

УДК 532.529:551.213.3

© 2005 г. А. Б. СТАРОСТИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ МАГМЫ В СЛУЧАЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ ДИФФУЗИИ ВОДЫ В РАСПЛАВЕ

Любое вулканическое извержение сопровождается дегазацией магм, в результате которой в силикатном расплаве растут пузырьки газа. Количество и скорость роста пузырьков определяет характер извержения. При малой концентрации свободного газа извержение проходит слабо и кратковременно. При большой – имеет место фрагментация расплава с образованием газовзвеси. Это приводит к катастрофическому усилению извержения. Для описания течения магмы в канале вулкана с учетом массообмена между пузырьками и расплавом в работе построены модели, в которых течение магмы в канале рассматривается совместно с динамикой роста газовых пузырьков в магматическом расплаве. Модели описывают извержения магм с равновесным, либо со слабым ростом пузырьков, а также с умеренным темпом роста пузырьков, что более характерно для вулканических систем. На основе моделей численно исследовано стационарное интенсивное извержение магм, а также задача об установлении извержения после разрыва пробки в верхней части канала. Выявлено влияние процессов диффузии газа на интенсивность и продолжительность извержения.

Ключевые слова: многофазные течения, массообмен, диффузия воды в расплаве, вулканическое извержение.

Особенности гидродинамических моделей извержений связаны с уникальной реологией магмы и большими перепадами давления в рассматриваемых течениях. Основной компонент магмы – горячий силикатный расплав. При длительном пребывании в очаге расплав частично кристаллизуется, что сказывается на его вязкости. В расплаве всегда растворено некоторое количество газов, в основном водяного пара. Равновесная концентрация воды в расплаве зависит от давления как \sqrt{P} . В процессе извержения магма поднимается по каналу, давление в расплаве меняется на несколько порядков (10^8 – 10^5 Па), и он становится перенасыщенным водой. Тогда вода выделяется из расплава в отдельную фазу в виде пузырьков. Вязкость магмы сильно зависит от концентрации воды в расплаве, и обеднение расплава водой приводит к большим изменениям вязкости (10^6 – 10^{11} Па с). При определенных параметрах течения стенки между пузырьками разрушаются, происходит фрагментация пузырьковой жидкости, в результате которой по каналу течет газовзвесь (частицы магмы и водяной пар). Вытекающая из канала, струя газовзвеси может обрушиться на склоны вулкана, образуя пирокластические потоки, либо сформировать над вулканом горячее газопепельное облако. Подобные исходы извержений представляют опасность для территорий, прилежащих к вулкану. Параметры на выходе из канала, определяющие динамику струи, можно узнать, моделируя течение магмы в канале вулкана.

Ряд моделей рассматривает течение в канале при определенных допущениях о диффузии магмы в пузырьки [1–7]. В одной из первых работ по моделированию вулканических извержений [1], а также в последующих [2, 3] диффузия воды в пузырьки считается равновесной. Тогда зависимость концентрации воды всюду в расплаве зависит от давления по эмпирическому закону, т.е. вся избыточная вода быстро переходит из перенасыщенного расплава в пузырьки. В [4] построены модели для двух предельных

допущений о темпе диффузии: либо диффузия воды в пузырьки протекает равновесно, либо во время извержения диффузия воды в пузырьки отсутствует. Показано, что различные темпы диффузии проявляются в виде сильных и слабых извержений на вулкане Суфриер Хиллз (остров Монтсеррат, Карибское море).

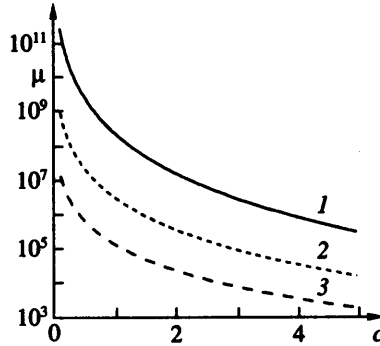
Наблюдения за вулканами свидетельствуют о наличии диффузии, как правило, протекающей не настолько быстро, чтобы считаться равновесной [8, 9]. Поэтому при моделировании вулканических течений необходимо рассматривать процессы вокруг пузырька. Одна из попыток предпринята в [9], где рассматривается стационарное течение магмы, в котором диффузионный подток в пузырьки задается по эмпирической формуле. Полученные распределения параметров в канале существенно отличаются от случая равновесной диффузии. Авторы, в частности, заключают, что неравновесность диффузии значительно ослабляет интенсивность извержения.

В [5] изучено прохождение волны разрежения по каналу, заполненному магмой с пузырьками. Подробно рассматривается динамика роста пузырьков: учитывается зависимость коэффициента диффузии от концентрации воды в расплаве, изменение температуры за счет выделения воды из расплава, неравномерное распределение давления вокруг пузырьков. Ряд результатов относится отдельно к динамике роста пузырька. Установлено, что при фиксированном темпе декомпрессии расплава радиус пузырька растет на начальной стадии подобно e^t , а затем подобно \sqrt{t} . Позднее в [7] экспоненциальный и корневой законы роста описаны аналитически на основе упрощенной модели.

В [3, 6] исследуется влияние подтока в паробразную фазу магмы. Показано, что насыщение водой приводит к более ранней фрагментации расплава, что влечет увеличение расхода магмы в канале.

В данной работе предложены модели интенсивных извержений с неравновесной диффузией воды из расплава в пузырьки. В них сопрягаются течение магмы в канале и рост пузырьков как за счет декомпрессии, так и диффузии. В моделях учтены разность давлений в пузырьках и расплаве, распределение параметров вокруг пузырьков, превращение пузырьковой жидкости в газовзвесь. Рассмотрено влияние диффузионной задержки роста пузырька на динамику извержения. Выявлен параметр, отвечающий за неравновесность диффузии. Нестационарная модель описывает процесс выхода извержения на стационарный режим после разрыва пробки в верхней части канала. Показано, что при развитии течения из состояния покоя система эволюционирует от слабой диффузии к неравновесной, а затем, возможно, к равновесной. Последний переход осуществляется при интенсивной диффузии и гарантирует продолжительность извержения.

1. Диффузия воды из расплава в пузырьки. При подъеме магмы концентрация воды в расплаве падает неравномерно. Вода быстро выделяется из расплава вблизи поверхности пузырьков, тогда как в пространстве между пузырьками концентрация воды понижается медленнее. Для вычисления распределения концентрации рассмотрим независимый рост пузырька в сферической ячейке малого размера. Суммарная масса всех ячеек равна массе пузырьковой жидкости в канале. Пузырек окружен сферическим слоем расплава, который питает его водой и расширяется вместе с ним. Масса системы пузырек – сферический слой не меняется. На поверхности пузырька концентрация воды достигает равновесного значения, причем давление расплава рядом с пузырьком не отличается от давления газа в пузырьке P_g . Согласно расчетам термодинамических процессов вокруг пузырька [5] при декомпрессии смеси $1 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1}$ ее температура меняется менее, чем на 5%, поэтому будем пренебрегать изменением температуры расплава.



Фиг. 1. Зависимость вязкости магматического расплава в зависимости от концентрации растворенного газа при $T = 1000, 1150, 1300$ К (кривые 1–3)

В сферических координатах, связанных с пузырьком, изменение концентрации воды вокруг пузырька описывается уравнением диффузии (1.1), краевыми условиями (1.2), соотношениями (1.3) и законом Генри (1.4)

$$\frac{dc}{dt} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) \tag{1.1}$$

$$c(r_B) = c^{eq}, \quad \frac{4}{3} \pi c_0 r_{S*}^3 \rho_{ch} = \frac{4}{3} \pi r_B^3 \rho_g + 4 \pi \rho_{ch} \int_{r_B}^{r_S} r^2 c(r) dr \tag{1.2}$$

$$\frac{4}{3} \pi n r_B^3 = \alpha, \quad \frac{4}{3} \pi n r_S^3 = 1, \quad \frac{4}{3} \pi n_* r_{S*}^3 = 1 \tag{1.3}$$

$$c^{eq} = k_p \sqrt{P_g} \tag{1.4}$$

Здесь c – концентрация воды, c_0 – начальная концентрация воды, c^{eq} – равновесная концентрация воды, D – коэффициент диффузии, k_p – коэффициент растворимости, P_g – давление в пузырьке, ρ_g – плотность газа в пузырьке, ρ_{ch} – плотность расплава в сферическом слое, r – расстояние до центра пузырька, t – время. Уравнения (1.3) связывают радиус пузырька r_B , радиус сферического слоя r_S , плотность пузырьков n и объемную долю выделившегося газа α . Индекс * приписан параметрам до появления пузырька.

Давление в пузырьке P_g и на поверхности ячейки P_m связано посредством уравнения Релея – Ламба, в котором инерционными силами и силой поверхностного натяжения на границе водяной пар – расплав можно пренебречь [7]

$$P_m = P_g - \frac{4 \mu_{eff} d\alpha}{3 \alpha dt}, \quad \mu_{eff} = 3 \theta(\beta) r_B^3 \int_{r_B}^{r_S} \frac{\mu(c(r))}{r^4} dr \tag{1.5}$$

$$0 \leq \beta < 0.4, \quad \theta(\beta) = (1 - 1.67\beta)^{-2.5} \tag{1.6}$$

Здесь $\theta(\beta)$ – эмпирический коэффициент, зависящий от объемной доли кристаллов β [10].

Вязкость силикатного расплава измерена экспериментально и аппроксимирована формулой [11] (фиг. 1)

$$\log_{10} \mu(c, T) = 0.2911 + 0.8330 \ln c - \frac{1304 + 2368 \ln c}{T - 344.2 - 32.25 \ln c} \tag{1.7}$$

По распределению концентрации воды в расплаве можно вычислить среднюю концентрацию воды и среднюю вязкость расплава

$$c_{av} = \frac{3}{r_S^3 - r_B^3} \int_{r_B}^{r_S} r^2 c(r) dr, \quad \mu_{av} = \frac{3\theta(\beta)}{r_S^3 - r_B^3} \int_{r_B}^{r_S} r^2 \mu(c(r), T) dr \quad (1.8)$$

2. Аналитическое выражение для диффузионного подтока воды в пузырьки. Задача о росте пузырька допускает упрощение в случае параметров, характерных для извержений сильновязких магм. Характерная толщина сферического слоя $h = 10^{-6}$ м является линейным масштабом для диффузии в сферической ячейке. Тогда характерное время диффузии $\tau_D = h^2/D$ ($D \approx 10^{-12}$ м² · с⁻¹). Пролетное время для течения магмы в канале $\tau = L/v_0$ задает масштаб времени изменения граничных условий ($L \approx 5000$ м – длина канала, $v_0 \approx 10$ м · с⁻¹ – характерная скорость подъема магмы из очага при вулканических извержениях). Уравнение (1.1) в безразмерных переменных содержит число Пекле

$$\frac{dc}{dt} = \frac{Pe_{dif}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad Pe_{dif} = \frac{\tau}{\tau_{dif}} = \frac{DL}{h^2 v_0} \approx 500 \quad (2.1)$$

Так как число Пекле значительно превосходит единицу, производной по времени в уравнении (2.1) можно пренебречь, и задача (1.1)–(1.4) имеет аналитическое решение

$$c(r) = C_1 + \frac{C_2}{r} \quad (2.2)$$

$$C_1 = \frac{2\rho_g r_B^3 + \rho_{ch}(3c(r_B)r_B(r_S^2 - r_B^2) - 2c_0 r_S^3)}{\rho_{ch}(3r_S^2 r_B - r_B^3 - 2r_S^3)}$$

$$C_2 = \frac{2r_B(\rho_g r_B^3 + \rho_{ch}(c(r_B)(r_S^3 - r_B^3) - c_0 r_S^3))}{\rho_{ch}(3r_S^2 r_B - r_B^3 - 2r_S^3)}$$

Диффузионный подток воды в пузырьки, занимающие единичный объем, определяется формулой

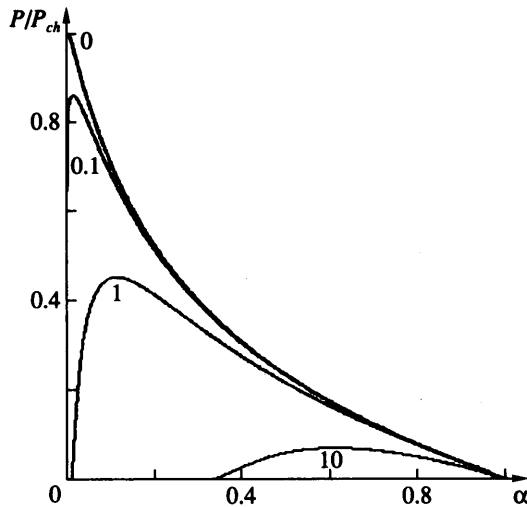
$$j_{dif} = 4\pi r_B^2 n D \rho_m \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=r_B} \quad (2.3)$$

Учитывая уравнения (1.3), запишем

$$j_{dif} = -4(6\pi^2 \alpha)^{1/3} n^{2/3} D \rho_m \frac{\rho_g / \rho_{ch} + c^{eq}(P_g)(1 - \alpha) - c_0 n / n_*}{3\alpha^{1/3} - \alpha - 2} \quad (2.4)$$

Количество пузырьков в единичном объеме, объемная доля газа и средняя концентрация воды в сферическом слое c_{av} связаны соотношениями [6]

$$\frac{(1 - c_{av})(1 - \alpha)}{(1 - c_0)} = \frac{n}{n_*} \quad (2.5)$$



Фиг. 2. Линии уровня функции j_{dif}/ω на плоскости $\alpha, P/P_{ch}$

Пренебрегая c_0 и c_{av} по сравнению с 1, получим $n = n_*(1 - \alpha)$. Приближенное выражение для n позволяет выразить диффузионный подток через параметры течения и свойства магмы

$$j_{dif} = \omega f(\alpha) g(\alpha, P_g, c_0) \quad (2.6)$$

$$\omega = \rho_m D n_*^{2/3}, \quad f(\alpha) = \frac{4(6\pi^2 \alpha)^{1/3} (1 - \alpha)^{5/3}}{(2 + \alpha^{1/3})(1 - \alpha^{1/3})^2}$$

$$g(\alpha, P_g, c_0) = c_0 - k_p \sqrt{P_g} - \frac{\alpha P_g}{(1 - \alpha) RT_{ch} \rho_{ch}}$$

Диффузионный подток всегда возрастает при уменьшении давления и неограниченно возрастает при приближении к состоянию $\alpha = 1$ (фиг. 2). Зависимость j_{dif} от объемной доли не монотонна. При малой объемной доле линии уровня функции j_{dif}/ω загибаются к началу координат, так как при любом давлении смеси и отсутствии пузырьков функция f равна 0. Также $j_{dif} = 0$, когда обращается в нуль функция g , что задает определенную зависимость между P_g и α . Зависимость $g(\alpha, P_g) = 0$ (кривая 0 на фиг. 2) ограничивает область изменения параметров смеси и, как будет показано ниже, соответствует случаю равновесной диффузии.

Баланс массы в сферическом слое вокруг пузырька можно записать в виде

$$\frac{d(c_{av} \rho_m)}{dt} = -\omega f(\alpha) (c_{av} - c^{eq}), \quad c_{av} = c_0 - \frac{\alpha P_g}{(1 - \alpha) RT_{ch} \rho_{ch}} \quad (2.7)$$

Чем больше ω , тем быстрее концентрация приближается к случаю равновесной диффузии, когда $c_{av} = c^{eq}$. При $\omega \gg 1$ условие равновесности диффузии, $c_{av} = c^{eq}$ удобнее использовать в модели течения вместо формулы подтока (2.6). При $\omega = 0$ число Пекле также равно нулю, и квазистационарная постановка задачи о росте пузырька не правомерна, однако формула диффузионного подтока (2.6) принимает тривиальный вид и остается верной $j_{dif} = 0$. Это равносильно сохранению повсюду в канале на-

чальной концентрации воды в расплаве $c = \text{const}$. Будем называть этот случай слабой диффузией. Модели течений с равновесной и слабой диффузией, соответствующие предельным значениям ω , рассмотрены в [4]. Модель с неравновесной диффузией рассматривает случай конечных ω и допускает предельные переходы к случаям слабой и неравновесной диффузии.

3. Течение магмы в канале. Рассмотрим интенсивное извержение, при котором течение в канале состоит из двух зон: пузырьковой жидкости и газозвеси (фиг. 3). При этом давление в очаге меньше давления нуклеации, и длина переходной зоны фрагментации между пузырьковой жидкостью и газозвесью мала по сравнению с длиной канала [2]. Будем считать, что в процессе подъема магмы не происходит зарождения новых пузырьков. (В магме растут только пузырьки, зародившиеся в ней еще в очаге.)

Модель течения магмы в канале вулкана основывается на моделях, предложенных в [1–6]. Она описывает течение в вертикальном, цилиндрическом канале кругового сечения диаметром d и длиной L .

Предполагается, что магма – двухкомпонентная смесь. Компонента расплава с кристаллами и с растворенной в ней водой моделируется несжимаемой жидкостью. Компонента свободного водяного пара в пузырьках моделируется совершенным газом. Плотность воды в расплаве и плотность чистого расплава совпадают и равны ρ_m , поэтому плотность смеси определяется формулой

$$\rho = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_{ch}, \quad \rho_{ch} = \beta \rho_x + (1 - \beta) \rho_m$$

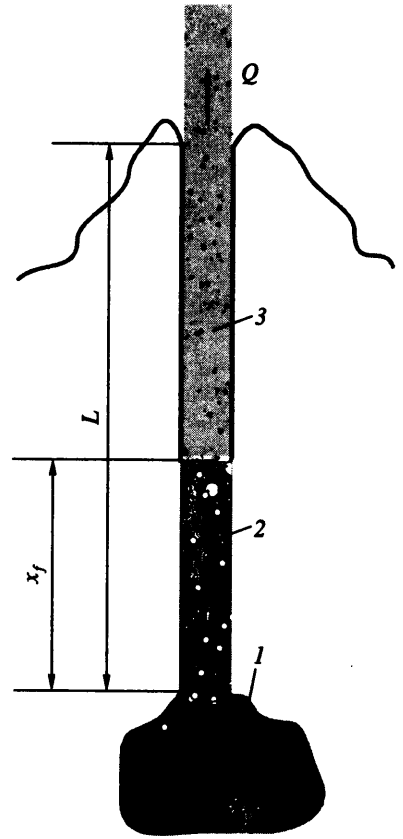
где ρ_{ch} – плотность расплава с кристаллами, ρ_x – плотность кристаллов, β – объемная концентрация кристаллов в расплаве.

Рассматривая извержение на временах, превосходящих пролетное время канала $\tau = L/v$, можно предполагать, что течение в канале вышло на стационарный режим. Течение магмы в канале можно считать одномерным, односкоростным и изотермическим [4]. Течение имеет параболический профиль скорости в зоне пузырьковой жидкости и плоский профиль скорости в зоне газозвеси. Модель течения состоит из уравнения сохранения массы для компоненты свободного газа (3.1), уравнения импульса для смеси и дополнительных соотношений (3.3)–(3.5), в том числе одного из двух условий на фронте фрагментации (3.5):

$$\frac{d\alpha \rho_g v}{dx} = \text{Pe} j(\alpha, P_g, c_0) \quad (3.1)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) Q \frac{dv}{dx} = -Eu \frac{d(P_m + \alpha(P_g - P_m))}{dx} - \frac{\rho}{\text{Fr}} - \frac{32\lambda}{\delta \text{Re}_d} \mu_{av} v \quad (3.2)$$

$$\rho = 1 - \alpha + \alpha \rho_g, \quad Q = \rho v \quad (3.3)$$



Фиг. 3. Структура течения в канале вулкана: 1 – очаг, 2 – зона пузырьковой жидкости, 3 – зона газозвеси

$$P_g = \sigma \rho_g, \quad P_m = P_g - \frac{4\lambda}{3} \frac{\delta}{Eu Re_d} \frac{\mu_{eff} v d \alpha}{\alpha dx} \quad (3.4)$$

$$x = x_f; \quad \alpha = \alpha_{CR} \quad \text{или} \quad P_g - P_m = \Delta P_{CR} \quad (3.5)$$

$$Eu = \frac{P_{ch}}{\rho_{ch} v_0^2}, \quad Fr = \frac{v_0^2}{g L}, \quad Re_d = \frac{\rho_{ch} v_0 d}{\mu_0}, \quad Pe = \frac{\rho_m L D n_*^{2/3}}{\rho_{ch} v_0}$$

$$\delta = \frac{d}{L}, \quad \sigma = \frac{\rho_{ch} R T}{P_{ch}}, \quad c_{ch} = k_p \sqrt{P_{ch}}$$

Здесь v – средняя вертикальная скорость потока в поперечном сечении канала, Q – поток магмы в канале, T , μ_{av} – температура и вязкость смеси, x – вертикальная координата, отсчитываемая от начала канала, x_f – координата фронта фрагментации. В зоне пузырьковой жидкости $\lambda = 1$, в зоне газозвеси $\lambda = 0$. Диффузионный подток в пузырьки задается формулой (2.6).

Давление отнесено к своему значению в очаге P_{ch} . Плотность – к плотности расплава с кристаллами ρ_{ch} . Скорость смеси – к характерной скорости подъема магмы из очага v_0 . За линейный масштаб выбрана длина канала L . Параметр ω , отнесенный при обезразмеривании к пролетному времени канала, представляет собой модифицированное число Пекле, отвечающее за интенсивность диффузии в процессе течения.

На входе в канал известны давление и объемная доля газа. На выходе из канала смесь либо достигает атмосферного давления при дозвуковом истечении, либо разгоняется до скорости звука [2]. Граничные условия на концах канала имеют вид

$$x = 0: P = 1, \quad \alpha = \frac{\sigma(c_0 - c)}{1 - c_0 + \sigma(c_0 - c)} \quad (3.6)$$

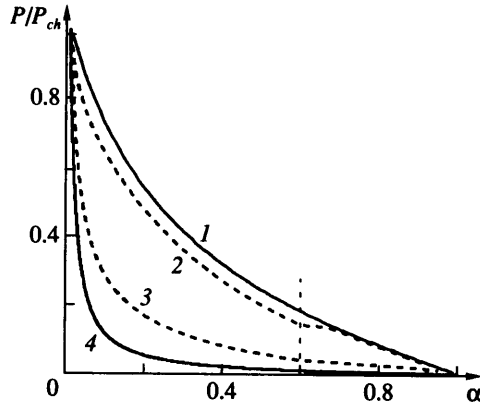
$$x = 1: v = \sqrt{\frac{Eu P}{\alpha \rho}} \quad \text{или} \quad P = P_{atm} \quad (3.7)$$

Физические параметры, входящие в систему уравнений, измерены для ряда активных вулканов Суффриер Хиллз (остров Монтсеррат, Карибское море), Маунт Сейнт-Хелен (США), Пинатубо (Филиппины), Везувий (Италия). В XX в. на этих вулканах произошло несколько крупных извержений сильновязких магм. Вязкость таких магм удовлетворяет формуле (1.7), растворимость газа в силикатном расплаве удовлетворяет закону Генри (1.4).

В [1] приведены данные, измеренные на вулкане Суффриер Хиллз. На основе этих данных выбираются параметры для расчета: $Eu = 540$, $Fr = 0.0002$, $Re_d = 0.075$, $\delta = 0.006$, $\sigma = 9.0$, $c_0 = 0.05$, $c_{ch} = 0.048$, $\alpha_{cr} = 0.6$, $\Delta P_{cr} = 0.07$, $\rho_x/\rho_m = 0.92$.

Стационарная задача в канале решалась методом пристрелки. Система уравнений (3.1)–(3.5) интегрировалась с заданным расходом до выполнения условия (3.7) на некоторой длине канала L' . Длина L' сравнивалась с истинной длиной канала L , затем численное интегрирование повторялось со скорректированным расходом. Для ускорения вычислений зависимость вязкости от концентрации воды в расплаве и температуры была аппроксимирована функцией $A(T)c^{-3}$, что позволило вычислять интегралы (1.5) и (1.8) аналитически (при $T = 1123$ К $\log_{10} A(T) = 15.66 - 0.01332 T$ относительная точность аппроксимации составляет 0.1).

Если число Пекле значительно превосходит единицу, то темп декомпрессии пузырька значительно медленнее, чем диффузионные процессы. В силу этого повсюду



Фиг. 4. Зависимость давления от объемной доли газа для $Re = \infty, 2, 0.02$ и 0 (кривые 1–4)

в расплаве концентрация воды близка к своему равновесному значению. Тогда в формулах (2.5) $c_{av} = c^{eq}$, что позволяет выразить давление как функцию объемной доли газа

$$P(\alpha) = \sigma \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(c_0 + \frac{\sigma c_{ch}^2}{2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4c_0}{\sigma c_{ch}^2} \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) \right) \quad (3.8)$$

Такое описание течения наиболее достоверно для магм с обилием пузырьков и высоким коэффициентом диффузии.

Если $Re = 0$, то в формулах $c_{av} = c_{ch}$, и давление определяется объемной долей газа и условиями в очаге

$$P = \sigma(c_0 - c_{ch})(1 - \alpha)/\alpha \quad (3.9)$$

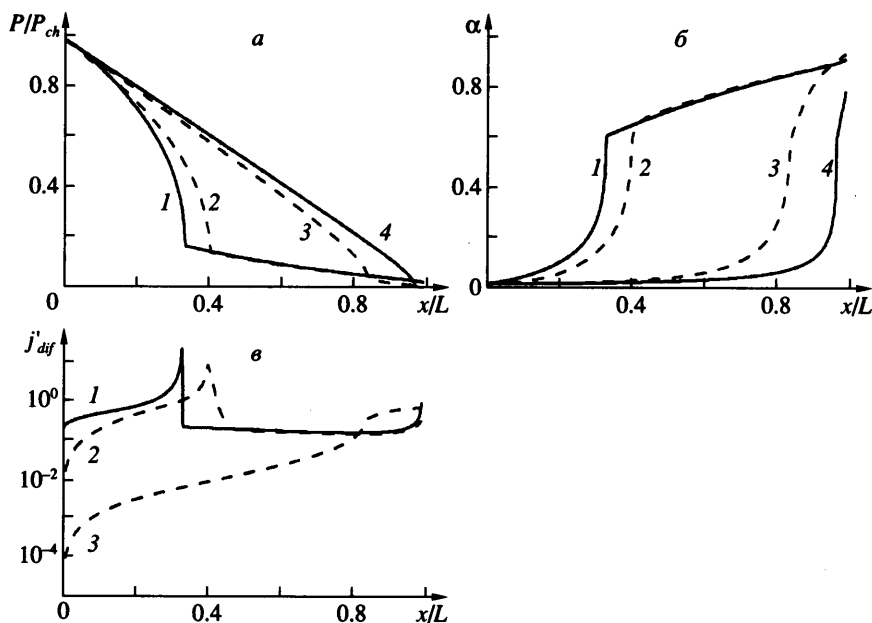
Такое описание течения наиболее достоверно для магм с малым количеством пузырьков и низким параметром диффузии.

Наличие зависимости $P(\alpha)$ позволяет свести задачу (3.1)–(3.5) к дифференциальному уравнению первого порядка на $\alpha(x)$, имеющему решение в квадратурах.

На фиг. 4 изображены зависимости давления от объемной доли газа для случаев предельной диффузии ($Re = 0$ и $Re = \infty$). Вертикальная линия соответствует критерию фрагментации по объемной доле газа. При слабой диффузии содержание воды в частице расплава не меняется, фрагментация происходит только из-за расширения пузырьков при декомпрессии. Темп падения давления и увеличение объемной доли газа в данном случае минимальные, поскольку вязкость магмы остается постоянной и равной относительно невысокой вязкости в очаге, что приводит к малой величине силы сопротивления канала вулкана. Равновесная диффузия обеспечивает максимальные темпы падения давления и увеличения объемной доли газа.

Зависимости, рассчитанные по полной модели для конечных значений Re , расположены между предельными зависимостями (штриховые линии на фиг. 4). При уменьшении числа Пекле система приближается к случаю слабой диффузии. Система близка к случаю слабой диффузии при числах Пекле порядка 0.02 и меньших. При числах Пекле порядка 2 и больших система близка к случаю равновесной диффузии.

Профили стационарного течения качественно похожи при различных числах Пекле (фиг. 5). Рассмотрим течение магмы при равновесной диффузии. Падение давления



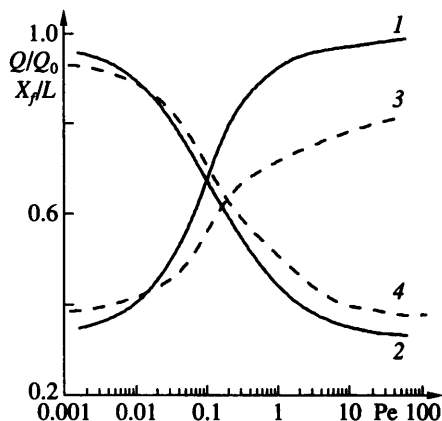
Фиг. 5. Стационарные профили давления (а), объемной доли газа (б) и диффузионного подтока $j'_{dif} = j/(c_0 Q_0)$ (в) в канале для $Re = \infty, 2, 0.02$ и 0 (кривые 1–4) при использовании критерия фрагментации по объемной доле газа

в потоке определяется вязким сопротивлением ($32/(\delta Re_d)$, $1/Fr \gg 1$, (3.2)) и весом магмы. В начале канала вязкость магмы невелика, поэтому давление падает медленно, и приток газа в пузырьки незначителен. Концентрация воды в магме уменьшается с 5 до 4% на протяжении достаточно большого участка канала ($0.2-0.3 L$), при этом вязкость магмы увеличивается менее чем на порядок (фиг. 1). В результате профиль давления в нижней части канала близок к линейному, соответствующему течению несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью, и скорость потока близка к своему начальному значению. Понижение концентрации с 4 до 2% приводит к возрастанию вязкости на два порядка. Нелинейное возрастание силы сопротивления приводит к более резкому падению давления, и профиль давления отклоняется от линейного. При падении давления смесь расширяется, что приводит к увеличению скорости и дальнейшему росту силы сопротивления.

В процессе течения магмы наблюдается ряд взаимовлияющих процессов. Падение концентрации воды в расплаве приводит к увеличению вязкости и более резкому падению давления, что, в свою очередь, вызывает более интенсивный диффузионный подток, уменьшающий водосодержание расплава. Количество воды в расплаве уменьшается, магма становится еще более вязкой, и давление падает еще быстрее. В области пузырьковой жидкости перед фрагментацией расплав испытывает максимальную скорость декомпрессии, а интенсивность подтока достигает максимального значения.

Положение фронта фрагментации можно установить по изломам профилей, связанных с исчезновением после фрагментации высокого сопротивления стенок канала (фиг. 5). За фронтом фрагментации смесь не испытывает сопротивления канала, и перепад давлений разгоняет смесь вплоть до скорости звука, определяемой формулой (3.6). Профиль давления в газозвеси близок к линейному.

Для реальных значений $Re = 0.02, 2$ профили параметров в канале располагаются между профилями для предельных значений: $Re = 0, \infty$ (фиг. 5). Таким образом, урав-



Фиг. 6. Зависимость стационарного расхода магмы в канале (1, 3) и положения фронта фрагментации (2, 4) от числа Пекле при использовании критерия фрагментации по объемной доле газа (сплошные кривые) и при использовании критерия фрагментации по избыточному давлению в пузырьках (штриховые кривые)

нение (2.6), предложенное для описания массообмена в случае конечных коэффициентов диффузии, хорошо описывает динамику течения, несмотря на то, что его применимость при малых Pe строго не обоснована. При $Pe = 0$ фронт фрагментации находится близко к поверхности, зона пузырьковой жидкости занимает максимально возможную длину. Соответствующий ей расход магмы минимален. При $Pe = \infty$ извержение имеет самую короткую зону пузырьковой жидкости и наибольший возможный расход магмы в канале.

На фиг. 6 показаны зависимости стационарного расхода в канале и положения фронта фрагментации от числа Пекле. Расход отнесен к расходу магмы в канале в случае равновесной диффузии ($Q_0 = 2.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^{-3}\text{с}^{-1}$), когда на фронте фрагментации выполняются оба критерия ($\alpha = \alpha_{cr}$, $\Delta P = \Delta P_{cr}$).

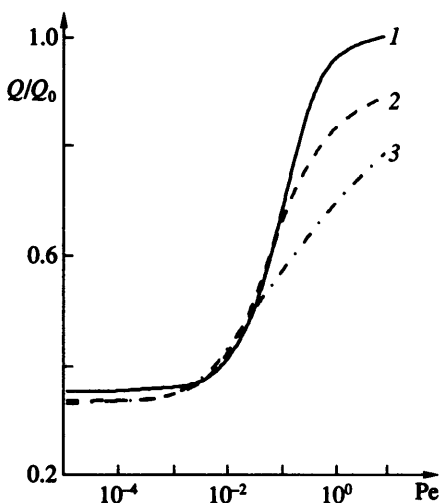
При любом $Pe < 0.02$ расход близок к величине стационарного расхода в случае слабой диффузии, фронт фрагментации находится в непосредственной близости от выхода из канала.

Расчеты с использованием критерия фрагментации по объемной доле газа показывают, что с возрастанием числа Пекле от 0.02 до 2 стационарные расходы отличаются более чем в два раза. Для любого $Pe > 2$ расход практически не зависит от Pe и близок к величине стационарного расхода в случае равновесной диффузии.

Расчеты с использованием критерия фрагментации по избыточному давлению показывают, что при возрастании числа Пекле от 0.02 до 200 расход магмы в канале увеличивается в два раза, но не достигает равновесного значения.

В соответствии с наблюдениями значение числа Пекле для магм превосходит $2 \cdot 10^5$ и не превышает 200. Малые значения Pe соответствуют магме с малым количеством пузырьков и малым коэффициентом диффузии. Сильно вспененная магма с большим коэффициентом диффузии характеризуется большим Pe .

Интервал реальных для магмы значений числа Пекле ($2 \cdot 10^5 < Pe < 200$) содержит область сильного влияния параметра диффузии, за границами которой система близка к одному из предельных случаев. Диаграмма стационарных течений (фиг. 6) позволяет определить неравновесность диффузии и указывает на правомерность использования в модели течения зависимости (3.8) или (3.9) вместо уравнения (3.1). Согласно данным, изображенным на фиг. 6, при $Pe < 0.02$ стационарное течение можно описать в предположении о слабой диффузии для любого критерия фрагментации. При $Pe > 2$



Фиг. 7. Зависимость стационарного расхода магмы в канале от числа Пекле газа для $\beta = 0, 0.15$ и 0.25 (кривые 1–3) при использовании критерия фрагментации по объемной доле

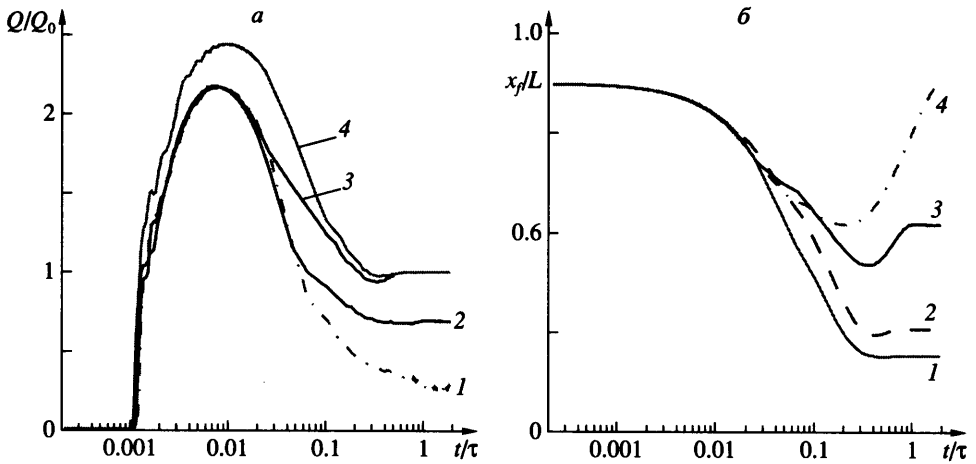
течение с фрагментацией по объемной доле газа можно описать в предположении о равновесной диффузии. Для других значений Re необходимо исследовать течение с помощью предложенной модели.

На фиг. 7 показаны зависимости стационарного расхода в канале Q от числа Пекле Re при различных значениях доли кристаллов в расплаве β . При кристаллизации магмы вода не участвует в формировании кристаллов, поэтому рассматривая магму с фиксированным водосодержанием, необходимо пересчитывать водосодержание расплава в зависимости от объемной доли кристаллов в расплаве. Пока магма находится в очаге, начальное содержание воды в расплаве увеличивается вместе с β так, что доля растворенной воды не изменяется $c_0(1 - \beta) = \text{const}$. Наличие кристаллов увеличивает вязкость магмы, для рассматриваемых объемных долей кристаллов коэффициент в формуле вязкости (1.6) принимает значения $\theta(0) = 1$, $\theta(0.15) = 2.1$, $\theta(0.25) = 3.9$. Однако увеличение вязкости сказывается только при больших значениях числа Пекле. Стационарный расход при слабой и неравновесной диффузии практически не зависит от доли кристаллов, так как повышение вязкости компенсируется понижением фронта фрагментации. При равновесной диффузии стационарные расходы при различном содержании кристаллов отличаются на $0.3Q_0$.

Предлагаемая модель может описывать течения со слабой или равновесной диффузией, а также промежуточный случай с неравновесной диффузией. Ее также можно расширить на случай нестационарных течений, не меняя формулу диффузионного подтока (2.6).

4. Нестационарное течение магмы в канале в случае неравновесной диффузии. Рассмотрим нестационарное одномерное течение магмы в вертикальном цилиндрическом канале с фрагментацией по объемной доле газа без учета избыточного давления в пузырьках. Такое течение описывается уравнениями неразрывности для смеси (4.1) и ее газовой компоненты (4.2), уравнением импульса для смеси (4.3), а также дополнительными соотношениями (3.3)–(3.5):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$



Фиг. 8. Зависимость расхода магмы на выходе из канала (а) и положения фронта фрагментации (б) от времени при $Re = \infty, 2, 0.2$ и 0 (кривые 1–4)

$$\frac{\partial \alpha \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_g v}{\partial x} = Re j(\alpha, P_g, c_0) \quad (4.2)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) Q \frac{\partial v}{\partial x} = -Eu \frac{\partial P_g}{\partial x} - \frac{\rho}{Fr} - \frac{32\lambda}{\delta Re_d} \mu_{av} v \quad (4.3)$$

Здесь t – время, отнесенное к пролетному времени канала, остальные обозначения введены при рассмотрении стационарного течения.

Моделировалась ситуация, когда извержение вулкана начинается в результате разрушения “пробки”, расположенной в верхней части канала на высоте $x_p = 0.9 L$. Предполагается, что в начальный момент смесь находится в состоянии покоя. Давление под пробкой удовлетворяет уравнениям гидростатики и связано с объемной долей газа по формуле (3.8), над пробкой параметры смеси близки к атмосферным [3]. Давление в начале канала всегда остается равным P_{ch} . При дозвуковом истечении смеси из канала давление на выходе равно атмосферному. При сверхзвуковом истечении смеси граничные условия на выходе отсутствуют.

Задача (3.3)–(3.5), (4.1)–(4.3) с соответствующими начальными и граничными условиями решалась численно консервативным методом Мак Кормака первого порядка по x и t .

На фиг. 8 изображено поведение вулканической системы при различных числах Пекле. Изменение параметров течения при конечном числе Пекле лежит между случаями слабой и равновесной диффузии.

После разрыва пробки по каналу проходит волна разрежения, вызывающая фрагментацию смеси и возрастание расхода магмы. На первых секундах извержения декомпрессия расплава происходит настолько быстро, что суммарный диффузионный подток газа в пузырьки незначителен, и расширение пузырьков происходит за счет декомпрессии расплава. На начальной стадии при любом числе Пекле расход возрастает так же, как в случае слабой диффузии. На короткое время он достигает величин порядка $2Q_0$, затем фронт фрагментации замедляет свое продвижение в глубь канала, и расход магмы уменьшается. После $0.1t$ система с $Re > 0.02$ начинает уда-

ляться от случая слабой диффузии. Расширение пузырьков за счет диффузии увеличивает расход по сравнению со случаем слабой диффузии.

Для $Pe = 0$ фронт фрагментации опускается не глубоко и возвращается на исходную позицию. С повышением фронта суммарное сопротивление канала возрастает, и после кратковременного скачка расход уменьшается до $0.3Q_0$. В данном случае можно говорить о кратковременном, быстро затухающем извержении.

Для $Pe = 0.2$ в результате установления течения система становится далека от случаев слабой и равновесной диффузии. В начале извержения фронт фрагментации опускается на середину канала, но диффузия не может поддержать фрагментацию на этой глубине: пройдя половину канала, пузырьки не набирают критического объема. В результате при установлении фронт фрагментации поднимается вверх, и расход в канале падает до $0.7Q_0$. В данном случае можно говорить об извержении средней интенсивности.

Для $Pe = 2$ система переходит от слабой диффузии к равновесной. Фронт фрагментации опускается и стабилизируется на большой глубине. Интенсивная диффузия способна поддержать фрагментацию пузырьковой жидкости на большой глубине: пузырьки набирают критический объем, проходя небольшой участок канала. В свою очередь глубокий фронт фрагментации обеспечивает малое суммарное сопротивление канала, а следовательно большой расход магмы в канале. В данном случае, как и в случае $Pe = \infty$, извержение стабилизируется на катастрофической стадии с высоким расходом. Сохранение давления в очаге приводит к долговременному интенсивному извержению.

Заключение. Построены стационарная и нестационарная модели течения магмы в канале вулкана с учетом диффузии воды в силикатном расплаве. Диффузионный подток воды в пузырьки контролируется числом Пекле, вычисляемым по характерному времени процессов в канале, количеству пузырьков в единичном объеме расплава и коэффициенту диффузии. При определенных значениях числа Пекле система становится близка к случаям равновесной диффузии или ее отсутствию, когда предлагаемая модель допускает упрощения, исследованные ранее.

В стационарном случае с возрастанием числа Пекле стационарный расход магмы увеличивается более чем в 2 раза. При нестационарном извержении, начинающемся с разрыва пробки в верхней части канала, диффузия воды в пузырьки влияет на процесс установления системы. Интенсивный диффузионный подток воды в пузырьки способен поддерживать систему в стабильном состоянии с расходом, близким к стационарному расходу в случае равновесной диффузии (Q_0). При малой интенсивности извержение либо затухает, либо стабилизируется с расходом $0.3-0.7 Q_0$. С уменьшением числа Пекле время установления течения возрастает.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 02-01-00067) и президентского гранта поддержки научных школ (НШ-1697.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бармин А.А., Мельник О.Э. Об особенностях извержения сильновязких газонасыщенных магм // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 49–59.
2. Melnik O.E. Dynamics of two-phase conduit flow of high-viscosity gas-saturated magma: large variations of sustained explosive eruption intensity // *Bul. Volcanol.* 2000. V. 62. P. 153–170.
3. Бармин А.А., Мельник О.Э., Старостин А. Б. Моделирование влияния притока воды на течение в канале вулкана // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 95–105.
4. Melnik O.E., Sparks R.S.J. Modelling of conduit flow dynamic during explosive activity at Soufriere Hills Volcano, Montserrat // *The Eruption of Soufriere Hills Volcano, Montserrat, from 1995 to 1999* / Eds. T.H. Druitt and B.P. Kokelaar. Mem. Geol. Soc., London. 2000. V. 21. P. 307–317.

5. Proussevitch A. A., Sahagian D. L. Dynamics of coupled diffusive and decompressive bubble growth in magmatic systems // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101. P. 17447–17456.
6. Старостин А.Б. Влияние диффузионного притока воды на течение магмы в канале вулкана // Тр. конф. конкурса молодых ученых. Институт механики МГУ. М.: Изд. МГУ, 2004. С. 94–101.
7. Navon O., Lyakhovsky V. Vesiculation processes in the silic magmas. In: *Physics of explosive eruptions* / Eds G.S. Gilbert and R.S.J. Sparks. London: Geol. Soc. Spec. Publ., 1998. V. 145. P. 27–50.
8. Cashman K.V. Volatile control on magma ascent and eruption // “State of the Planet: Frontiers and Challenges” / Eds. R.S.J. Sparks and C.J. Hawhesworth. Monograph of the American Geophysical Union. 2004. P. 109–124.
9. Mangan M., Mastin L., Sisson T. Gas evolution in eruptive conduits: combining insights from high temperature and pressure decompression experiments with steady-state flow modeling // *J. Volcanol. and Geotherm. Res.* 2004. V. 129. P. 23–36.
10. Marsh B.D. On crystallinity, probability of occurrence and rheology of lava and magma // *Contribut. Mineral. and Petrol.* 1981. V. 78. P. 85–98.
11. Hess K.U., Dingwell D.B. Viscosities of hydrous leucogranitic melts: A non-arrhenian model // *Amer. Mineralogist.* 1996. V. 81. P. 1297–1300.

Москва

Поступила в редакцию
18.И.2005