

УДК 533.6.013.42

© 2005 г. В. В. ВЕДЕНЕЕВ

**ФЛАТТЕР ПЛАСТИНЫ, ИМЕЮЩЕЙ ФОРМУ ШИРОКОЙ ПОЛОСЫ,
В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА**

В линейной постановке исследуется устойчивость упругой пластины, имеющей форму широкой полосы, обтекаемой сверхзвуковым потоком невязкого газа. Для зависимости давления от прогиба пластины используется выражение, асимптотически точное для широких пластин. Получены два качественно различных типа неустойчивости – флаттер по одной форме колебаний, обусловленный отрицательным аэродинамическим демпфированием, и флаттер связанного типа, обусловленный взаимодействием форм колебаний. Для каждого типа найден критерий устойчивости и частота, при которой происходит наиболее интенсивный рост амплитуды колебаний.

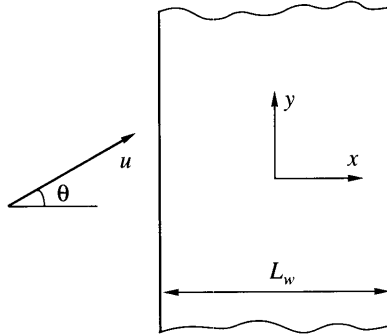
Ключевые слова: флаттер пластины, панельный флаттер, устойчивость пластины, глобальная неустойчивость, аэродинамическое демпфирование.

В работах [1–11] в различных постановках рассматривалась задача о флаттере упругой пластины, помещенной в сверхзвуковой поток газа. Решение сводилось к нахождению собственных значений некоторого оператора, от расположения которых на комплексной плоскости зависело наличие или отсутствие флаттера. Для давления газа как правило [2–4, 7–9] использовалась поршневая теория [3] и ее модификации, справедливые при достаточно больших числах Маха, а задача на собственные значения решалась численно.

В настоящей работе для решения задачи на собственные значения используется асимптотический метод для протяженных областей – теория глобальной неустойчивости [12; 13, § 65]; для давления газа используется выражение, асимптотически точное при ширине пластины $L \rightarrow \infty$ во всем диапазоне чисел Маха $M > 1$. Аналитически найдены условия, при которых пластина, имеющая форму широкой полосы, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа, имеет растущие глобальные собственные функции. Механизм их возникновения и перехода к неустойчивости имеет наглядную физическую интерпретацию и описан в настоящей работе.

1. Постановка задачи. В линейном приближении исследуется устойчивость упругой натянутой пластины, имеющей форму полосы бесконечного размаха, обтекаемой с одной стороны однородным сверхзвуковым потоком газа и уравновешенной с другой стороны постоянным давлением. Вектор скорости газа параллелен плоскости пластины, угол между направлением течения и кромками пластины равен $\pi/2 - \theta$ (фиг. 1), $0 \leq \theta < \pi/2$. Газ считается невязким и совершенным, течение – адиабатическим, пластина подчиняется классическому уравнению изгиба тонкой пластины.

Введем систему координат, связанную с пластиной: ось x направим в плоскости пластины перпендикулярно кромкам, y – параллельно кромкам, ось z – по нормали к пластине так, чтобы система координат xyz была положительно ориентированной. Будем считать, что в невозмущенном случае газ течет в области $z > 0$, а пластина занимает область $|x| \leq L_w/2$, $z = 0$, где L_w – ее ширина; при $|x| > L_w/2$ поверхность $z = 0$ считается абсолютно жесткой.



Фиг. 1. Конфигурация рассматриваемой системы

Дифференциальные уравнения, описывающие развитие малых возмущений, не зависящих от координаты y , в безразмерных переменных записываются так

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad z > 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + M \frac{\partial w}{\partial x}, \quad z = 0, \quad |x| < \frac{L}{2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad |x| > \frac{L}{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0, \quad z \rightarrow +\infty, \quad q = x, z, t \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + M \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + M_w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad z = 0, \quad |x| < \frac{L}{2}$$

$$F_1 w = 0, \quad z = 0, \quad x = -\frac{L}{2}, \quad F_2 w = 0, \quad z = 0, \quad x = \frac{L}{2}$$

Здесь φ и w – безразмерные потенциал возмущения газа и прогиб пластины. Первое уравнение представляет собой волновое уравнение, второе – условие непротекания, третье – условие затухания возмущений в газе вдали от пластины, четвертое – уравнение движения пластины, пятое – граничные условия на краях пластины (F_j – дифференциальные операторы, задающие по два условия на каждой кромке). Безразмерные параметры имеют вид

$$M = \frac{u \cos \theta}{a}, \quad M_w = \frac{\sqrt{\sigma/\rho_m}}{a}, \quad D = \frac{D_w}{a^2 \rho_m h^3}, \quad L = \frac{L_w}{h}, \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_m}$$

Здесь u и ρ – скорость и плотность газа, a – скорость звука в нем, σ – напряжение растяжения в срединной плоскости пластины, ρ_m и h – плотность материала и толщина пластины, $D_w = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ – ее изгибная жесткость. Параметр M_w представляет собой отношение скорости распространения длинных волн в пластине к скорости звука в газе. Выражение для μ приведено для случая одностороннего обтекания, в случае двустороннего обтекания пластины одним и тем же газом, движущимся с одинаковой скоростью, нужно использовать удвоенное значение μ . Параметры M , M_w , D и μ не зависят от толщины пластины. Будем считать, что $M > 1$, $L \gg 1$.

Заметим, что в реальных системах $\mu \ll 1/\sqrt{D}$. Например, для пластины из стали ($\rho_m = 8500$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0.3$), обтекаемой потоком воздуха при нормаль-

ных условиях ($\rho = 1 \text{ кг/м}^3$, $a = 300 \text{ м/с}$), получаем $D \approx 23.9$, $\mu \approx 1.2 \cdot 10^{-4}$. Это обстоятельство позволяет считать μ малым параметром при построении решений задачи (1.1) и будет использовано ниже.

2. Глобальная неустойчивость одномерных систем. В [12; 13, § 65] получены достаточные условия неустойчивости однородных состояний одномерных сильно протяженных систем общего вида. Найдены два типа неустойчивости: односторонняя, определяемая граничными условиями на одном из концов системы, и глобальная, не зависящая от граничных условий. Используемые обычно граничные условия для пластины – условия защемления ($\partial w/\partial x = w = 0$), шарнирного опирания ($\partial^2 w/\partial x^2 = w = 0$) и свободной границы ($\partial^2 w/\partial x^2 = \partial^3 w/\partial x^3 = 0$) – не удовлетворяют условию односторонней неустойчивости плоских возмущений.

Критерий глобальной неустойчивости состоит в следующем. Пусть имеется дисперсионное уравнение безграничной (т.е. занимающей всю пространственную ось x) системы $F(k, \omega) = 0$, где k – волновое число, ω – комплексная частота возмущения. При достаточно больших $\text{Im} \omega$ его решения $k_j = k_j(\omega)$, пронумерованные в порядке убывания мнимой части, распадаются на две группы: $\text{Im} k_j > 0$, $j = 1 \dots s$ и $\text{Im} k_j < 0$, $j = (s + 1) \dots N$, причем число корней в каждой группе равно числу граничных условий, задаваемых на одном из концов конечной системы. Каждый корень определяет некоторую ветвь многозначной аналитической функции $k = k(\omega)$. При уменьшении $\text{Im} \omega$ мнимые части корней из первой группы уменьшаются, а из второй увеличиваются, и при некотором ω будет выполнено равенство

$$\min_{1 \leq j \leq s} \text{Im} k_j = \text{Im} k_m = \text{Im} k_n = \max_{s+1 \leq j \leq N} \text{Im} k_j$$

Множество таких ω определяет кривую Ω на комплексной плоскости ω . При достаточно большой протяженности конечной системы часть ее спектра собственных частот располагается около этой кривой, чем чаще и ближе к ней, тем больше протяженность системы [12; 13, § 65]. При этом собственные функции, соответствующие указанным собственным частотам, при $L \rightarrow \infty$ вдали от границ системы имеют асимптотический вид

$$(C_m e^{ik_m(\omega)x} + C_n e^{ik_n(\omega)x}) e^{-i\omega t}$$

Здесь C_j – некоторые константы, i – мнимая единица. Для неустойчивости системы достаточно, чтобы часть кривой Ω лежала в области $\text{Im} \omega > 0$ – это и есть условие глобальной неустойчивости.

3. Дисперсионное уравнение безграничной пластины, обтекаемой газом. Перейдем к исследованию системы, описанной в разд. 1. Дисперсионное уравнение плоских возмущений безграничной по всем направлениям пластины, обтекаемой с одной стороны газом, записывается так [14, 15]

$$(Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu \frac{(\omega - Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2}} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь k – волновое число, ω – комплексная частота возмущения. Первое слагаемое выражает вклад упругих и инерционных сил пластины, второе – аэродинамических сил, действующих на нее. При $\text{Im} \omega \gg 1$ значение квадратного корня во втором слагаемом должно выбираться таким, чтобы его действительная часть была положительной; это условие является следствием затухания возмущений газа при удалении от пластины. При остальных $\text{Im} \omega$ ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы решения $k(\omega)$ уравнения (3.1) аналитически продолжались из области $\text{Im} \omega \gg 1$ вдоль лучей $\text{Re} \omega = \text{const}$, не переставая быть решениями (3.1).

Для изучения поведения корней $k(\omega)$ уравнения (3.1) рассмотрим уравнение

$$(Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) + \mu \frac{(\omega - Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2}} = 0 \quad (3.2)$$

Произведение левых частей (3.1) и (3.2) дает многочлен, имеющий при любых ω десять корней k , каждый из которых является корнем либо (3.1), либо (3.2). Рассмотрим на комплексной плоскости ω разрезы, разделяющие разные ветви радикала в (3.1) и (3.2), т.е. кривые, задаваемые уравнением

$$k(\omega)^2 - (\omega - Mk(\omega))^2 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \alpha < 0$$

Построив разрезы для каких-нибудь параметров задачи численно и взяв любое ω , лежащее выше них, можно убедиться, что из всех корней многочлена уравнению (3.1) принадлежат четыре корня, при больших $\text{Im} \omega$ асимптотически приближающихся к корням дисперсионного уравнения безграничной пластины в вакууме ($\mu = 0$), причем в каждой группе (разд. 2) лежат по два корня. Согласно общим представлениям и критерию глобальной неустойчивости, нужно следить за поведением только этих ветвей $k(\omega)$.

Если пара (ω, k) удовлетворяет дисперсионному уравнению (3.1), то ему также удовлетворяет пара (ω', k') , где штрих означает отражение относительной мнимой оси, поэтому кривая Ω симметрична относительно мнимой оси ω , что позволяет ограничиться поиском точек кривой Ω в правой полуплоскости комплексной плоскости ω .

4. Глобальная неустойчивость высокочастотных возмущений пластины конечной ширины в потоке газа. В настоящем разделе будем считать, что μ – малый параметр, и исключим из рассмотрения низкочастотные возмущения, предполагая, что $\omega \gg \mu$, $k \gg \mu$. Пусть $\omega \in \mathbf{R}$, $\omega > 0$. При $\mu = 0$ дисперсионное уравнение имеет четыре корня k , два из которых вещественные, другие два – чисто мнимые и комплексно-сопряженные. Обозначим $k_2 = k_2(\omega, 0)$ – вещественный положительный корень, а $k_3 = k_3(\omega, 0) = -k_2$ – отрицательный; им соответствуют собственные функции, имеющие вид гармонических волн, бегущих в противоположные стороны с одинаковой фазовой скоростью. Найдем приращения, получаемые корнями при малых $\mu \neq 0$ (т.е. при обтекании пластины газом) и частоте $\omega + i\delta$, $\delta > 0$, $\delta \ll 1$

$$k_j(\omega + i\delta, \mu) = k_j + i\delta \frac{\partial k_j}{\partial \omega} + \mu l(k_j)$$

Из дисперсионного уравнения (3.1) находим

$$l(k_j) = \frac{(\omega - Mk_j)^2}{2k_j(M_w^2 + 2Dk_j^2)\sqrt{k_j^2 - (\omega - Mk_j)^2}} \quad (4.1)$$

Легко проверить, что $\partial k_2/\partial \omega > 0$, $\partial k_3/\partial \omega < 0$. Тогда, если $\text{Im} l(k_2) < \text{Im} l(k_3)$, для заданного малого μ можно подобрать такое δ , что $\text{Im} k_2(\omega + i\delta, \mu) = \text{Im} k_3(\omega + i\delta, \mu)$, что и означает глобальную неустойчивость. Таким образом, достаточным условием неустойчивости является условие $\text{Im} l(k_2) < \text{Im} l(k_3)$; подставляя в него (4.1) и переобозначая $k_2 = k$, $k_3 = -k$, получаем

$$\text{Im} \left(\frac{(\omega + Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega + Mk)^2}} + \frac{(\omega - Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2}} \right) < 0 \quad (4.2)$$

Итак, нужно определить, при каких значениях параметров соотношение (4.2) выполняется хотя бы при одном вещественном положительном ω , имеющем порядок больший μ .

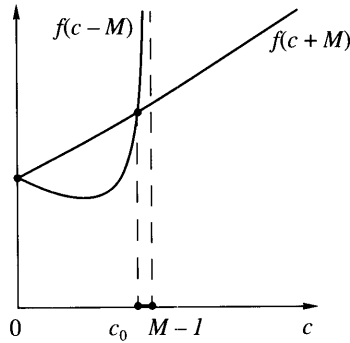
Физический смысл достаточного условия неустойчивости (4.2) состоит в следующем. Рассмотрим сначала пластину бесконечной ширины. Представим, что по ней бежит гармоническая волна $w(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ с фазовой скоростью $c = \omega/k = \sqrt{M_w^2 + Dk^2}$; $\omega, k \in \mathbf{R}$. Можно показать, что возмущение давления, создаваемое обтеканием газом волны, определяется формулой

$$p(x, t) = \mu \frac{(\omega - Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2}} e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.3)$$

Возмущение давления порождает в свою очередь изменение волнового числа, которое определяется формулой (4.1). Как видно из (4.1) и (4.3), пространственный рост или затухание волны, определяемое знаком $\text{Im}l(k)$, зависит от характера течения газа по отношению к волне. Если течение дозвуковое, т.е. $|M - c| < 1$, то возмущение давления находится в фазе с прогибом пластины и не приводит к затуханию или росту волны. Если же течение сверхзвуковое, то фаза давления сдвинута на $\pi/2$ по отношению к фазе волны, что приводит к появлению мнимой части волнового числа k . В этом случае пространственное затухание или усиление волны зависит от направления течения газа по отношению к волне и от направления движения самой волны. Если они совпадают, то газ совершает положительную работу, и волна усиливается, если же они противоположны, то газ совершает отрицательную работу, и волна затухает. Таким образом, волна, движущаяся против потока газа, всегда испытывает с его стороны сопротивление и затухает; волна, движущаяся в ту же сторону, что и поток, усиливается, если газ движется быстрее волны ($M - c > 1$), и затухает, если волна движется быстрее потока ($M - c < -1$).

Рассмотрим теперь пластину большой, но конечной ширины. Механизм образования ее глобальной собственной функции, построенной согласно [12; 13, § 65], состоит в следующем. Волна, бегущая по пластине в ту же сторону, что и газ, отражается от ее задней кромки и порождает волну, бегущую в обратную сторону. Она, в свою очередь, отражается от передней кромки и порождает исходную волну, но, вообще говоря, с другой амплитудой. В результате описанного процесса взаимного превращения двух волн с учетом отражения от кромок пластины образуется глобальная собственная функция. Если принять амплитуду начальной волны за единицу, то амплитуда отраженной волны равна $A_3 e^{-L \text{Im}k_2}$, амплитуда дважды отраженной волны равна $A_3 e^{-L \text{Im}k_2} A_2 e^{L \text{Im}k_3}$. Здесь A_2, A_3 – коэффициенты отражения от передней и задней кромки пластины. Тогда при больших L условием увеличения амплитуды при двойном отражении (т.е. условием роста глобальной собственной функции) будет неравенство $\text{Im}(k_2 - k_3) = \text{Im}(l(k_2) - l(k_3)) < 0$, которое эквивалентно (4.2).

Перейдем к исследованию неравенства (4.2). Для его выполнения нужно, чтобы и первое, и второе слагаемые были комплексными, т.е. течение газа было сверхзвуковым по отношению и к волне, бегущей против потока, и к волне, бегущей вдоль потока. Знаки квадратных корней в (4.2) определяются выбором ветвей $k(\omega)$, который должен быть осуществлен так, чтобы при больших $\text{Im} \omega$ они были корнями дисперсионного уравнения (3.1). С другой стороны, приведенные выше рассуждения показывают, что из физических соображений выбор ветвей должен быть сделан следующим образом: мнимая часть первого радикала в (4.2) всегда отрицательна, второго – отрицательна при $M - c < -1$ и положительна при $M - c > 1$. Численные исследования поведения решений (3.1) при изменении $\text{Im} \omega$ полностью подтверждают такой выбор. Таким



Фиг. 2. Графики функций $f(c - M)$ и $f(c + M)$

образом, неравенство (4.2) может быть удовлетворено только при $M - c > 1$. В этом случае оно переписывается так

$$f(c + M) < f(c - M) \tag{4.4}$$

Здесь $f(x) = x^2/\sqrt{x^2 - 1}$, причем значение квадратного корня выбирается положительным. Неравенство (4.4) выполнено при $c_0 < c < M - 1$, где c_0 – абсцисса точки пересечения графиков (фиг. 2). Таким образом, условие неустойчивости выполнено, если $c(k) = \sqrt{M_w^2 + Dk^2} < M - 1$ при некотором k . Учитывая что k должно иметь порядок, ббльший μ , получаем, что глобальная неустойчивость высокочастотных возмущений имеет место, если $M > M_w + 1 + \chi(D, M_w, \mu)$, где $\chi > 0$ – малая добавка, точное значение которой может быть найдено численно непосредственно из уравнения (3.1).

5. Скорость роста высокочастотных возмущений. Считая, что система находится в области глобальной неустойчивости высокочастотных возмущений, полученной в предыдущем разделе, найдем форму кривой Ω , около которой располагаются собственные частоты системы (разд. 2). В области $\omega \gg \mu$ она задается условием

$$\text{Im}k_1 > \text{Im}k_2 = \text{Im}k_3 > \text{Im}k_4 \tag{5.1}$$

Как будет показано в разд. 6, в области малых частот Ω может определяться другим выражением, поэтому для определенности ту ее часть, которая задается (5.1), будем обозначать Ω_1 . Считая частоту ω вещественной и положительной, имеем следующее разложение волнового числа по приращению частоты $i\delta$:

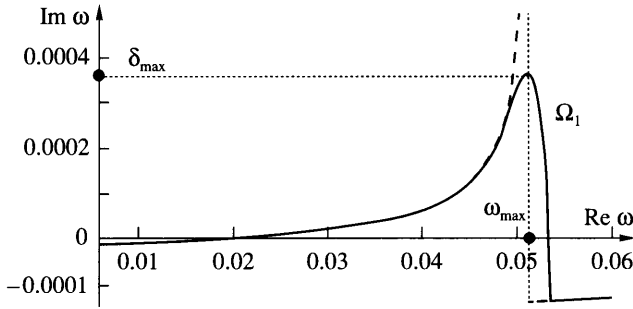
$$k_2(\omega + i\delta, \mu) = k_2(\omega, \mu) + i\delta \frac{\partial k_2(\omega, 0)}{\partial \omega}$$

$$k_3(\omega + i\delta, \mu) = k_3(\omega, \mu) + i\delta \frac{\partial k_3(\omega, 0)}{\partial \omega}$$

Замечая, что $\partial k_2(\omega, 0)/\partial \omega = -\partial k_3(\omega, 0)/\partial \omega$ и пользуясь (5.1), получаем:

$$\delta(\omega) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial k_2(\omega, 0)}{\partial \omega} \right)^{-1} \text{Im}(k_2(\omega, \mu) - k_3(\omega, \mu)) \tag{5.2}$$

Выражение (5.2) определяет кривую Ω_1 : она состоит из точек $\omega + i\delta(\omega)$, где $\omega \in \mathbf{R}$, $\omega \gg \mu$.



Фиг. 3. Часть кривой Ω_1 , рассчитанная для параметров (5.4). Сплошная линия – $k_2(\omega, \mu)$ рассчитана по (3.1), штриховая – по (5.3)

Из результатов разд. 4 (фиг. 2) следует, что неравенство $\delta(\omega) > 0$ может выполняться лишь в окрестности точки ω_{\max} , определяемой равенством

$$c(\omega_{\max}) = M - 1 \Rightarrow \omega_{\max} = (M - 1) \sqrt{((M - 1)^2 - M_w^2) / D}$$

Однако в этой окрестности для малых, но конечных μ нельзя пользоваться разложением

$$k_2(\omega, \mu) = k_2(\omega, 0) + \mu l(k_2(\omega, 0)) \tag{5.3}$$

где $l(k_2(\omega, 0))$ определяется из (4.1), так как при $c(\omega) \rightarrow M - 1$ получаем, что $l(k_2(\omega, 0)) \rightarrow -i\infty$ и приближение (5.3) теряет силу. С физической точки зрения это является следствием "резонанса" между волнами, распространяющимися в пластине и в газе. Построение кривой Ω_1 и вычисление максимального показателя роста (т.е. коэффициента демпфирования, взятого с обратным знаком) высокочастотных собственных функций $\delta_{\max} = \max_{\omega \in \mathbf{R}, \omega \geq \mu} \delta(\omega)$ для конкретных значений параметров может быть

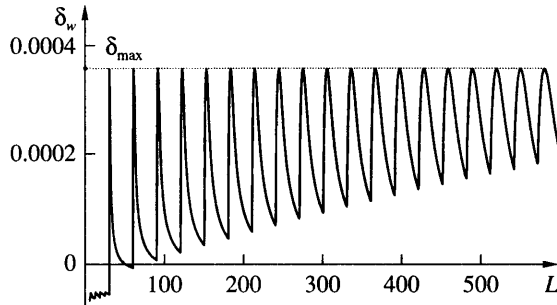
проведено численно путем решения дисперсионного уравнения (3.1) относительно k и подстановкой полученных значений в (5.2). В качестве примера на фиг. 3 сплошной линией показана часть Ω_1 для параметров

$$M = 1.5, \quad M_w = 0, \quad D = 23.9, \quad \mu = 1.2 \cdot 10^{-4} \tag{5.4}$$

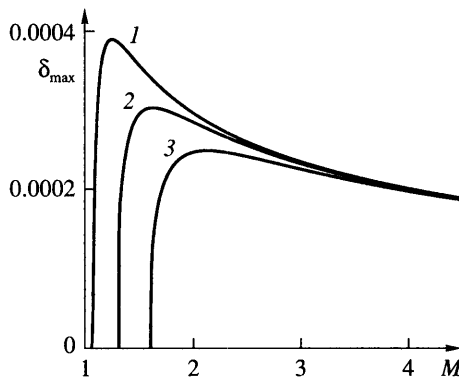
откуда получаем $\delta_{\max} \approx 3.6 \cdot 10^{-4}$. Для сравнения штриховой линией показана та же кривая, полученная с использованием выражения (5.3). Все точки кривой Ω_1 , не попавшие в показанный участок плоскости ω , имеют отрицательную мнимую часть. При малых числах Маха ($M \sim 1.1$) точка достижения максимума показателя роста смещена правее ω_{\max} , хотя и близка к ней; в этом смысле обозначение ω_{\max} условно.

Рассмотрим дискретный спектр собственных частот системы. При отсутствии газа собственные частоты ω_n расположены на вещественной оси ω , причем $\omega_n \sim (n/L)^2$ при $L \rightarrow \infty$. При наличии газа собственные частоты, удовлетворяющие условию $\omega \gg \mu$, в первом приближении при больших L лежат на кривой Ω_1 и имеют вид $\omega_n + i\delta(\omega_n)$, где $\delta(\omega_n)$ определяется формулой (5.2); при увеличении ширины пластины L частоты движутся по кривой Ω_1 в сторону уменьшения вещественной части. В результате возникает следующая зависимость показателя роста собственных функций пластины от ее ширины.

При достаточно малой ширине L (считается, что теория глобальной неустойчивости применима для рассматриваемых L) $\omega_n \gg \omega_{\max}$ для любого n , и положение пластины является устойчивым, поскольку $\delta(\omega_n) < 0$. При увеличении L первая собствен-



Фиг. 4. Зависимость $\delta_w(L)$ для параметров (5.4)



Фиг. 5. Зависимость $\delta_{\max}(M)$ для $D = 23.9$, $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$, $M_w = 0, 0.3, 0.6$ (кривые 1–3)

ная частота ω_1 приближается к ω_{\max} (фиг. 3), входит в область флаттера ($\delta(\omega_1) > 0$), проходит через точку максимального роста и снова уходит в область устойчивости. Затем тем же путем проходят частоты ω_2 , ω_3 и т.д. Поскольку расстояния между соседними частотами, лежащими в окрестности ω_{\max} , при $L \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, начиная с некоторого L пластина будет всегда находиться в области высокочастотного флаттера, а максимальный среди всех высокочастотных собственных функций показатель роста $\delta_w = \max_{n: \omega_n \geq \mu} \delta(\omega_n)$ при увеличении L будет иметь характер затухающих колебаний, асимптотически приближаясь к δ_{\max} .

Для примера на фиг. 4 показана зависимость δ_w от ширины шарнирно опертой пластины ($\omega_n = (\pi n/L) \sqrt{D(\pi n/L)^2 + M_w^2}$) для параметров (5.4). Каждому очередному локальному минимуму δ_w при увеличении L соответствует переход наиболее быстрого роста к следующей по номеру форме собственных колебаний.

Аналогично можно проследить за зависимостью собственных частот $\omega \geq \mu$ от числа Маха M . При этом собственные частоты колебаний пластины в вакууме ω_n остаются неподвижными, а кривая Ω_1 смещается вправо и деформируется. Зависимость $\delta_w(M)$ также имеет колебательный характер, однако максимальный показатель роста δ_{\max} меняется при изменении M (фиг. 5).

Из качественного характера зависимости $\delta_{\max}(M)$ (фиг. 5) можно выяснить зависимость максимального показателя роста от угла натекания θ (фиг. 1). При каждом M_w

существует такое $M = M_{\max}(M_w, D, \mu)$, что максимальный показатель роста собственных функций δ_{\max} является наибольшим среди всех M . Отсюда следует, что при заданных параметрах $M^* > M_{\max}$ ($M^* = u/a$ – число Маха, вычисленное по отношению к полному вектору скорости), M_w, D, μ и варьируемом угле натекания θ , возмущения, не зависящие от координаты y , имеют наибольшую скорость роста при $\theta = \arccos(M_{\max}/M^*)$.

6. Глобальная неустойчивость низкочастотных возмущений. Рассмотрим случай низкочастотных возмущений, когда второе слагаемое в (3.1) не является малым по сравнению с первым.

Приведем сначала результаты численного исследования поведения $k(\omega)$ при малых ω для параметров (5.4). Как следует из предыдущих разделов, при достаточно больших ω кривая Ω определяется условием (5.1) и состоит из точек Ω_1 . Будем двигаться вдоль Ω_1 в сторону уменьшения $\text{Re}\omega$. Тогда (5.1) будет выполняться лишь до некоторого ω , определяемого условием $\text{Im}k_1 > \text{Im}k_2 = \text{Im}k_3 = \text{Im}k_4$ и являющимся концом кривой Ω_1 . При дальнейшем уменьшении $\text{Re}\omega$ взаимное расположение ветвей k_3 и k_4 меняется, и точки кривой Ω определяются условием

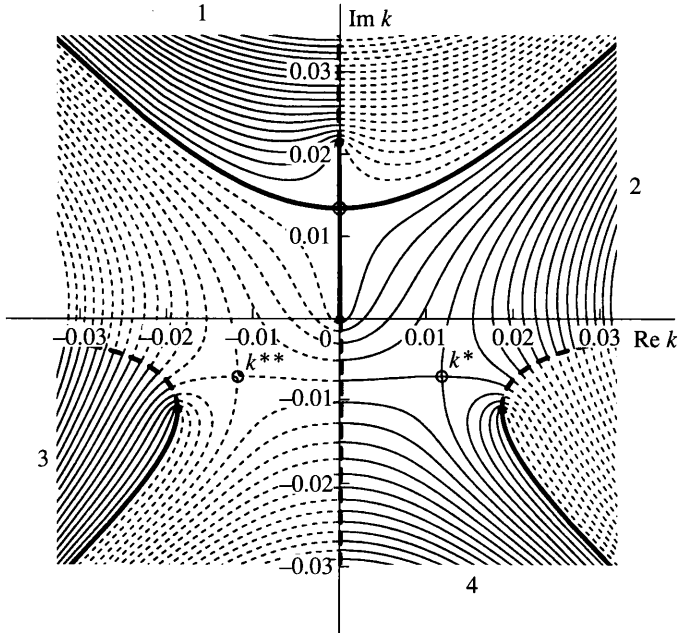
$$\text{Im}k_1 > \text{Im}k_2 = \text{Im}k_4 > \text{Im}k_3 \quad (6.1)$$

Обозначим Ω_2 кривую, определяемую (6.1). Тогда Ω состоит из объединения Ω_1 и Ω_2 , а в точке их соединения имеет излом. Физический смысл изменения взаимного расположения $\text{Im}k_3$ и $\text{Im}k_4$ состоит в следующем. В отсутствие газа при малых вещественных ω волна, соответствующая ветви k_3 , имеет постоянную в пространстве амплитуду, а соответствующая k_4 медленно затухает. Как было показано в разд. 4, под действием газа волна, соответствующая k_3 , также становится затухающей, причем, поскольку при малых ω взаимодействие между волной и газом будет сильным, ее затухание имеет такой же порядок, как затухание волны k_4 . Смена неравенства $\text{Im}k_3 > \text{Im}k_4$ на $\text{Im}k_3 < \text{Im}k_4$ говорит о том, что при малых частотах затухание волны k_3 под действием газа становится более сильным, чем волны k_4 , и глобальные собственные функции образуют волны k_2 и k_4 , а не k_2 и k_3 .

Рассмотрим для параметров (5.4) структуру линий уровня функции $\text{Re}\omega(k)$, рассчитанную численно и показанную на фиг. 6. В четвертой четверти плоскости k лежит точка ветвления $k^* = k_2 = k_4 = 0.0118 - 0.068i$, которой соответствует значение $\omega^* = 0.0013 + 7.72 \cdot 10^{-4}i$, являющееся концом Ω_2 . Рассчитанная кривая Ω_2 и часть Ω_1 , лежащая в области малых ω , показаны на фиг. 7. Так как $\text{Im}\omega^* > 0$, при параметрах (5.4) низкочастотные возмущения глобально неустойчивы, причем, поскольку значение $\text{Im}\omega^*$ более чем в 2 раза превышает значение δ_{\max} (фиг. 3), флаттер, возникающий при малых частотах, является для параметров (5.4) более сильным по сравнению с высокочастотным флаттером.

Пусть теперь значения параметров задачи произвольны. Численные исследования поведения $k_j(\omega)$ показали, что точка ветвления k_2 и k_4 – единственно возможная точка ветвления корней из разных групп, лежащая в области $\text{Im}\omega > 0$. Если эта точка ветвления существует, то максимум мнимых частей ω , лежащих на кривой Ω_2 , достигается на ее конце – в точке ветвления. Исследуем ее положение на комплексной плоскости ω . Предполагая, что $|k| \gg |\omega|$, упростим дисперсионное уравнение (3.1), пренебрегая ω во втором слагаемом и выбирая определенную ветвь квадратного корня

$$Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2 + i\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} k = 0 \quad (6.2)$$



Фиг. 6. Линии уровня $\text{Re} \omega(k)$ в области малых k . Преобразы лучей $\text{Re} \omega = \text{const} > 0$ показаны при $\text{Im} \omega > 0$ сплошными, при $\text{Im} \omega < 0$ – штриховыми линиями; преобразы $\text{Re} \omega = 0$ – жирными сплошными; преобразы $\text{Im} \omega = 0$, $\text{Re} \omega > 0$ – жирными штриховыми линиями. Точками показаны преобразы $\omega = 0$, кружками – точки ветвления. Цифрами 1–4 указан номер ветви $k_j(\omega)$, отображающей область $\text{Re} \omega > 0$, $\text{Im} \omega > 0$ в область, содержащую этот номер

Точки ветвления (6.2) определяются системой

$$4Dk^3 + 2M_w^2 k + i\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} = 0 \quad (6.3)$$

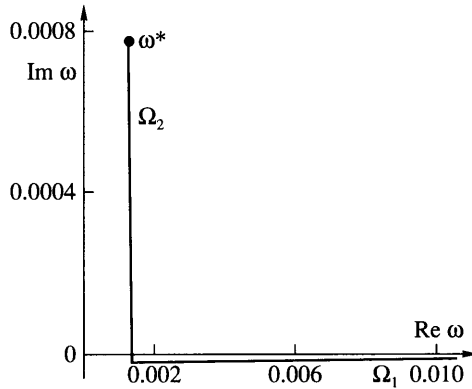
$$2M_w^2 k^2 + 3i\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} k = 4\omega^2$$

Первое уравнение в (6.3) получено дифференцированием (6.2) по k , а второе – вычитанием из (6.2) первого уравнения (6.3), умноженного на $k/4$.

Рассмотрим сначала случай $M_w = 0$. Тогда одно из решений (6.3) имеет вид

$$k^* = \left(\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{1/3} (4D)^{-1/3} e^{-i\pi/6}, \quad \omega^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{2/3} (4D)^{-1/6} e^{i\pi/6} \quad (6.4)$$

Значения (6.4) при малых μ удовлетворяют условию $|k| \gg |\omega|$, поэтому приближенно совпадают с одной из точек ветвления функции $k(\omega)$, полученной из произведения (3.1) и (3.2). При параметрах (5.4) выражение (6.4) дает значения $k^* = 0.0118 - 0.0068i$, $\omega^* = 0.0013 + 7.85 \cdot 10^{-4}i$, близкие к нужной точке ветвления k_2 и k_4 (фиг. 6). Отсюда следует, что, во-первых, (6.4) приближенно дает искомую точку ветвления и при любых других значениях параметров M , D , μ , $M_w = 0$, а во-вторых, если выполнено ус-



Фиг. 7. Кривая Ω_2 и часть кривой Ω_1 , лежащая в области малых ω , рассчитанные для параметров (5.4)

ловие $|k| \gg |\omega|$, то из всех решений (6.3) при $M_w \neq 0$ приближением к искомой точке ветвления будет то, которое может быть получено из (6.4) непрерывным продолжением при изменении M_w от нуля до заданного значения. Из (6.4) видно, что точка ветвления (k^*, ω^*) при $M_w = 0$ всегда лежит в области $\text{Im } \omega > 0$, и низкочастотные возмущения, таким образом, глобально неустойчивы. Система (6.3) имеет также другое решение (k^{**}, ω^{**}) , отличающееся от (6.4) тем, что k отражено относительно мнимой, а ω – относительно вещественной оси. Эта точка ветвления "смешанная" в том смысле, что в ней корень k_3 сливается с ветвью, образованной при ветвлении корней k_2 и k_4 в точке (6.4) (фиг. 6). Третье решение (6.3) дает точку ветвления корней k_1 и k_2 , лежащих в одной группе; эта точка не имеет отношения к глобальной неустойчивости и дальше рассматриваться не будет.

Изучим изменение положения точек ветвления при увеличении M_w . При

$$M_w < \left(\frac{\sqrt{54}}{4}\right)^{1/3} \left(\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}}\right)^{1/3} D^{1/6}$$

с помощью принципа аргумента, примененного к первому уравнению (6.3), можно показать, что для точки ветвления $k^*(M_w)$, получаемой непрерывным продолжением (6.4), выполнены неравенства $\text{Re } k^* > 0$, $\text{Im } k^* < 0$, причем $\text{Im } k^*(M_w)$ монотонно убывает при увеличении M_w . При этих условиях из второго уравнения следует, что ω^2 не может принимать вещественные значения, откуда $\text{Re } \omega^* > 0$, $\text{Im } \omega^* > 0$, т.е. низкочастотные возмущения остаются глобально неустойчивыми. Точка ветвления (k^{**}, ω^{**}) по-прежнему будет зеркальным отражением точки (k^*, ω^*) относительно мнимой оси k и вещественной оси ω .

При

$$M_w = \left(\frac{\sqrt{54}}{4}\right)^{1/3} \left(\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}}\right)^{1/3} D^{1/6} \tag{6.5}$$

точки ветвления (k^*, ω^*) и (k^{**}, ω^{**}) сливаются в одну тройную точку ветвления

$$k^* = k^{**} = -\frac{i}{2} \left(\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}}\right)^{1/3} D^{-1/3}, \quad \omega^* = \omega^{**} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}}\right)^{2/3} D^{-1/6}$$

в которой совпадают корни k_2, k_3 и k_4 . Значение (6.5) лежит на границе области глобальной неустойчивости, поскольку слияние происходит на вещественной оси ω .

При дальнейшем увеличении M_w слившиеся точки ветвления расходятся, двигаясь вдоль мнимой оси на плоскости k и вдоль вещественной – на плоскости ω , т.е. перпендикулярно своим прежним траекториям. Роли этих точек изменятся. В первой точке ветвления, движущейся в сторону уменьшения $\text{Im}k$, сливаются корни k_3 и k_4 (это можно установить, построив численно для каких-нибудь параметров задачи линии уровня, аналогичные фиг. 6); поскольку они лежат в одной группе, эта точка не имеет отношения к глобальной неустойчивости. Вторая точка движется в сторону увеличения $\text{Im}k$ и уменьшения $\text{Re}\omega$ и является точкой ветвления корней k_2 и k_3 . При достаточно больших M_w условие $|k| \gg |\omega|$ не выполняется, и (6.2) плохо приближает дисперсионное уравнение (3.1). Однако численные исследования показывают, что точка ветвления корней k_2 и k_3 , вычисленная из (3.1), смещена с вещественной оси ω в нижнюю полуплоскость и не приводит к неустойчивости. Эта точка является концом кривой Ω_1 , которая, таким образом, может выходить в верхнюю полуплоскость ω только в области высокочастотных возмущений. Поскольку кривая Ω_2 при этом не содержит ни одной точки, и если M_w превышает значение, определяемое (6.5), то низкочастотные возмущения не будут глобально неустойчивыми.

7. Обсуждение результатов. Рассмотрим сначала вопрос об использовании приближенных аэродинамических теорий в задачах о флаттере пластин. В настоящей работе использован следующий метод определения давления, действующего на колеблющуюся пластину: колебание представлялось в виде суперпозиции бегущих волн, а давление считалось суперпозицией давлений (4.3), действующих на эти волны. Пользуясь точной зависимостью давления от прогиба [1, 3, 6], можно показать, что при $\text{Im}\omega > 0$ такой метод при $L \rightarrow \infty$ асимптотически точен. Допустим, что вместо точного выражения (4.3) для давлений, действующих на бегущие волны, использовалась бы зависимость, выражающая давление через прогиб пластины в виде

$$p(x, t) = C_1 \frac{\partial w}{\partial x} + C_2 \frac{\partial w}{\partial t} \quad (7.1)$$

где C_j – функции параметров задачи, $C_2 \geq 0$. В частности, такой вид имеют поршневая теория и некоторые другие приближения точной зависимости при больших числах Маха. Тогда аналог неравенства (4.2) принимает вид $\text{Im}(i(C_1k + C_2\omega) + i(-C_1k + C_2\omega)) < 0$ и вся кривая Ω_1 лежит в области $\text{Im}\omega \leq 0$. Таким образом, высокочастотный флаттер не может быть получен при использовании (7.1); по-видимому, в этом заключается основной недостаток зависимостей такого вида. Теория, разработанная в [10], правильно описывает высокочастотный флаттер и дает критерий, совпадающий с полученным в настоящей работе.

Низкочастотный флаттер корректно описывается зависимостями вида (7.1), поскольку при его исследовании использовано приближение (6.2) дисперсионного уравнения, которое можно трактовать как точное дисперсионное уравнение, полученное при использовании квазистатического приближения вида (7.1), где $C_1 = \mu M^2 / \sqrt{M^2 - 1}$, $C_2 = 0$.

Выясним теперь физическое различие между высокочастотным и низкочастотным флаттером. В [5, 16] описаны два типа флаттера пластины. Первый – флаттер с одной степенью свободы – возникает из-за перехода одной из собственных частот в область $\text{Im}\omega > 0$ под действием отрицательного аэродинамического демпфирования соответствующей собственной формы колебаний пластины. При этом какое-либо взаимодействие между формами колебаний не происходит. Второй тип – флаттер связанного типа, который является следствием взаимодействия двух собственных форм колебаний. Рассмотрим механизм потери устойчивости при этом типе флаттера [2, 3, 9]. При достаточно малом числе Маха или ширине пластины все собственные частоты имеют одинаковую отрицательную мнимую часть. При увеличении M или L первая и вторая собственные частоты движутся навстречу друг к другу, при-

чем их траектории параллельны вещественной оси ω . В определенный момент они встречаются и далее расходятся в направлениях, перпендикулярных начальным: одна частота движется в сторону уменьшения мнимой части, вторая – в сторону увеличения. Когда последняя пересекает вещественную ось, происходит потеря устойчивости.

Докажем, что полученные в настоящей работе высокочастотный и низкочастотный флаттер являются соответственно флаттером с одной степенью свободы и флаттером связанного типа. Рассмотрим сначала высокочастотный флаттер. Несложно понять, что описанное в разд. 4 строение высокочастотной растущей собственной функции совпадает со строением собственных функций пластины, находящейся в вакууме. Отличие состоит в том, что в вакууме амплитуда волны после двух отражений совпадает с исходной амплитудой, а в газе она увеличивается, в результате чего происходит временной рост собственной функции. Таким образом, высокочастотные флаттерные колебания вызваны отрицательным аэродинамическим демпфированием одной или нескольких собственных форм колебаний и происходят без взаимодействия между формами.

Из результатов [2, 3, 9], полученных в приближении поршневой теории следует, что пластина, имеющая форму полосы достаточно большой ширины, находится в области флаттера, имеющего связанный тип. Поскольку высокочастотный флаттер не может быть получен в приближении поршневой теории, флаттер связанного типа является низкочастотным флаттером. Кроме того, пользуясь результатами [2], можно показать, что траектории, по которым при увеличении L движутся частоты растущих во времени собственных функций, качественно похожи на кривую Ω_2 (фиг. 7). Получаем, что понятия низкочастотного флаттера и флаттера связанного типа совпадают.

Полученное соответствие между типами флаттера объясняет то, что флаттер с одной степенью свободы не был описан в работах советских и российских авторов. В подавляющем большинстве работ были использованы зависимости вида (7.1), которые, как показано выше, не приводят к существованию флаттера с одной степенью свободы. Там же, где были использованы более точные зависимости давления от прогиба, при численном решении бралось недостаточное число членов ряда для получения высокочастотного флаттера. Отметим, что в руководствах по проектированию летательных аппаратов [17–19] для получения критерия флаттера обшивки используются квазистатическая и поршневая теории, поэтому возможность возникновения флаттера с одной степенью свободы не исключается.

Заключение. Исследована глобальная неустойчивость широкой упругой полосы, обтекаемой потоком газа. Показано, что возможны два типа неустойчивости – неустойчивость высокочастотных и низкочастотных возмущений; обе имеют колебательный характер и являются флаттером.

Критерий высокочастотного флаттера и частота, при которой происходит наиболее интенсивный рост собственных функций, приближенно имеют вид

$$M > M_w + 1, \quad \omega = (M - 1) \sqrt{((M - 1)^2 - M_w^2) / D}$$

Высокочастотный флаттер – следствие отрицательного аэродинамического демпфирования собственных колебаний пластины. Механизм образования растущих собственных функций заключается в циклических отражениях и взаимных превращениях двух бегущих в противоположные стороны волн, при которых происходит увеличение их амплитуд.

Описано строение спектра высокочастотных колебаний системы. При увеличении ширины пластины L зависимость от нее показателя роста наиболее быстро растущей высокочастотной собственной функции имеет колебательный характер; при-

чем при $L \rightarrow \infty$ эти колебания затухают, приближаясь к максимально возможному показателю роста, а номер наиболее быстро растущей собственной функции монотонно увеличивается. Получена зависимость показателя роста наиболее быстро растущей высокочастотной собственной функции от числа Маха M .

Критерий низкочастотного флаттера и его частота приближенно имеют вид

$$M_w < \left(\frac{\sqrt{54}}{4}\right)^{1/3} \left(\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2-1}}\right)^{1/3} D^{1/6}, \quad \omega = A \left(\mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2-1}}\right)^{2/3} D^{-1/6}$$

где A зависит от параметров задачи и меняется от 0.433 на границе области флаттера до 0.595 при $M_w = 0$. Низкочастотный флаттер возникает вследствие взаимодействия форм колебаний. Он хорошо описывается с помощью квазистатической зависимости давления газа от прогиба пластины, в то время как высокочастотный флаттер не может быть получен как с помощью квазистатической и поршневой теорий, так и любых приближений вида (7.1).

Автор благодарит А.Г. Куликовского за многочисленные обсуждения вопросов, рассмотренных в работе.

Работа поддержана грантом РФФИ № 05-01-00219 и грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1697.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nelson H.C., Cunnigham H.J. Theoretical investigation of flutter of two dimensional flat panels with one surface exposed to supersonic potential flow. NASA. 1956. Rep. № 1280. 24 p.¹
2. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 211–222.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров Л.Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. 1963. М.: ВИНТИ, 1965. С. 34–90.
5. Dowell E.H. Panel flutter: A review of the aeroelastic stability of plates and shells // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 3. P. 385–399. = Дауэлл. Панельный флаттер. Обзор исследований аэроупругой устойчивости пластин и оболочек // Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 3. С. 3–24.
6. Yang T.Y. Flutter of flat finite element panels in supersonic potential flow // AIAA Journal. 1975. V. 13. № 11. P. 1502–1507. = Янг. Исследование флаттера панелей в сверхзвуковом потенциальном потоке методом конечных элементов // Ракетная техника и космонавтика. 1975. Т. 13. № 11. С. 110–117.
7. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 67–122.
8. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 4. С. 40–44.
9. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Исследование собственных значений оператора в задачах панельного флаттера // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 1. С. 170–176.
10. Минасян Д.М., Минасян М.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа // Докл. НАН Армении. 2001. Т. 101. № 1. С. 49–54.
11. Минасян Д.М. Вычисление частот одномерных флаттерных колебаний конечной пластинки // Изв. НАН Армении. Сер. Механика. 2001. Т. 54. № 4. С. 26–33.

¹ Статья доступна в сети Интернет по адресу <http://naca.larc.nasa.gov/reports/1956/naca-report-1280/naca-report-1280.pdf>

12. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
13. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
14. Kornecki A. Aeroelastic and hydroelastic instabilities of infinitely long plates. II // Solid Mech. Archives. 1979. V. 4. № 4. P. 241–346.
15. Веденеев В.В. Неустойчивость безграничной упругой пластины, обтекаемой потоком газа // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 4. С. 19–28.
16. Panel flutter. NASA space vehicle design criteria (structures). NASA SP-8004. 1972².
17. Кан С.Н., Свердлов И.А. Расчет самолета на прочность. М.: Машиностроение, 1966. 520 с.
18. Вибрации в технике. Справочник (в 6 томах). Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов. М.: Машиностроение, 1980. 544 с.
19. Смирнов А.И. Аэроупругая устойчивость летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 231 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.2004

² Монография доступна в сети Интернет по адресу <http://trs.nis.nasa.gov/archive/00000117/01/sp8004.pdf>