{R} + 2\dot{\varepsilon}\right]
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Выражение для текущего объема пузырька с принятой точностью имеет вид

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3\left(1 + \frac{3}{5}\varepsilon^2\right)$$

Полагая в (1.13), (1.14) $\mu = 0$, $a = \infty$, получим систему уравнений для идеальной несжимаемой жидкости, аналогичную приведенной в [7].

Система (1.13), (1.14) с начальными условиями

$$R(0) = R_0, \quad \dot{R}(0) = 0, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = 0$$

решается методом Дормана–Принса седьмого порядка точности [8].

Давление в жидкости вдали от пузырька изменяется по закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t$$

где Δp – амплитуда, $\omega = 2\pi/T$ – угловая частота, T – период.

Рассматривается пузырек воздуха в воде. Принимаются следующие данные: $\gamma = 1.4$, $b = 8.5^{-3}$, $a = 1500$ м/с, $\rho_f = 1000$ кг/м³, $\sigma = 0.073$ кг/с², $\mu = 10^{-3}$ кг/мс, $p_0 = 0.1$ МПа, $\omega/2\pi = 26.5$ кГц.

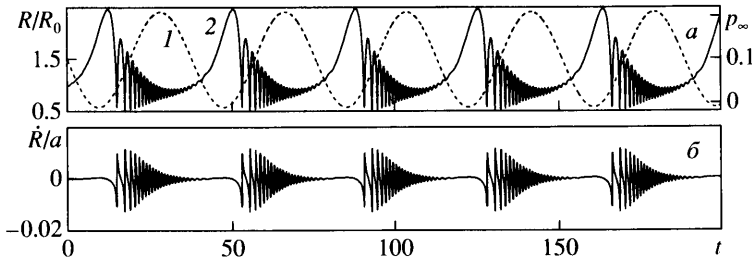
Амплитуда колебаний давления варьируется в диапазоне $0.095 \leq \Delta p \leq 0.13$ МПа, а начальный радиус пузырька – в диапазоне $3.5 < R_0 < 8.5$ мкм. Начальное значение амплитуды эллипсоидального искажения сферической формы пузырька берется как $\varepsilon_0 = 10^{-8}$. В дальнейшем на всех фигурах время t измеряется в мкс.

2. Колебания пузырька при малых амплитудах искажения сферической формы.

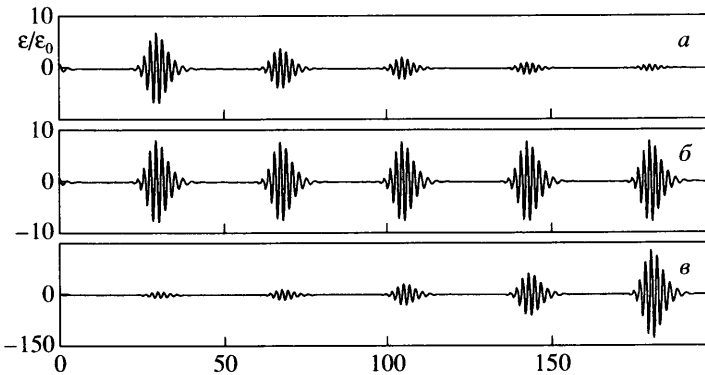
Для малых амплитуд искажения в уравнениях (1.13), (1.14) можно пренебречь квадратичными относительно амплитуды ε и ее производной $\dot{\varepsilon}$ слагаемыми (при этом уравнение относительно R остается нелинейным). Решение задачи при таком пренебрежении будем условно называть линейным, а решение, полученное по полным соотношениям, – нелинейным.

Линейные решения задачи для $\Delta p = 0.11$ МПа и различных значений R_0 приведены на фиг. 1, 2. Характерные зависимости от t среднего радиуса пузырька R , скорости его изменения \dot{R} и заданное колебание давления в жидкости p_∞ на фиг. 1 показывают, что период колебаний пузырька совпадает с периодом изменения давления в жидкости. При этом наибольшее значение R на каждом периоде колебаний достигается тогда, когда давление в жидкости близко к минимальному. После достижения своего максимального радиального размера пузырек быстро сжимается, а затем следует ряд высокочастотных быстро затухающих сферических колебаний. Наибольшая скорость изменения радиуса \dot{R} достигается в окрестности его наименьшего значения.

Из зависимости от t амплитуды искажения сферической формы пузырька ε на фиг. 2 для рассмотренных значений Δp и R_0 следует, что колебания амплитуды ε в линейном решении либо затухают (фиг. 2, а), либо остаются неизменными (б), либо



Фиг. 1. Зависимости от t давления в жидкости p_∞ (а, кривая 1), радиуса пузырька R/R_0 (а, 2) и скорости его изменения \dot{R}/a (б) для $\Delta p = 0.11$ МПа, $R_0 = 5.02$ мкм

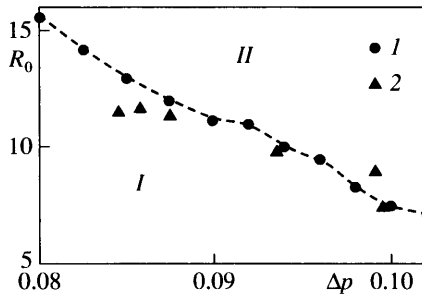


Фиг. 2. Изменение искажения ϵ/ϵ_0 во времени при $\Delta p = 0.11$ МПа: а-в – $R_0 = 5, 5.032, 5.05$ мкм

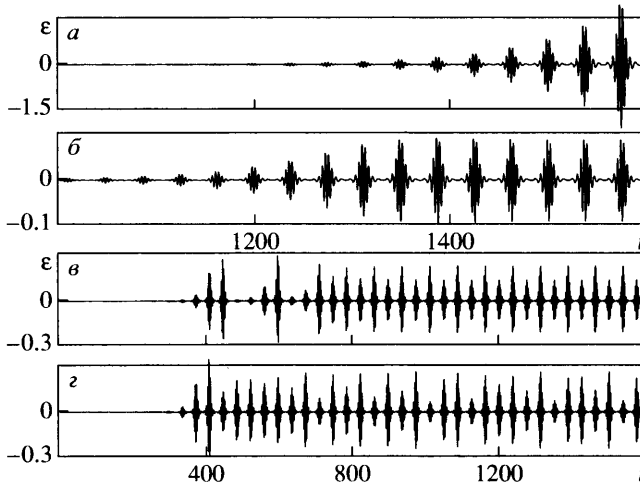
неограниченно возрастают (в). Уменьшение и увеличение амплитуды ϵ происходит по закону, близкому к экспоненциальному. Для затухающих колебаний искажения сферическая форма пузырька устойчива по отношению к ее эллипсоидальным возмущениям, при колебаниях с возрастающей амплитудой искажения сферическая форма пузырька неустойчива.

3. Сравнение с экспериментальными данными. Для оценки достоверности полученных результатов используются данные эксперимента [9] по определению границы области устойчивости сферических колебаний пузырька относительно эллипсоидальных возмущений его формы. Эксперимент проводился для воздушного пузырька в воде при частоте колебаний давления в жидкости $\omega/2\pi = 20.6$ кГц. При тех же данных по предлагаемой методике был получен ряд точек границы области устойчивости в плоскости $\Delta p, R_0$. Согласование расчетных и экспериментальных данных, как видно из фиг. 3, удовлетворительное.

4. Колебания пузырька при немалых амплитудах искажения сферической формы. При малых начальных искажениях и значениях $\Delta p, R_0$, принадлежащих области устойчивости сферических колебаний, линейное и нелинейное решения практически совпадают. При выходе за границу области устойчивости сферических колебаний амплитуда эллипсоидального искажения формы пузырька в линейном решении неограниченно возрастает. В нелинейных решениях характер зависимостей $\epsilon(t)$ за пределами области устойчивости отличается большим разнообразием. При этом значения $R(t)$ в линейном и нелинейном решениях практически совпадают.

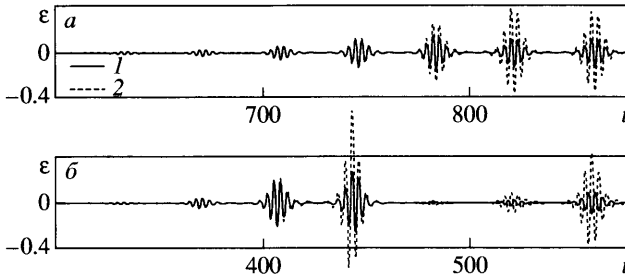


Фиг. 3. Точки границы области устойчивых (I) и неустойчивых (II) сферических колебаний: 1 – расчет; 2 – эксперимент [9]

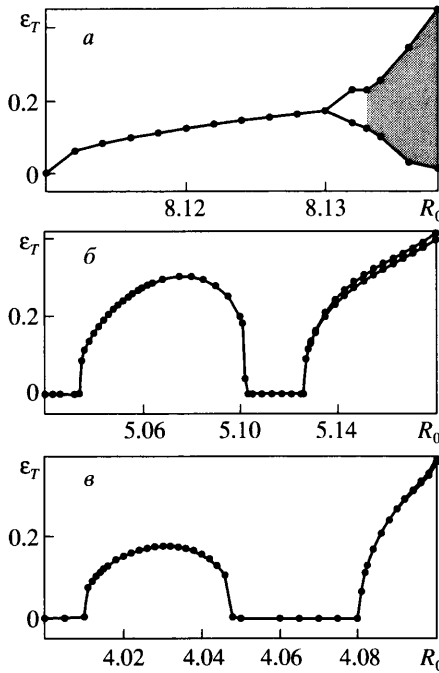


Фиг. 4. Зависимости от t искажения сферической формы пузырька ε для $\Delta p = 0.095$ МПа: a – линейное решение для $R_0 = 8.115$ мкм, b – z – нелинейные решения для $R_0 = 8.115, 8.132, 8.135$ мкм

Зависимости эллипсоидальных искажений сферической формы пузырька ε от t для амплитуды давления $\Delta p = 0.095$ МПа и ряда значений начального радиуса пузырька R_0 за пределами области устойчивости сферического движения приведены на фиг. 4; для $R_0 = 8.115$ мкм изображены линейное (a) и нелинейное (b) решения. В линейном решении амплитуда искажения неограниченно возрастает. В нелинейном решении на начальном отрезке времени, пока искажения малы, вклад нелинейных эффектов незначителен и оно практически совпадает с линейным. С ростом искажения влияние нелинейных эффектов усиливается и проявляется в ограничении амплитуды ε . При этом в зависимости от величины R_0 могут наблюдаться как периодические, так и аperiodические колебания. При $R_0 = 8.115$ мкм с некоторого момента времени устанавливаются колебания с периодом T . Для $R_0 = 8.132$ мкм происходит удвоение периода колебаний, а при $R_0 = 8.135$ мкм изменение $\varepsilon(t)$ имеет аperiodический характер на рассмотренном интервале времени. Из фиг. 4 видно, что с увеличением начального радиуса R_0 искажения сферической формы пузырька нарастают значительно быстрее.



Фиг. 5. Зависимости от t искажения ϵ для $\Delta p = 0.095$ МПа: $a, б - R_0 = 8.12, 8.132$ мкм; 1, 2 – полное и упрощенное уравнения (1.13)



Фиг. 6. Зависимости максимального на периоде изменения давления в жидкости значения искажения ϵ_T от начального радиуса пузырька R_0 : $a-b - \Delta p = 0.095, 0.11, 0.13$ МПа

Следует отметить, что амплитуда искажения ϵ определяется с относительной точностью $O(\epsilon)$, поскольку главные члены уравнения (1.14) имеют порядок $O(\epsilon)$, а не $O(1)$, как в уравнении (1.13). Однако выравнивание порядков точности путем пренебрежения в уравнении (1.13) слагаемыми порядка $O(\epsilon^2)$ приводит к значительной погрешности определения амплитуды искажения. На фиг. 5 видно существенное расхождение результатов, полученных с использованием полного (1) и упрощенного (2) указанным способом уравнения (1.13).

Режимы колебаний искажения $\epsilon(t)$ можно также описать с помощью зависимостей максимальной на периоде изменения давления величины искажения ϵ_T ($\epsilon_T = \max_{(k-1)T \leq t \leq kT} |\epsilon(t)|$, k – номер периода) от значения начального радиуса R_0 , представленных на фиг. 6. Значения ϵ_T на фиг. 6 определяются при достаточно большом чис-

ле k , когда колебания приобретают выраженный периодический (или аperiodический) характер. Для $\Delta p = 0.095$ МПа (фиг. 6, а) в интервале $8.11 < R_0 < 8.13$ мкм наблюдаются колебания с периодом T , затем на небольшом интервале $8.13 < R_0 < 8.133$ мкм – колебания с периодом $2T$. Дальнейшее увеличение R_0 приводит к аperiodическим колебаниям с ограниченной величиной искажения $\varepsilon(t)$. Совокупность всех значений ε_T , наблюдаемых на аperiodическом режиме колебаний, показана затемненной областью. Для $\Delta p = 0.11, 0.13$ МПа (фиг. 6, б, в) аperiodические колебания не возникают, но наблюдаются интервалы изменения R_0 , где колебания имеют периодический характер с периодами T и $2T$, а также интервалы, где колебания затухают.

Заключение. Разработана математическая модель эллипсоидальных колебаний пузырька газа в жидкости, в которой вязкость жидкости учитывается через динамическое граничное условие на поверхности пузырька. Вне межфазной границы движение жидкости предполагается потенциальным. Сжимаемость жидкости учитывается только в дальней от пузырька области. В уравнениях учтены члены второго порядка малости по отношению к амплитуде искажения сферической формы пузырька.

В рамках данной модели изучены эллипсоидальные колебания воздушного пузырька в воде при периодическом изменении давления в жидкости со значениями частоты и амплитуды, близкими к тем, при которых возникает явление однопузырьковой сонолюминесценции. Установлено, что при значениях амплитуды изменения давления жидкости и начального радиуса, лежащих за границей области линейно-устойчивых сферических колебаний, наблюдаются нелинейные несферические колебания с ограниченной амплитудой искажения сферической формы. Показано, что такие колебания могут иметь период, равный одному и двум периодам изменения давления в жидкости, или быть аperiodическими.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00415) и программы фундаментальных исследований Отделения ЭММиПУ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Putterman S.J., Weninger K.P. Sonoluminescence: How bubbles turn sound into light // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. V. 32. P. 445–476.
2. Маргулис М. А. Сонолюминесценция // Успехи физ. наук. 2000. Т. 170. № 3. С. 263–287.
3. Brenner M.P., Lohse D., Dupont T.F. Bubble shape oscillations and the onset of sonoluminescence // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. № 5. P. 954–957.
4. Wu C.C., Roberts P.H. Bubble shape instability and sonoluminescence // Phys. Lett. A. 1998. V. 250. P. 131–136.
5. Hao Y., Prosperetti A. The effect of viscosity on the spherical stability of oscillating gas bubbles // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 6. P. 1309–1317.
6. Ильгамов М.А., Аганин А.А., Косолапова Л.А. и др. Модели динамики несферического пузырька с учетом вязкости жидкости // Тр. Мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 16. Модели механики сплошной среды. Матер. 16-й сессии Междунар. школы по моделям механики сплошной среды, Казань, 2002. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 2002. С. 192–201.
7. Ильгамов М.А., Насибуллаева Э.Ш. Нелинейный аналог уравнения Плессета для несферического движения газового пузырька // Тр. ин-та механики УНЦ РАН. Уфа: Гилем, 2003. Вып. 3. С. 164–177.
8. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
9. Holt R.G., Gaitan D.F. Observation of stability boundaries in the parameter space of single bubble sonoluminescence // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. № 18. P. 3791–3794.