

УДК 532.527:533.72:621.373.8

© 2005 г. Н. А. ВИННИЧЕНКО, Н. В. НИКИТИН, А. В. УВАРОВ

ВИХРЕВАЯ ДОРОЖКА КАРМАНА В КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОМ ГАЗЕ

Рассматривается задача обтекания цилиндра колебательно-неравновесным газом с образованием дорожки Кармана. На основе численного моделирования анализируются эффекты влияния релаксации на параметры потока: затухание и деформация вихрей. Предлагается теоретическое объяснение этих эффектов.

Ключевые слова: вихревая дорожка Кармана, неравновесный газ, колебательная релаксация, уравнения Навье-Стокса, метод виртуальных границ.

Изучение газодинамических течений неравновесного газа, т.е. газа с неравновесным запасом энергии во внутренних степенях свободы, представляет значительный интерес как для физики лазеров, так и в связи с проблемами скоростного движения летательных аппаратов. Очень наглядно влияние неравновесности может быть продемонстрировано на примере хорошо известных газодинамических течений, например вихревой дорожки Кармана. В работе [1] было проведено экспериментальное исследование спектра пульсаций скорости в дорожке Кармана и проведен сравнительный анализ спектров для равновесного и неравновесного течений. В эксперименте наблюдалось различное влияние неравновесности на спектр пульсаций в зависимости от состава газовой смеси и положения датчиков. Цель данной работы – теоретическое описание вязкого обтекания бесконечного цилиндра потоком неравновесного газа с различными условиями гетерогенной релаксации на поверхности цилиндра. Прямое сравнение с экспериментальными данными [1] невозможно, во-первых, из-за довольно большого влияния неконтролируемого разогрева обтекаемого цилиндра. Однако результаты проведенного исследования позволяют оценить влияние неравновесности, условий релаксации на поверхности и температурной зависимости времени релаксационного процесса на формирование дорожки Кармана.

1. Постановка задачи. Рассматривается двумерное обтекание цилиндра потоком вязкого колебательно-неравновесного газа в приближении, учитывающем слабое изменение плотности. Это приближение соответствует малым скоростям обтекания, большим временам релаксации и как следствие малому искажению вихрей. При числах Рейнольдса до 200 не возникает трехмерных структур [2], и течение в следе за цилиндром представляет собой вихревую дорожку Кармана, т.е. две параллельные цепочки вихрей, расположенных в шахматном порядке.

Используется система уравнений релаксационной гидродинамики, включающая уравнения непрерывности, Навье-Стокса, энергии, состояния и уравнение релаксации колебательной энергии:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\operatorname{Re} \rho} \Delta \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T + \frac{\varepsilon_0}{c_p T_0} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\text{PrRe}\rho} \frac{1}{\Delta T}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{x_0 \varepsilon - \varepsilon_{eq}(T)}{V_0 \tau} + \frac{\lambda'_v}{x_0 V_0 \rho} \frac{1}{\Delta \varepsilon} + \frac{x_0}{\varepsilon_0 V_0} I$$

$$\rho = \frac{p_0 m}{\rho_0 k T_0} \frac{1}{T}$$

Уравнения даны в безразмерном виде, \mathbf{v} , ρ , p , T и ε – соответственно скорость, плотность, давление, температура и колебательная энергия единицы массы газа, η , λ и λ'_v – коэффициенты вязкости, поступательной и колебательной теплопроводности, c_p – теплоемкость единицы массы при постоянном давлении, m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, τ – время релаксации, p_0 – постоянное давление невозмущенного потока, T_0 , ε_0 , ρ_0 – температура, колебательная энергия и плотность и скорость невозмущенного потока, $\varepsilon_{eq}(T)$ – равновесное значение колебательной энергии, соответствующее температуре T ($\varepsilon_0 > \varepsilon_{eq}(T)$), I – мощность накачки энергии в колебательные степени свободы, x_0 – диаметр цилиндра, Re и Pr – числа Рейнольдса и Прандтля. В уравнении релаксации стоит член $\lambda'_v \Delta \varepsilon$, а не $\lambda_v \Delta T_v$, так как в рассматриваемом диапазоне параметров колебательная температура T_v с хорошей степенью точности аппроксимируется линейной функцией колебательной энергии ε . Действительно,

$$\varepsilon = \frac{\hbar \omega}{m(\exp(\hbar \omega / k T_v) - 1)}, \quad \lambda'_v = \lambda_v \left(\frac{\partial T_v}{\partial \varepsilon} \right)$$

где $\hbar \omega$ – колебательный квант.

Параметры рассматриваемой задачи таковы, что максимальные изменения давления и плотности невелики: давление меняется лишь на 0.0002%, а плотность – на 20%. Это позволяет рассматривать газ как слабо сжимаемый, т.е. полагать, что $\rho = \rho(T) \sim 1/T$.

Схема области интегрирования показана на фиг. 1. Используются следующие граничные условия для скорости:

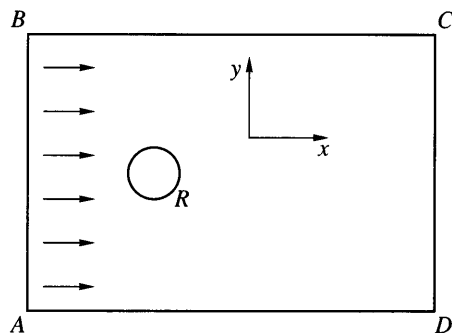
$$\mathbf{v} = 0, \quad (x, y) \in R$$

$$v_x = 1, \quad v_y = 0, \quad (x, y) \in AB$$

$$v_x = v(x), \quad v_y = 0, \quad (x, y) \in BC, AD$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in CD$$

где $v(x)$ – аналитическое решение задачи в отсутствие цилиндра, A – значение его второй производной в точках CD . “Мягкость” граничных условий на границе CD , т.е. наложение их на производные величин, а не на сами величины, необходимо для свободного прохождения вихрей дорожки Кармана через границу, в то время как предписываемые значения этих производных должны соответствовать параметрам невозмущенного потока релаксирующего газа.



Фиг. 1. Расчетная область

Аналогично получаются условия для температуры и колебательной энергии на внешних границах:

$$T = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad (x, y) \in AB$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in BC, AD$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = B, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = C, \quad (x, y) \in CD$$

где B и C – значения соответствующих вторых производных аналитического решения задачи без цилиндра.

Для определения температуры цилиндра используется условие разогрева поверхности цилиндра до температуры потока, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in R$$

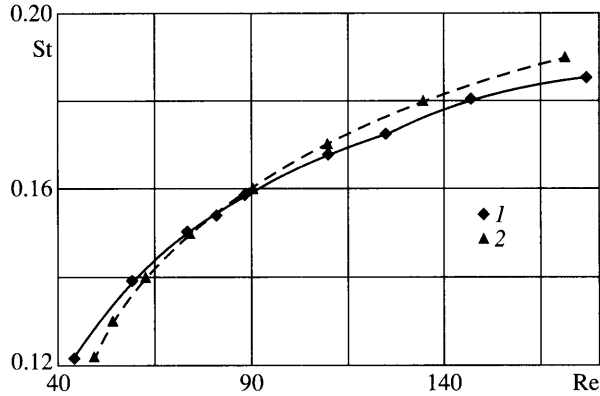
Поскольку в эксперименте условия гетерогенной релаксации на границе цилиндра неизвестны, рассматриваются предельные случаи этих условий, позволяющие оценить их влияние на параметры течения. Предельные варианты гетерогенной релаксации соответствуют условиям

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{eq}(T)}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in R$$

Это условия бесконечно быстрой гетерогенной релаксации и ее отсутствия соответственно.

Такие граничные условия соответствуют вязкому обтеканию твердого цилиндра, находящегося в неограниченном пространстве, потоком неравновесного газа с заданными параметрами, а также двум предельным случаям гетерогенной релаксации на цилиндре.

2. Математическое моделирование. Для решения поставленной задачи применялся метод виртуальных границ [3]. В этом методе уравнения решаются на простой декартовой сетке в прямоугольной области, включающей внутренность цилиндра. Граничные условия на поверхности цилиндра обеспечиваются путем введения в уравнения искусственных членов: в правую часть уравнений непрерывности, Навье–Стокса,



Фиг. 2. Зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса: 1 – численный расчет, 2 – экспериментальные данные

энергии и релаксации вводятся члены q , f , g , h соответственно. Эти члены не равны нулю лишь в тонком слое у границы цилиндра и не вносят каких-либо искажений в физическую картину обтекания. Однако их введение позволяет вести расчет для препятствия произвольно сложной формы, не отказываясь от декартовой сетки, что значительно упрощает алгоритм и увеличивает его эффективность.

Отличие от метода, описанного в [3], заключалось в наличии уравнений энергии и релаксации. Соответственно помимо членов f , обеспечивающих граничные условия прилипания, и членов q , компенсирующих небольшие нефизические источники массы от этих членов, оказалось необходимо введение членов g и h , представляющих граничные условия для температуры и колебательной энергии. Они вводятся аналогично членам f .

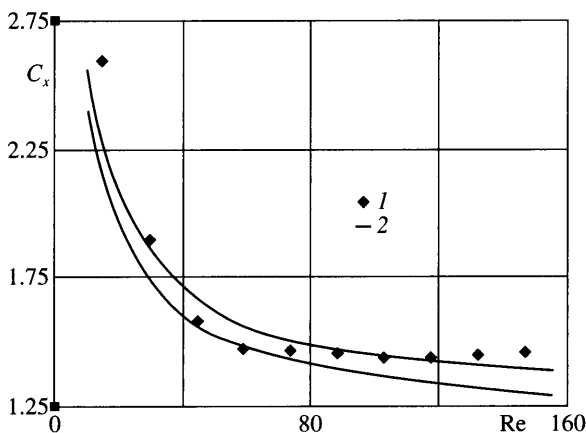
Использовалась неравномерная сетка, сгущающаяся по обеим осям к цилиндру. Размеры расчетной сетки: 240 на 170 узлов, они соответствуют области интегрирования 30 на 20 диаметров цилиндра, цилиндр сдвинут влево от центра области интегрирования, так как объект изучения – дорожка Кармана в следе за цилиндром.

Разностная схема интегрирования по времени соответствует приведенной в [3] с учетом уравнений энергии и релаксации. Значения давления вычисляются при помощи проекционного метода, т.е., используя решение уравнения Пуассона.

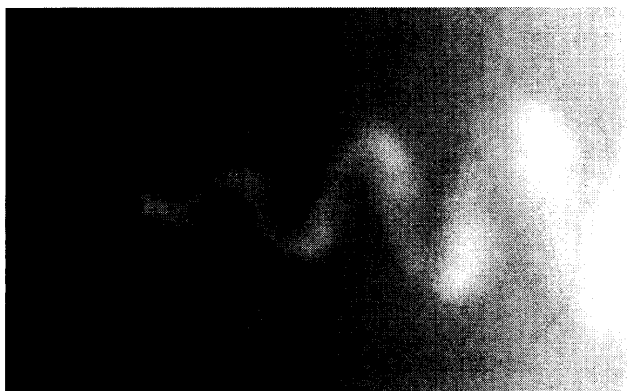
Обычно в задачах с образованием дорожки Кармана в качестве начальных условий используется стационарное решение задачи без препятствия (в данном случае это распределение неоднородно) с небольшими возмущениями параметров.

Для проверки работы программы были проведены расчеты числа Струхала $St = L/(V_0 T)$ (T – период колебаний, L – диаметр цилиндра) и коэффициента сопротивления для равновесного газа. Сравнение результатов численного моделирования для числа Струхала и экспериментальных данных, взятых из обзора [2], приведено на фиг. 2. Максимальное отклонение составляет 3%. Соотношение расчета коэффициента сопротивления и существующего в литературе [4, 5] разброса экспериментальных данных показано на фиг. 3.

3. Результаты численного моделирования. В отсутствие неравновесности картина течения представляет собой классическую дорожку Кармана с тем отличием, что из-за вязкости (которая не учитывается в известном аналитическом решении [6]) вихри с удалением от цилиндра затухают и немного расходятся в стороны, что и наблюдается в реальности. Наличие неравновесности несколько искажает это основ-



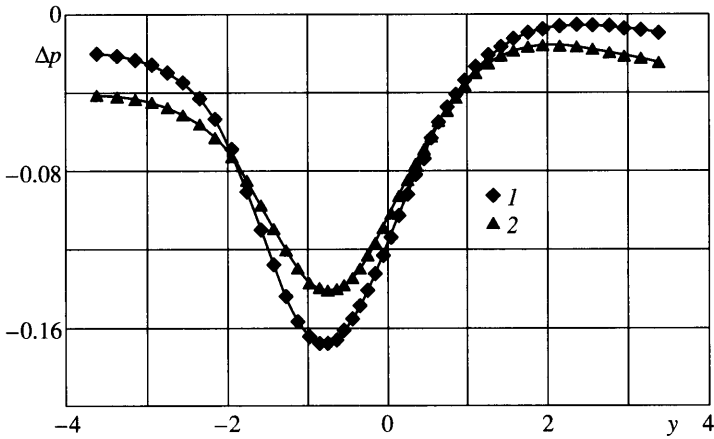
Фиг. 3. Коэффициент сопротивления: 1 – численный расчет, 2 – разброс имеющихся экспериментальных данных



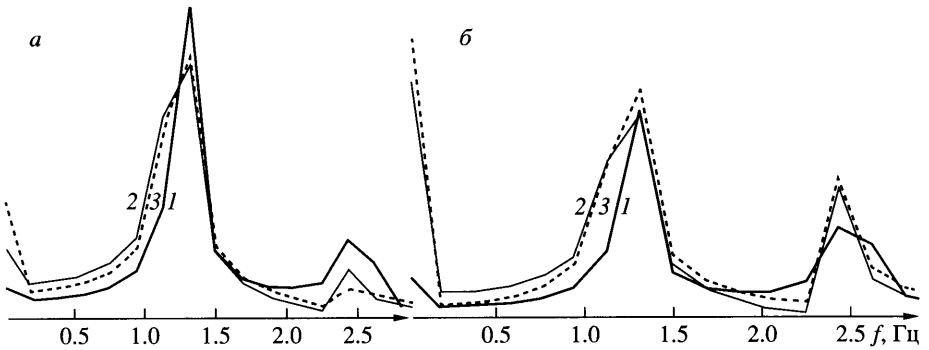
Фиг. 4. Температурное поле. Более светлые области соответствуют более высокой поступательной температуре

ное течение. Во-первых, газ в вихрях движется дольше, поэтому колебательной энергии в него успевает сброситься больше. Это приводит к нагреву района дорожки по сравнению с окружающим газом (фиг. 4). Здесь $Re = 75$, $Pr = 0.7$, $T_0 = 500$ К, $T_v(\epsilon_0) = 3000$ К, время релаксации τ в 15 раз больше периода колебаний дорожки. В свою очередь, нагрев приводит к уменьшению плотности газа в вихрях и сжатию их более плотным и холодным окружающим газом. Пульсации поперечной проекции скорости v_y , регистрировавшиеся в эксперименте [1], в результате этого эффекта будут затухать. Это нелинейный эффект, так как в отличие от звуковых и тепловых волн в линейном приближении в неравновесном газе вихри не затухают и не усиливаются, так как внутри вихря в линейном приближении не будет происходить изменения температуры и плотности.

Во-вторых, появляется эффект, связанный с продольным градиентом температуры, а следовательно, и плотности (см. фиг. 4). Поскольку температура слева направо увеличивается (в результате сброса энергии из колебательных степеней свободы), то плотность соответственно уменьшается. Это приводит к уменьшению числа Рейнольдса вдоль оси x и изменению свойств вихрей. Вихри деформируются – становятся



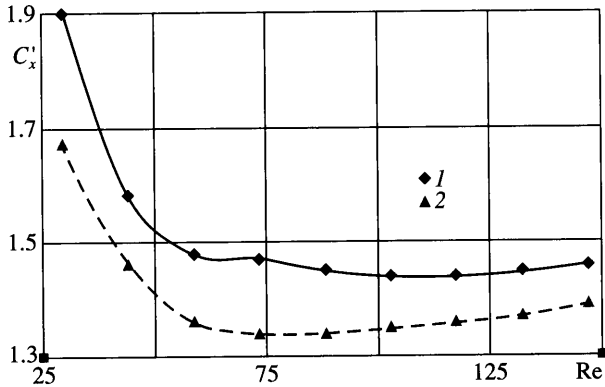
Фиг. 5. Изменение распределения давления $\Delta p = p - p_0/(\rho_0 v_0^2)$ вдоль оси y за счет деформации вихря вследствие уменьшения Re : 1 – равновесный газ, 2 – колебательно-неравновесный



Фиг. 6. Изменение спектра пульсаций скорости: 1 – равновесный газ, 2 и 3 – колебательно-неравновесный газ с различными вариантами гетерогенной релаксации на цилиндре

ся менее интенсивными в центре, но более интенсивными по краям. Из распределения давления в вихре вдоль оси, перпендикулярной течению (фиг. 5), видно, что в неравновесном газе вихрь слабее в центре и сильнее по краям. В зависимости от положения точки наблюдения в следе за цилиндром (проходит ли через нее край вихря или его центр) этот эффект может приводить как к затуханию пульсаций v_y , так и к их усилению. Суммарное изменение амплитуды пульсаций зависит от соотношения этих двух эффектов в конкретной точке наблюдения и может происходить в обе стороны, как и в эксперименте [1].

Из спектров пульсаций скорости, рассчитанных для одного и того же течения, но в разных точках наблюдения (фиг. 6 а, б), видно, что условия гетерогенной релаксации слабо влияют на итоговый результат: кривые 2 и 3 гораздо ближе друг к другу, чем к кривой 1 для равновесного газа. Учет зависимости времени релаксации от температуры по формуле Ландау–Теллера $\tau = A \exp(B/T^{1/3})$ также не оказывает большого влияния. Эта зависимость лишь увеличивает контраст по температуре между вихрями и



Фиг. 7. Влияние релаксации на коэффициент сопротивления: 1 – равновесный газ, 2 – колебательно-неравновесный

окружающим газом, немного изменяя соотношение между двумя обнаруженными эффектами.

Анализировались также два разных варианта постановки задачи для колебательной энергии: набегающий поток неравновесного газа на левой границе и накачка энергии в колебательные степени свободы во всей области интегрирования. Поскольку условия гетерогенной релаксации могут быть различны, рассматриваемые предельные случаи позволяют понять, насколько параметры задачи зависят от условий гетерогенной релаксации. Хотя наблюдаемое поле колебательной энергии полностью различно для этих двух вариантов, поле температуры (которое и определяет влияние неравновесности на итоговый результат) не так уж сильно зависит от выбора одного из этих двух вариантов. Причина в том, что в случае варианта с накачкой энергии газ вдоль потока сначала почти не релаксирует (из-за малой степени неравновесности), но потом, по мере того как накачка повышает эту степень, фактически начинает сбрасывать энергию в поступательные степени свободы, как это происходило бы в случае возмущения на левой границе. В дальнейшем накачка уже слабо влияет на развитие событий, и ее роль сводится к созданию того же возмущения, но не на границе области интегрирования, а несколько ближе к цилиндру. Поскольку температура по-прежнему растет слева направо и выше в вихрях дорожки Кармана, чем в окружающем газе, то знаки обоих эффектов остаются прежними, меняться может лишь соотношение между ними.

Что касается коэффициента сопротивления, то в случае неравновесного газа он оказывается меньше, чем в случае равновесного (фиг. 7). Этот эффект в настоящее время хорошо известен и интенсивно изучается. В данной задаче он возникает из-за неравновесности и релаксации набегающего потока, а не из-за особенностей энерговыделения и релаксации на поверхности обтекаемого тела.

Заключение. Проведено численное моделирование обтекания цилиндра потоком колебательно-неравновесного газа с учетом вязкости, теплопроводности и диффузии колебательных квантов. Обнаружено, что релаксация неравновесного газа приводит к затуханию вихрей дорожки Кармана и их деформации. Затухание вихрей связано с тем, что газ в них движется дольше, успевает получить больше энергии из колебательных степеней свободы и, следовательно, имеет более высокую температуру и низкую плотность, чем окружающий газ (поперечный градиент температуры). Деформация вихрей: ослабление вихря в центре и усиление его по краям – вызвана поперечной релаксацией газа и соответствующим увеличением его температуры и

уменьшением плотности (продольный градиент температуры). В зависимости от точки наблюдения суммарное действие этих двух эффектов может давать как уменьшение, так и усиление пульсаций скорости, что соответствует экспериментальным данным. Показано, что различные варианты условий гетерогенной релаксации на цилиндре и создания неравновесности (неравновесный входной поток или энерговклад) слабо влияют на картину течения.

Авторы благодарят А.И. Осипова за обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта (РФФИ № 03-01-00436).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гембаржевский Г.В., Генералов Н.А., Соловьев Н.Г. Исследование спектра пульсаций скорости вихревого течения колебательно-возбужденного молекулярного газа в тлеющем разряде // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 81–91.
2. Williamson C.H.K. Vortex dynamics in the cylinder wake // Annu. Rev. Fluid Mech. 1996. V. 28. P. 477–539.
3. Kim J., Kim D., Choi H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries // J. Comput. Phys. 2001. V. 171. № 1. P. 132–150.
4. Morkovin M.V. Flow around a circular cylinder – kaleidoscope of challenging fluid phenomena // Proc. ASME Symp. Fully Separated Flows. 1964. P. 102.
5. Oertel H. Wakes behind blunt bodies // Annu. Rev. Fluid Mech. 1990. V. 22. P. 539.
6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.2004