

УДК 532.546

© 2005 г. Э. В. СКВОРЦОВ, Д. Т. СУЮЧЕВА

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКВАЖИН С ПОТОКОМ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Исследовано взаимодействие природного потока загрязненных подземных вод с течением, создаваемым скважинами. В условиях потенциальности течения для ряда конфигураций их размещения определены границы областей, защищенных от загрязненного потока, при всех возможных схемах течения. Найдены безразмерные критические расходы скважин, отвечающие переходу от одной схемы к другой.

Ключевые слова: загрязненный поток, скважины, критический расход, гидродинамический барьер.

В насыщенных водой пластах возможны природные потоки, которые способны переносить загрязнения на большие расстояния, в результате чего образуются крупные ареалы загрязнений. Поэтому проводят мероприятия по их локализации и ликвидации. Одним из способов защиты подземных вод является воздействие на поток через скважины путем закачки в пласт или откачки из пласта воды. В частности, таким образом на пути потока можно создать гидродинамические барьеры, препятствующие продвижению загрязнений [1].

Местоположение ареала загрязнений, зону захвата жидкости скважинами (либо течения от скважин) и эффективность таких барьеров можно определить, используя численное моделирование процесса. Оно позволяет исследовать сложные системы, которые включают в себя неоднородности, неустановившийся поток, большое число эксплуатационных и нагнетательных скважин. Важным этапом анализа течения оказывается определение границы зоны захвата (либо барьера для загрязнения). В двумерном случае это линия раздела воды, текущей по градиенту давления мимо скважины, и воды, текущей к скважине (или от скважины). Известно, что численные методы не позволяют осуществить прямое вычисление координат огибающей зоны захвата [2].

Изучение различных ситуаций с использованием скважин для управления потоком показало, что практически достаточно лишь нескольких скважин для того, чтобы осуществить сдерживание загрязненного пятна жидкости [3]. Если реальная гидродинамическая обстановка в достаточной мере допускает описание сравнительно небольшим числом расчетных параметров, то зоны захвата и области, защищаемые гидродинамическими барьерами, удастся определить аналитически.

Согласно распространенной схематизации процесса считается, что скважины расположены в однородном и изотропном пласте единичной толщины, где существует прямолинейно-параллельный природный поток, жидкость однородна и несжимаема, справедлив закон Дарси, фильтрация стационарна и двумерна, скважины имитируются источниками и стоками.

Определение зоны захвата скважин, находящихся в потоке, началось с решения задачи для случая одиночной скважины [4]. Впоследствии для анализа воздействия скважин на поток была привлечена теория функций комплексного переменного. В [5] исследовалась рециркуляция между нагнетательной и эксплуатационными скважинами, размещенными поперек направления набегающего потока. Для развития дальнейших исследований важную роль сыграла работа [6], где были определены огибающие зо-

ны захвата в случаях двух, трех и четырех скважин в прямолинейных батареях, расположенных поперек потока. При этом варианты с прорывом течения между скважинами не рассматривались. В [2] представлено аналитическое решение задачи об определении границы зоны захвата в случае пары эксплуатационных скважин, расположенных произвольно в потоке. Прорыв потока между скважинами с разделением границы зоны захвата на две не исследовался. В [7] определены те значения безразмерного критического расхода скважины в батарее скважин (до ста), при которых происходит первый в числе возможных прорыв потока между скважинами.

В [8] указан алгоритм определения первого и второго критических расходов для батареи четырех скважин, приведены их величины, построены границы – барьеры для загрязненного потока, соответствующие этим расходам. Там же и в [9] аналитически решены задачи о взаимодействии потока с одной и двумя галереями с постоянным давлением, расположенными перпендикулярно направлению потока. В [3] предложен полуаналитический метод для определения критического расхода в случае произвольно размещенных в потоке двух эксплуатационных скважин с различными расходами и подход к построению границы зоны захвата в случае произвольного числа скважин с различными расходами, на каждом этапе определения координат требующий решения трансцендентного уравнения. В [10] поставлена и частично решена задача о скважине заданного радиуса в потоке.

Ниже рассмотрены следующие течения: для пары источников и пары стоков, произвольно расположенных в потоке загрязненной жидкости, для четырех и пяти источников в прямолинейной батарее, расположенной перпендикулярно направлению потока, для скважины конечного радиуса в потоке. При этом эффекты фильтрационно-конвективной диффузии и адсорбции в условиях фильтрации [11] не учитывались, а решалась собственно фильтрационная задача.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская установившаяся линейная фильтрация однородной несжимаемой жидкости в однородной пористой среде. Пусть X, Y – координаты точки плоскости. Изучается взаимодействие прямолинейно-параллельного потока жидкости, имеющего проекции скорости фильтрации $v_x = v, v_y = 0$, с источниками, стоками и окружностью постоянного давления, соответствующей контуру скважины. Требуется найти характерные линии тока, служащие барьерами для потока, и определить те безразмерные критические расходы источников, стоков и скважины, по достижении которых происходит перестройка течения с переходом от одной его схемы к другой.

При указанных выше условиях существуют потенциал скорости фильтрации Φ и функция тока Ψ . Вводится комплексный потенциал течения $W(Z) = \Phi + i\Psi$, где $Z = X + iY$, i – мнимая единица. Соотношения $W = W(Z)$ и $dW/dZ = 0$ служат основой для анализа течения.

2. Два источника и источник и сток в потоке. Пусть в потоке в точках с координатами $x = \pm a, y = \pm b$ находятся источники с расходами q либо в точке с координатами $x = a, y = b$ находится сток с расходом q , а в точке с координатами $x = -a, y = -b$ – источник с расходом $-q$. Комплексные потенциалы течений, создаваемых потоком и источника-либо парой источник-сток, с точностью до постоянной описываются формулой

$$W(Z) = -vZ - \frac{q}{2\pi} [\ln(Z + a + ib) \pm \ln(Z - a - ib)] \quad (2.1)$$

где знак “плюс” соответствует случаю двух источников, знак “минус” – случаю источника и стока.

Далее вводятся безразмерные величины

$$z = \frac{Z}{c}, \quad w(z) = \frac{W(Z)}{vc}, \quad \psi = \frac{\Psi}{vc}, \quad Q = \frac{q}{2\pi vc}, \quad c = (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad k = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

Здесь угол α характеризует расположение источников и стоков относительно направления потока. Из (2.1) в случае двух источников следует выражение

$$\psi = -y - Q \operatorname{arctg} \frac{2[xy(1+k^2) - k]}{(x^2 - y^2)(1+k^2) + 1 - k^2} \quad (2.2)$$

а из условия $dw/dz = 0$ находятся координаты x_j, y_j ($j = 1, 2$) точек N_j , в которых скорость течения равна нулю

$$\begin{aligned} x_j &= -Q + \frac{k}{k^2 + 1} y_j^{-1} \\ y_j &= \frac{(-1)^{j-1}}{2^{1/2}} \left\{ \left[Q^4 + 2Q^2 \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} + 1 \right]^{1/2} - Q^2 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

При этом имеем:

$$\alpha = 0$$

$$x_j = -Q + (-1)^{j-1} (Q^2 - 1)^{1/2}, \quad y_j = 0 \quad (Q \geq 1)$$

$$x_j = -Q, \quad y_j = (-1)^{j-1} (1 - Q^2)^{1/2} \quad (Q < 1)$$

$$\alpha = \pi/2, \quad x_j = -Q + (-1)^{j-1} (Q^2 + 1)^{1/2}, \quad y_j = 0$$

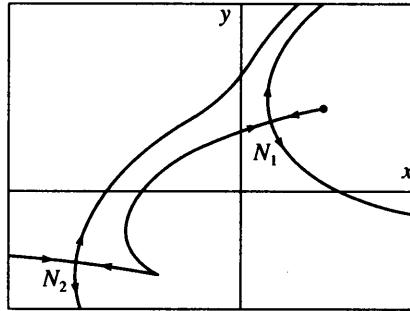
Через каждую из точек N_j проходят четыре ветви линий тока с уравнениями $\psi(x, y) = \psi(x_j, y_j) = \psi_j$. С учетом выражений (2.2), (2.3) из последних находится зависимость абсцисс этих линий от их ординат

$$x = -y \operatorname{ctg} f_j(y) \pm \left[\frac{y^2}{\sin^2 f_j(y)} + \frac{k^2 - 1 + 2k \operatorname{ctg} f_j(y)}{1 + k^2} \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

$$f_j(y) = \frac{y + \psi_j}{Q}$$

При достаточно большой величине Q границу – барьер для потока составляют две ветви линий тока, исходящие из точки N_2 , а точка N_1 находится в области течения от источников (см. фиг. 1, где стрелками показаны направления движения по линиям тока). При некотором критическом значении $Q = Q_0$ точка N_1 оказывается на указанной границе, причем последняя составляется из двух ветвей линий тока, исходящих из точки N_2 , и одной ветви линии тока, исходящей из точки N_1 . При $Q < Q_0$ поток проходит между источниками, и барьер для него составляют границы течения от первого и от второго источников. При $Q = Q_0$ точки N_j находятся на одной и той же линии тока. Это условие с привлечением выражений (2.2), (2.3) позволяет получить уравнение для определения зависимости критического расхода Q_0 от угла α . Оно преобразовано к следующему виду

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{2y_1}{Q_0} &= \frac{2Q_0 y_1}{\cos 2\alpha - 2y_1^2} \\ y_1 &= \frac{1}{2^{1/2}} \{ [Q_0^4 - 2Q_0^2 \cos 2\alpha + 1]^{1/2} - Q_0^2 + \cos 2\alpha \}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.5)$$



Фиг. 1. Схема течения под действием двух источников в потоке для значения безразмерного расхода Q , большего критического

Трансцендентное уравнение (2.5) допускает аналитическое решение. Если ввести параметр $t = \cos 2\alpha - 2y_1^2$, то уравнение можно представить в двух эквивалентных формах

$$\operatorname{tg} \frac{(1-t^2)^{1/2}}{Q_0^2} = \frac{(1-t^2)^{1/2}}{t}, \quad \operatorname{tg} \frac{2(\cos 2\alpha - t)}{(1-t^2)^{1/2}} = \frac{(1-t^2)^{1/2}}{t}$$

Отсюда следует

$$0 \leq t \leq 1: Q_0 = \frac{(1-t^2)^{1/4}}{[g(t)]^{1/2}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \arccos \left[t + \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2} g(t) \right] \quad (2.6)$$

$$-1 \leq t \leq 0: Q_0 = \frac{(1-t^2)^{1/4}}{[\pi + g(t)]^{1/2}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \arccos \left[t + \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2} \{\pi + g(t)\} \right] \quad (2.7)$$

$$g(t) = \operatorname{arctg} [(1-t^2)^{1/2} t^{-1}] \quad (2.8)$$

На фиг. 2, а показаны границы, служащие барьерами для потока, при различных значениях расхода Q и фиксированном угле α . Они построены по формуле (2.4). На фиг. 2, б изображена кривая зависимости $Q_0 = Q_0(\alpha)$, отвечающая формулам (2.6)–(2.8). Эта линия близка к прямой $Q_0 = 1 - 2\alpha/\pi$.

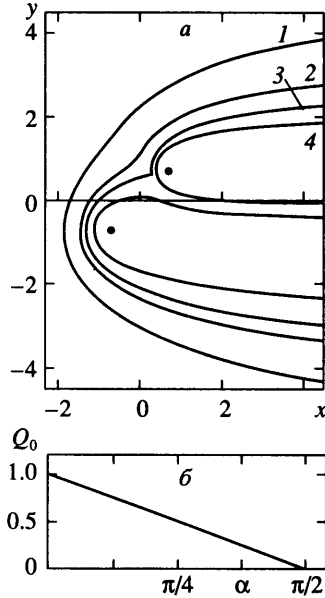
В случае источника и стока в потоке согласно (2.1) имеем

$$\psi = -y - Q \operatorname{arctg} \frac{2(x-ky)}{(x^2 + y^2 - 1)(1+k^2)} \quad (2.9)$$

Абсциссы $x_j = x_j(Q, \alpha)$ точек нулевой скорости N_j ($j = 1, 2$) в интервале $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ могут быть как положительными, так и отрицательными. При условии $Q \geq -\sin \alpha$ получим

$$x_j = \frac{(-1)^{j-1}}{2^{1/2}} (r+f)^{1/2}, \quad y_j = \frac{(-1)^{j-1}}{2^{1/2}} (r-f)^{1/2} \quad (2.10)$$

$$r = (4Q^2 + 4Q \sin \alpha + 1)^{1/2}, \quad f = 2Q \sin \alpha - \cos 2\alpha$$



Фиг. 2. Границы течения от двух источников в потоке для $\alpha = \pi/4$, $Q = 0.85, 0.6, 0.506, 0.35$ (линии 1–4) (а), зависимость безразмерного критического расхода Q_0 от угла α (б)

При условии $Q < -\sin \alpha$ в (2.10) следует изменить знак величины x_j на противоположный. Уравнения линий тока, проходящих через точки N_j , таковы

$$x = \left\{ -\operatorname{ctg} \frac{\Psi_j + y}{Q} \pm D^{1/2}(y) \right\} (1 + k^2)^{-1/2} \quad (2.11)$$

$$D(y) = \operatorname{ctg}^2 \frac{2y + \Psi_j}{Q} + (1 + k^2) \left[(1 + y^2)(1 + k^2) + 2ky \operatorname{ctg} \frac{y + \Psi_j}{Q} \right]$$

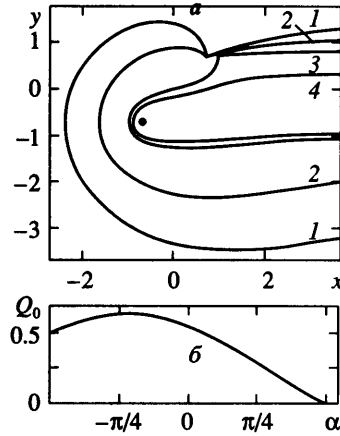
Формулы (2.9)–(2.11) позволяют построить границу течения от источника. Если величина Q достаточно велика, источник и сток гидродинамически связаны. При некотором критическом значении $Q = Q_0$ одна из ветвей границы течения от источника проходит через начало координат, и на ней находятся обе точки N_j . Если $Q < Q_0$, то струя естественного потока проходит между источником и стоком, и гидродинамическая связь между ними прерывается.

Из выражения (2.9) и условия, что при $Q = Q_0$ $\psi(x_1, y_1) = \psi(0, 0)$ следует уравнение для определения величины $Q_0 = Q_0(\alpha)$

$$\operatorname{tg} \frac{y_1}{Q_0} = \frac{2(y_1 \sin \alpha - x_1 \cos \alpha)}{(x_1^2 + y_1^2 - 1)} \quad (2.12)$$

Из уравнения (2.12) и условия $Q_0 = -\sin \alpha$ ($\alpha < 0$) определяются величины $Q_0 = 2/\pi$, $\alpha = -\arcsin 2/\pi$. При $\alpha = -\pi/2$ имеем $x_j = 0$, и согласно (2.10) значение $Q_0 = 0.5$.

На фиг. 3 изображены барьеры для потока при различных значениях параметра Q и фиксированном угле α и линия $Q_0 = Q_0(\alpha)$, построенная по численному решению



Фиг. 3. Границы течения от источника и стока в потоке для $\alpha = \pi/4$, $Q = 3, 1.3, 0.290, 0.2$ (линии 1–4) (а), зависимость безразмерного критического расхода Q_0 от угла α (б)

уравнения (2.12) с использованием формулы (2.10) при $Q = Q_0$ с учетом знака величины x_j .

3. Батарея источников в потоке. Пусть в загрязненном потоке на прямой $x = 0$ симметрично прямой $y = 0$ на равных расстояниях l один от другого расположены n источников одинакового расхода q . Далее вводятся безразмерные величины:

$$Q = \frac{q}{2\pi vl}, \quad w(z) = \phi + i\psi = \frac{W(Z)}{vl}, \quad \Psi = \frac{\Psi}{vl}, \quad z = \frac{Z}{l} \quad (n = 2m + 1)$$

$$w(z) = \frac{2W(Z)}{vl}, \quad \Psi = \frac{2\Psi}{vl}, \quad z = \frac{2Z}{l} \quad (n = 2m)$$

Ниже исследуются течения для $n = 4$ и $n = 5$ при заданном расходе источника Q , причем в силу их симметричности относительно оси x рассматривается область $y \geq 0$. Эти варианты течения являются характерными при анализе случая произвольного n , поскольку, с одной стороны, для них возможен более чем один прорыв потока между источниками, а с другой – они различаются способом определения первого прорыва для четного и нечетного n .

В случае четырех источников в потоке комплексный потенциал течения и уравнение для определения координат x_j, y_j точек нулевой скорости N_j ($j = 1, 2, 3$) в безразмерных переменных приобретают вид

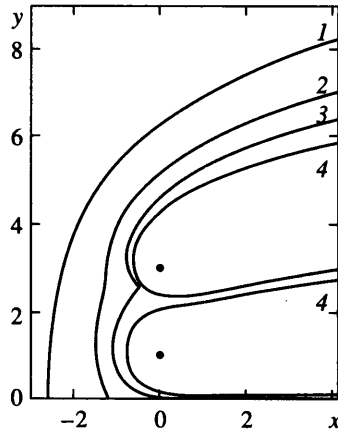
$$w(z) = -z - 2Q \ln[(z^2 + 1)(z^2 + 9)] \tag{3.1}$$

$$f(z) = z^4 + 8Qz^3 + 10z^2 + 40z + 9 = 0 \tag{3.2}$$

Из представления (3.1) находится функция тока

$$\psi(x, y) = -y - 2Q \arctg r(x, y)$$

$$r(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2 + 5)}{(x^2 - y^2 + 1)(x^2 - y^2 + 9) - 4x^2y^2} \tag{3.3}$$



Фиг. 4. Границы течения от четырех источников в потоке для $Q = 0.5, 0.412, 0.363, 0.3$ (линии 1–4)

Для описания границ барьеров, создаваемых источниками, используются уравнения

$$r(x, y) = -\operatorname{tg} \frac{y + \psi_i}{Q}, \quad i = 0, 1, 2, \quad \psi_0 = 0, \quad \psi_1 = \psi_1(x_1, y_1), \quad \psi_2 = \psi_2(x_2, y_2) \quad (3.4)$$

Они сводятся к алгебраическим уравнениям четвертой степени относительно абсциссы границы x при заданной ординате y .

Пусть Q_1 и Q_2 здесь и далее – критические значения безразмерного расхода, при которых соответственно происходят первый и второй прорывы потока между источниками. Когда $Q \geq Q_1$, точки нулевой скорости N_1 и N_3 располагаются на оси x , а точка N_2 – в области $y > 0$, чему соответствуют два действительных и один комплексный корень уравнения (3.2). При $Q = Q_1$ точки N_1 и N_3 сливаются, и из уравнения (3.2) находится значение $Q_1 = 0.412$, отвечающее критическому расходу перед первым прорывом гидродинамического барьера Γ потоком. Уравнение границы барьера Γ при $Q \geq Q_1$ имеет вид $\psi = -8\pi Q$. Из него и формул (3.3) следует уравнение (3.4) при $i = 0, 0 \leq y < 8\pi Q$. Это уравнение помимо линии Γ описывает также другие линии тока, на которых значение функции тока кратно величине $2\pi Q$. Их нахождение здесь интереса не представляет. При $Q_2 \leq Q < Q_1$ возникает струйка загрязненной жидкости, примыкающая к оси x , точка N_1 располагается в области $y > 0$ на границе Γ , точка N_3 – в области $y < 0$ симметрично точке N_1 , а точка N_2 – внутри области течения от источников. Координаты границы Γ при $Q_2 \leq Q < Q_1$ удовлетворяют уравнению (3.4) при $i = 1$, а область изменения ординаты y определяется автоматически из условия существования действительных корней уравнения.

При $Q = Q_2$ точка N_2 , как и точка N_1 , оказывается на границе Γ , поэтому значение Q_2 удовлетворяет системе уравнений (3.4) при $x = x_2, y = y_2, i = 1$ и $f(z_2, Q_2) = 0$. Отсюда находится значение $Q_2 = 0.363$. Наконец, при $0 < Q < Q_2$ поток прорывается также между первым и вторым источником, граница Γ распадается соответственно на две линии Γ_1 и Γ_2 , служащие границами течения от первого и второго источников. При этом точка N_1 оказывается на границе Γ_1 , а точка N_2 – на границе Γ_2 . Координаты границы Γ_1 находятся из уравнения (3.4) при $i = 1$, координаты границы Γ_2 – из уравнения (3.4) при $i = 2$.

На фиг. 4 изображены границы Γ – барьеры для загрязненного потока при значениях безразмерного расхода источника, отвечающих различным схемам течения.

Пусть теперь в потоке расположена батарея пяти источников. В этом случае основные соотношения, описывающие течение, в безразмерных величинах таковы

$$w(z) = -z - Q \ln[z(z^2 + 1)(z^2 + 4)] \quad (3.5)$$

$$g(z) = 1 + Q \left(\frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2 + 1} + \frac{2z}{z^2 + 4} \right) = 0 \quad (3.6)$$

В соответствии с представлением (3.5) определяется функция тока

$$\psi(x, y) = -y - Q \operatorname{arctg} s(x, y)$$

$$s(x, y) = \frac{y(5x^4 + y^4 - 8x^2y^2 + 15x^2 - 5y^2 + 4)}{x(x^4 + 3y^4 - 10x^2y^2 + 5x^2 - 15y^2 + 4)}$$

При $Q \geq Q_1$ в области течения $y \geq 0$ точка нулевой скорости N_1 находится на оси x , а точки N_2 и N_3 – внутри области течения от источников с границей Γ . При $Q = Q_1$ точка N_2 оказывается на границе Γ . При $Q_2 \leq Q < Q_1$ поток прорывается между первым и вторым источниками, граница Γ распадается на две: границу Γ_1 области течения от первого источника и границу Γ_2 области течения от второго и третьего источников, причем точка N_2 принадлежит границе Γ_2 . При $Q = Q_2$ этой границе принадлежит и точка N_3 . Наконец, при $0 < Q < Q_2$ поток прорывается также между вторым и третьим источниками, а точки N_1, N_2 и N_3 оказываются соответственно на границах Γ_1, Γ_2 и Γ_3 областей течения от каждого источника в отдельности.

Изложенное геометрическое описание поведения характерных границ течения приводит к уравнениям

$$s(x, y) = -\operatorname{tg} \frac{y + \psi_i}{Q}, \quad i = 0, 2, 3, \quad \psi_0 = 0 \quad (3.7)$$

Они являются алгебраическими уравнениями пятой степени относительно функции $x = x(y)$. При $Q \geq Q_1$ линия Γ описывается уравнением (3.7), $i = 0$. Если $y \geq 0$ и значение Q достаточно велико, корень z_1 уравнения (3.6) – действительный, корни z_2 и z_3 – комплексные, причем $y_2 < y_3$. Из условия, что координаты x_2, y_2 удовлетворяют уравнению (3.7), находится значение $Q_1 = 0.369$.

При $Q_2 \leq Q < Q_1$ граница Γ_1 описывается уравнением (3.7), $i = 0$, граница Γ_2 – уравнением (3.7), $i = 2$, а критический расход Q_2 удовлетворяет системе уравнений (3.7) при $x = x_3, y = y_3, i = 2$ и $g(z_3, Q_2) = 0$. Из последней находится значение $Q_2 = 0.352$.

При $0 < Q < Q_2$ уравнения границ Γ_1 и Γ_2 сохраняют прежний вид, а кривая Γ_3 описывается уравнением (3.7), $i = 3$.

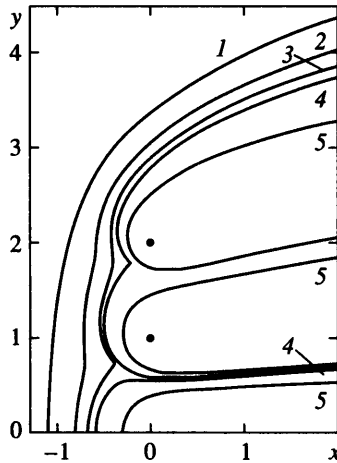
В процессе построения искомым кривых из совокупности линий тока, на которых функция тока кратна величине πQ , выделяются необходимые, а области изменения ординаты y в уравнениях (3.7) определяются в процессе расчета из условия существования действительных корней уравнений.

На фиг. 5 показаны границы Γ – барьеры для загрязненного потока при значениях расхода, соответствующих различным схемам течения.

Описанный выше способ определения критических расходов и расположения барьеров, создаваемых для загрязненного потока батареями четырех и пяти источников, позволяет аналогичным образом найти все критические расходы и при произвольном числе источников в батарее.

4. Нагнетательная скважина в потоке. Известно решение задачи об источнике расхода q в потоке [4]. При расположении источника в начале координат комплексный потенциал такого течения имеет вид

$$W(Z) = -\frac{q}{2\pi} \ln Z - vZ \quad (4.1)$$



Фиг. 5. Границы течения от пяти источников в потоке $Q = 0.43, 0.39, 0.369, 0.352, 0.25$ (линии 1-5)

Отсюда находится уравнение линии тока Γ , ограничивающей течение от источника $X = -Y \operatorname{ctg}(2\pi vY/q)$ (4.2)

Координата точки нулевой скорости N равна $X_0 = -q/(2\pi v)$ и не может обратиться в нуль. Реальная скважина имеет радиус R (порядка 0.1 м), и представляет интерес получить решение задачи о форме границы Γ для случая скважины, на контуре которой задано постоянное давление.

С этой целью используется выражение для комплексного потенциала

$$W(Z) = -\frac{q}{2\pi} \ln Z - v \left(Z - \frac{R^2}{Z} \right) \quad (4.3)$$

При $|Z| = R$ имеем $\operatorname{Re}W(Z) = \Phi = 0$, и условие на контуре скважины выполняется. При $|Z| \gg 1$ представление (4.3) асимптотически стремится к (4.1). Далее вводятся безразмерные величины

$$z = \frac{Z}{R}, \quad x = \frac{X}{R}, \quad Q = \frac{q}{4\pi vR}, \quad w = \frac{W}{vR}, \quad \psi = \frac{\Psi}{vR}$$

Из условия $dw/dz = 0$ и формулы (4.3) находится комплексная координата точки нулевой скорости в области течения $z_0 = -Q - (Q^2 - 1)^{1/2}$.

Пусть $Q \geq 1$. Уравнение линии тока Γ , на которой $\psi = -2\pi Q$, согласно выражению (4.3) представляется в параметрическом виде

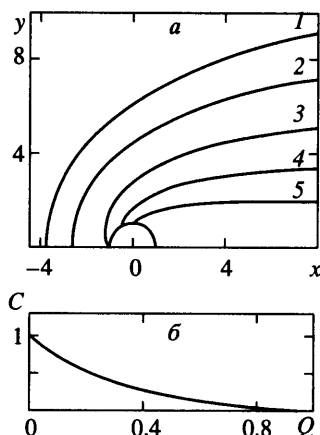
$$t = (y/2Q)[1 + (x^2 + y^2)^{-1}] \quad (4.4)$$

$$y = Qt + (Q^2 t^2 - \sin^2 t)^{1/2}, \quad x = y \operatorname{ctg}(\pi - t), \quad 0 \leq t < \pi$$

$$t = 0: x_0 = -Q - (Q^2 - 1)^{1/2}, \quad y_0 = 0$$

$$t \rightarrow \pi: x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow 2\pi Q$$

В случае критического расхода $Q = Q_0 = 1$ получим $x_0 = -1, y_0 = 0$, то есть точка N границы Γ достигает контура скважины. При $Q \gg 1$ для линии Γ выражение $x^2 + y^2 \gg 1$, $t \sim y/(2Q)$, и уравнения (4.4) асимптотически переходят в уравнение (4.2).



Фиг. 6. Границы течения от скважины в потоке (а) для $Q = 2, 1.5, 1, 0.5, 0.001$ (линии 1–5), зависимость концентрации C жидкости, вытекающей из скважины, от величины Q (б)

Пусть теперь $0 < Q < 1$. Так как известны координаты находящейся на контуре скважины точки нулевой скорости $N : x_0 = -Q, y_0 = (1 - Q^2)^{1/2}$, то известно и значение функции тока на линиях, проходящих через эту точку. Таких линий в области течения две: Γ_1 и Γ_2 .

Линия тока Γ_1 берет начало в точке N и служит границей потока, вытекающего из скважины. Линия Γ_2 заканчивается в точке N и ограничивает загрязненный поток, втекающий в скважину через часть ее контура. Путем, аналогичным описанному выше, можно получить параметрические уравнения границ Γ_1 и Γ_2

$$y = Qt + \{(Qt)^2 - \sin^2[t - f(Q)]\}^{1/2}, \quad x = y \operatorname{ctg}[\pi - t + f(Q)] \quad (4.5)$$

При этом для линии Γ_2 $f(Q) < t \leq (1 - Q^2)^{1/2} Q^{-1}$, ширина потока в бесконечно удаленной точке $y_2 = 2Qf(Q)$, а для линии Γ_1 $(1 - Q^2)^{1/2} Q^{-1} \leq t < f(Q) + \pi$, соответствующая ширина потока $y_1 = 2Q[\pi + f(Q)]$. Принимая допущение, что в скважине потоки чистой и загрязненной жидкости равномерно перемешиваются, можно определить концентрацию $C = C(Q)$ как долю загрязненной жидкости в потоке, вытекающем из скважины: $C(Q) = f(Q)[\pi + f(Q)]^{-1}$ (см. фиг. 6, б).

На фиг. 6, а изображены границы линий Γ для $Q \geq 1$ и Γ_1 для $0 < Q < 1$ при фиксированных значениях Q . В отличие от радиального течения в окрестности точечного источника, течение в окрестности скважины, находящейся в потоке, при значениях безразмерного расхода Q в диапазоне $0 < Q < 1 + \epsilon, \epsilon \ll 1$ существенно неоднородно. Известное значение безразмерного критического расхода $Q_0 = 1$ позволяет оценить критический объемный расход скважины q_0 , при котором загрязненная жидкость достигает ее контура. Пусть $v = 10^{-3}$ м/с, $R = 10^{-1}$ м, толщина пласта $h = 1$ м. Тогда $q_0 \sim 10^{-3}$ м³/с.

Заключение. Выполненное моделирование воздействия на природный поток загрязненных подземных вод закачкой или откачкой жидкости через скважины позволило аналитически определить конфигурации границ областей течения, защищенных от потока, при произвольном размещении в нем двух источников, источника и стока, батареи четырех и пяти источников, расположенной поперек направления потока, и найти значения безразмерных критических расходов источников и стоков, при которых происходят прорывы потока между ними. Сравнение заданных безразмерных расходов с критическими отвечает на вопросы, какая из возможных схем течения при

этом реализуется и будет эффективным создаваемый источниками и стоками гидродинамический барьер для потока или нет.

Найден безразмерный критический расход нагнетательной скважины, взаимодействующей с потоком, при заданном на ее контуре постоянном давлении. При критическом расходе загрязненная жидкость достигает контура скважины. Показано, что при значениях расхода скважины, близких к критическому, имитация ее точечным источником приводит к существенному искажению картины течения в окрестности контура скважины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Christ J.A., Goltz M.N., Huang J.* Development and application of an analytical model to aid design and implementation of in situ remediation technologies // *J. Contamin. Hydrol.* 1999. № 37. P. 295–317.
2. *Shan C.* An analytical solution for the capture zone of two arbitrarily located wells // *J. Hydrol.* 1999. № 222. P. 123–128.
3. *Christ J.A., Goltz M.N.* Hydraulic contaminant: analytical and semi-analytical models for capture zone curve delineation // *J. Hydrol.* 2002. № 262. P. 224–244.
4. *Jacob C.E.* Flow of groundwater // *Engineering Hydraulics* Ed. H. Rose N.Y.: Wiley, 1950. P. 321–386.
5. *Dacosta J.A., Bennet R.R.* The pattern of flow in the vicinity of a recharging and discharging pair of wells in an aquifer having arial parallel flow // *Intern. Assoc. of Scient. Hydrology. IUGG General Assembly of Helsinki.* 1960. Publ. № 52. P. 524–536.
6. *Javandel I., Tsang C.-F.* Capture zone type curves: a tool for aquifer cleanup // *Ground Water.* 1986. № 24 (№5). P. 616–625.
7. *Erdmann J.B.* On capture width and capture zone gaps in multiple-well systems // *Ground Water.* 2000. V. 38. № 4. P. 497–504.
8. *Кузьмин Р.С., Скворцов Э.В.* Влияние скважин и галерей на поток подземных вод // *Тр. Мат. центра им. Н.И. Лобачевского.* Т. 3. Краевые задачи и их приложения. Казань: “Уни-пресс”, 1999. С. 78–84.
9. *Кузьмин Р.С., Скворцов Э.В.* Управление потоком подземных вод через галереи // *Тр. Мат. центра им. Н.И. Лобачевского.* Т. 7. Краевые задачи аэрогидромеханики и их применения. Казань: “ДАС”, 2000. С. 196–202.
10. *Скворцов Э.В., Суючева Д.Т.* Управление потоком подземных вод через скважины // *Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского.* Т. 14. Геометрические теории функций, краевые задачи и их приложения. Казань: Казан. мат. о-во, 2002. С. 254–259.
11. *Махмадияров С., Николаевский В.Н.* Анизотропная фильтрационно-конвективная диффузия при подземном выщелачивании // *Изв. РАН. МЖГ.* 1987. № 1. С. 96–101.

Казань

Поступила в редакцию
6.XII.2004