

УДК 532.516.5:532.133

© 2005 г. С. И. МАРТЫНОВ, А. О. СЫРОМЯСОВ

ВЯЗКОСТЬ СУСПЕНЗИИ С КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКОЙ СФЕР В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрено течение вязкой жидкости через бесконечную периодическую решетку твердых сфер одинакового радиуса. Построено периодическое по трем переменным решение уравнений Стокса для течения вязкой несжимаемой жидкости с линейным профилем скорости. Решение учитывает гидродинамическое взаимодействие бесконечного числа частиц в решетке. Получено выражение для эффективной вязкости суспензии с кубической решеткой частиц.

Ключевые слова: вязкая жидкость, периодическая решетка сфер, сдвиговой поток, взаимодействие частиц.

Динамика частиц влияет на все процессы, происходящие в суспензии, и сказывается на ее реологических свойствах. Учет парных взаимодействий дает вклад порядка второй степени по объемной концентрации в выражение для эффективной вязкости суспензии [1]. Однако применимость полученных теоретических результатов ограничивается суспензиями с малой объемной концентрацией частиц, что недостаточно для практики. Увеличение точности теоретических выражений по объемной концентрации частиц связано с учетом гидродинамического взаимодействия большего числа частиц.

В [2, 3] предложен метод исследования влияния гидродинамики на коллективное поведение частиц в потоках с различным профилем скорости. При этом показано, что решение подобной задачи в принципе нельзя свести к сумме парных взаимодействий этих частиц. Это связано с тем, что граничные условия для скорости жидкости учитывают суммарное воздействие выделенной частицы на все остальные. С увеличением числа частиц растет погрешность представления их совместного влияния суммой парных взаимодействий. С этим связана известная проблема расходимости рядов или интегралов при решении уравнений движения вязкой жидкости с бесконечным числом частиц [4]. Корректный учет многочастичных взаимодействий приводит к качественному изменению решения уравнений движения вязкой жидкости.

Большое значение для теории и практики имеет исследование периодических суспензий [5–7]. В частности, изучается влияние скорости сдвигового потока на динамику частиц и вязкость суспензии [8, 9], а также зависимость вязкости суспензий с периодической структурой частиц от их концентрации [10]. При этом используется метод, предложенный в [11] и позволяющий обойти проблему сходимости включением в уравнения движения жидкости точечных сил, действующих в узлах решетки.

В связи с этим представляет интерес рассмотреть задачу о течении суспензии вязкой жидкости с периодической решеткой частиц с учетом гидродинамического взаимодействия всех частиц. В данной работе рассматривается линейный поток жидкости с кубической решеткой сфер. Предлагается аналитический метод решения задачи и вычисляется эффективная вязкость такой суспензии.

1. Постановка задачи. Исследуется обтекание жидкостью вязкости η кубической решетки твердых сфер радиуса a . Начало координат берется в центре одной из сфер, считающейся неподвижной. Решетка задается векторами \mathbf{r}_j , $r_{ja} = r\delta_{ja}$, $j = 1, 2, 3$,

соединяющими центры соседних сфер. Здесь r – период решетки, $a/r \ll 1$. Положение сферы в решетке характеризуется вектором $\mathbf{r}^n = n_j \mathbf{r}_j$, $\mathbf{n} \in Z^3$. Положение точки относительно начала координат определяется вектором \mathbf{x} , а относительно n -й частицы – вектором $\mathbf{x}^n = \mathbf{x} - \mathbf{r}^n$.

Предполагается, что число Рейнольдса $Re \ll 1$, поэтому для скорости течения \mathbf{u} и давления p справедливо приближение Стокса

$$\eta \Delta \mathbf{u} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

Скорость и давление ищутся в виде

$$\mathbf{u}_i = U_i + v_i, \quad p = P + p' \quad (1.2)$$

Здесь U_i и P – известные невозмущенные поля скорости и давления, удовлетворяющие (1.1), v_i и p' – возмущения, обусловленные наличием частиц. Невозмущенная составляющая давления постоянна, U_i – линейная функция координат

$$U_i = C_{ij} x_j = E_{ij} x_j + \Omega_{ij} x_j \quad (1.3)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} + C_{ji}), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - C_{ji})$$

$$C_{kk} = 0, \quad E_{kk} = 0, \quad \Omega_{kk} = 0$$

Возмущения v_i и p' должны удовлетворять (1.1) и быть периодическими относительно кубической решетки, т.е. для любого \mathbf{r}^n

$$v_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}^n) = v_i(\mathbf{x}), \quad p'(\mathbf{x} + \mathbf{r}^n) = p'(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

Сфера, центр которой взят за начало координат, не двигается поступательно, но вращается с некоторой угловой скоростью Γ_{ij} , которая определяется как скоростью сдвига, так и структурой решетки

$$U_i + v_i = \Gamma_{ij} x_j, \quad X = a \quad (1.5)$$

Скорость Γ_{ij} неизвестна.

Далее рассматривается сдвиговой поток. В силу линейности задачи его можно представить в виде суммы потоков, происходящих в трех координатных плоскостях. Поэтому достаточно рассмотреть невозмущенное течение сдвига в плоскости (x_1, x_2) : $C_{12} = 2E$, остальные компоненты матрицы C равны нулю.

Считается, что на частицы не действуют внешние моменты и силы. В безынерционном приближении это означает, что гидродинамические моменты и силы равны нулю

$$T_i = e_{ijk} \oint_{\partial\Omega} x_j \sigma_{kl} m_l dS = 0$$

$$F_i = \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} m_j dS = 0$$

Здесь \mathbf{m} – единичный вектор внешней нормали к поверхности сферы $\partial\Omega$, σ_{ij} – тензор напряжений. Его можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \tau_{ij}$$

$$\sigma_{ij}^0 = -P \delta_{ij} + 2\eta E_{ij} \quad (1.6)$$

$$\tau_{ij} = -p'\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Так как σ_{ij}^0 дает нулевой вклад в F_i и T_i , отсутствие моментов и сил задается уравнениями

$$e_{ijk} \oint_{\partial\Omega} x_j \tau_{kl} m_l dS = 0 \quad (1.7)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \tau_{ij} m_j dS = 0$$

Можно предположить, что v_i и p' имеют такие же четности, как U_i и P , т.е. v_i – нечетная, а p' – четная функция x . В этом случае тензор τ_{ij} четен по x , а значит обращает гидродинамическую силу в нуль.

Таким образом, требуется найти нечетную функцию v_i и четную функцию p' , удовлетворяющие уравнениям (1.1) и (1.4). При этом должны выполняться краевое условие (1.5) и условие отсутствия момента (1.7).

2. Общий вид возмущения поля течения. Для решения задачи модифицируется метод, изложенный в [2]. Граничное условие (1.5) переписывается в виде

$$\begin{aligned} v_i + E_{ij}x_j &= \omega_{ij}x_j, \quad X = a \\ \omega_{ij} &= \Gamma_{ij} - \Omega_{ij} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где тензор ω_{ij} определяет скорость вращения сферы относительно жидкости. В силу линейности уравнений (1.1), (1.4), (1.7) и (2.1) искомое решение может быть представлено в виде суммы решений двух задач, далее называемых задачами α и β .

В задаче α рассматривается движение замороженной решетки, частицы которой вращаются с локальной угловой скоростью жидкости. В этом случае $\omega_{ij} = 0$, и граничное условие принимает вид

$$v_i + E_{ij}x_j = 0, \quad X = a \quad (2.2)$$

В задаче β предполагается, что сфера совершает чисто вращательное движение, т.е.

$$v_i = \omega_{ij}x_j, \quad X = a \quad (2.3)$$

Из (1.1), (1.2) следует, что $\Delta p' = 0$. Для построения четной гармонической периодической функции давления p' используется метод, указанный в [12]

$$p' = F_{jk}L_{jk}^\infty + D_{jklm}L_{jklm}^\infty + P_{jklmst}L_{jklmst}^\infty + \dots$$

$$L_{j\dots k}^\infty = \sum_n L_{j\dots k}^n, \quad L_{j\dots k}^n = \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{X^n}$$

где $X^n = |x^n|$, F_{jk} , D_{jklm} , ... – тензоры, не зависящие от x и, в силу периодичности решетки одинаковые для всех частиц. Возмущение v_i , удовлетворяющее (1.1), ищется как

$$\begin{aligned} \eta v_i &= B_{ij}L_j^\infty + \frac{3}{2}F_{jk}M_{ijk}^\infty - \frac{5}{9}D_{ijkl}L_{jkl}^\infty - \\ &- \frac{1}{18}D_{jklm} \sum_n L_{ijklm}^n (X^n)^2 - \frac{7}{13}P_{ijklms}L_{ijklms}^\infty - \frac{1}{26}P_{jklms} \sum_n L_{ijklmst}^n (X^n)^2 - \dots \end{aligned}$$

$$M_{ijk}^{\infty} = \sum_n M_{ijk}^n, \quad M_{ijk}^n = \frac{x_i^n x_j^n x_k^n}{(X^n)^5}$$

Если ранг мультиполю $L_{j\dots k}^n$ не меньше трех, то каждое слагаемое ряда $L_{j\dots k}^{\infty}$ имеет по n^{-1} порядок не ниже 4, поэтому ряд сходится абсолютно и равномерно, и получаемая функция является периодической относительно решетки. В противном случае ряд расходится. Таким образом, расходятся L_{jk}^{∞} , L_j^{∞} , а также ряд M_{ijk}^{∞} .

Для устранения расходимости мультиполи модифицируются

$$L_{jk}^{\infty} = L_{jk}^0 + \sum_{n \neq 0} \int L_{jkl}^n dx_l \quad (2.4)$$

Функция L_j^{∞} определяется через L_{jk}^{∞} , вычисленный с помощью (2.4). Аналогично, чтобы найти M_{ijk}^{∞} , необходимо сначала дважды проинтегрировать члены ряда, чтобы обеспечить нужный порядок по n , а затем дважды проинтегрировать их. После этого мультиполи принимают вид

$$L_{jk}^{\infty} = L_{jk}^0 + \sum_{n \neq 0} \left(L_{jk}^n + \frac{\delta_{jk}}{r^3 n^3} - 3 \frac{n_j n_k}{r^3 n^5} \right)$$

$$L_j^{\infty} = L_j^0 + \sum_{n \neq 0} \left(L_j^n + \frac{x_j^n}{r^3 n^3} - 3 \frac{n_j \xi}{r^3 n^5} \right)$$

$$M_{ijk}^{\infty} = M_{ijk}^{\infty} + \sum_{n \neq 0} \left[M_{ijk}^n + \frac{n_i n_j n_k}{r^2 n^5} \left(1 + \frac{5\xi}{rn^2} \right) - \frac{1}{r^3 n^5} (x_i n_j n_k + x_j n_i n_k + x_k n_i n_j) \right]$$

Здесь $\xi = x_n n_s$. Вследствие двукратного интегрирования мультиполи L_j^{∞} и M_{ijk}^{∞} не являются периодическими, а возрастают на бесконечности как линейные функции.

В [12] указан способ построения линейных поправок к мультиполям, а также поправка к L_j^{∞} . Именно, если положить

$$\gamma_{jk} = \frac{2}{r} L_j^{\infty} \left(\frac{1}{2} \mathbf{r}^k \right) = -\frac{4\pi}{3r^3} \delta_{jk}$$

то $L_j^{\infty} - \gamma_{jk} x_k$ есть периодическая функция. Аналогично строится поправка $\beta_{ijk} x_l$ к M_{ijk}^{∞} . Подстановка $1/2\mathbf{r}^l$ в M_{ijk}^{∞} дает β_{ijkl} в виде линейной комбинации сумм

$$\sum_{n \neq 0} \frac{n_i \dots n_j}{n^k}$$

Построенные ряды по трем переменным сходятся абсолютно, и порядок суммирования не играет роли. Следовательно,

$$\sum_{n \neq 0} \frac{n_i \dots n_j}{n^k} = \sum_{-q}^q \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \frac{n_i \dots n_j}{n^k}$$

где $q, s, t \rightarrow \infty, q^2 + s^2 + t^2 \neq 0$. Эти суммы не равны нулю, если только индексы i, \dots, j равны попарно. Поэтому

$$\beta_{ijkl} = \frac{2}{3}[(4 + \beta_1)o_{ijkl} + \beta_2\delta_{(ij}\delta_{kl)}]$$

Здесь o_{ijkl} – обобщенный символ Кронекера, равный единице, если $i = j = k = l$, и нулю в противном случае. Скобки в индексах означают симметризацию по всем индексам, взятым в скобки, без деления на количество слагаемых [12]. Для произвольных тензоров второго ранга это дает

$$X_{(ij}Y_{kl)} = X_{ij}Y_{kl} + X_{ji}Y_{kl} + X_{ik}Y_{jl} + \dots + X_{lk}Y_{ij} + X_{lk}Y_{ji}$$

Так как символ Кронекера симметричен, то $\delta_{(ij}\delta_{kl)} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$. Положив $i = j = 1, k = l = 2$, получим $\beta_2 \approx -0.3594$. Так как $M_{ikk}^\infty = -L_i^\infty$, то $\beta_{ijkk} = -\gamma_{ij}$, поэтому

$$4 + \beta_1 + 5\beta_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta_1 \approx -0.1086$$

Функции $L_{jk}^\infty, L_j^\infty - \gamma_{jk}x_k, M_{ijk}^\infty - \beta_{ijkl}x_l$ – периодические. Таким образом, общее решение (1.1), (1.4)

$$\begin{aligned} \eta v_i = & B_{ij}(L_j^\infty - \gamma_{jk}x_k) + \frac{3}{2}F_{jk}(M_{ijk}^\infty - \beta_{ijkl}x_l) - \frac{5}{9}D_{ijkl}L_{jkl}^\infty - \\ & - \frac{1}{18}D_{jklm} \sum_n L_{ijklm}^n (X^n)^2 - \frac{7}{13}P_{ijklms}L_{jklms}^\infty - \frac{1}{26}P_{jklmst} \sum_n L_{ijklmst}^n (X^n)^2 - \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$p' = F_{jk}L_{jk}^\infty + D_{jklm}L_{jklm}^\infty + P_{jklmst}L_{jklmst}^\infty + \dots$$

Приравнявая $\text{div} v$ к нулю, получим дополнительное ограничение на тензорные коэффициенты

$$F_{kk} = 0, \quad B_{ij} = -B_{ji} \quad (2.6)$$

Мультиполи $L_{j\dots k}^n$ и M_{ijk}^∞ симметричны по всем своим индексам, поэтому F_{jk} должен быть симметричен, D_{jklm} и P_{jklmst} – симметричны по всем индексам, начиная со второго.

Эти общие представления справедливы как для задачи α , так и для задачи β . Тензоры $B_{jk}, F_{jk}, D_{jklm}, P_{jklmst} \dots$ должны быть найдены из условий на поверхности частицы.

В силу линейности (2.2) и (2.3) решение задачи α линейно по E_{jk} , а решение задачи β – по ω_{ij} . Поэтому тензоры $B_{jk}, F_{jk}, D_{jklm}, P_{jklmst} \dots$ в задаче α должны быть линейны относительно E_{ij} , а в задаче β – относительно ω_{ij} . Так как E_{jk} имеет единственную существенную компоненту $E_{12} = E_{21} = E$, то все тензоры в задаче α содержат E как постоянный множитель, например

$$B_{ij}^\alpha = \eta E B_{ij}^\alpha, \quad F_{jk}^\alpha = \eta E F_{jk}^\alpha, \quad D_{jklm}^\alpha = \eta E D_{jklm}^\alpha, \dots \quad (2.7)$$

Так как течение происходит в плоскости (x_1, x_2) , а решетка симметрична относительно начала координат, то у ω_j тоже одна существенная компонента $\omega_{12} = -\omega_{21} = \omega$. Поэтому аналогичные равенства справедливы и в задаче β (с заменой E на ω).

Тензорные коэффициенты ищутся в виде разложения по малому параметру $\varepsilon = a/r$. В предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи о периодической решетке должно сводиться к решению задачи о невзаимодействующих сферах, поэтому все коэффициенты должны содержать ε только в неотрицательных степенях.

Возмущение тензора напряжений τ_{ij} можно представить как

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^0 + \sum_{n \neq 0} \tau_{ij}^n + \Pi_{ij} \quad (2.8)$$

где в τ_{ij}^n входят слагаемые, обусловленные наличием n -й частицы (т.е. мультиполей $L_{j\dots k}^n$ и M_{ijk}^n с соответствующими поправками на сходимость). Добавка $\Pi_{ij} = \text{const}$ возникает из-за присутствия линейных поправок $\gamma_{jk}x_k$ и $\beta_{ijk}x_i$.

Так как все слагаемые, кроме τ_{ij}^0 , определены внутри сферы Ω , то

$$T_i = e_{ijk} \left\{ \oint_{\partial\Omega} x_j \tau_{kl}^0 n_l dS + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[x_j \left(\sum_{n \neq 0} \tau_{kl}^n + \Pi_{kl} \right) \right] \right\} dV \quad (2.9)$$

В силу уравнения Стокса (1.1)

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.10)$$

Отсюда, а также из симметрии тензоров τ_{ij}^n и Π_{ij} следует, что

$$T_i = e_{ijk} \oint_{\partial\Omega} x_j \tau_{kl}^0 n_l dS \quad (2.11)$$

Пользуясь симметрией тензорных коэффициентов, получаем

$$T_i = 4\pi\eta e_{ijk} B_{kj} \quad (2.12)$$

Так как v_i ищется в виде суммы решений задач α и β , то условие отсутствия внешнего момента дается формулой

$$B_{kj}^\alpha + B_{kj}^\beta = 0 \quad (2.13)$$

Периодические возмущения скорости и давления, задаваемые формулами (2.5), удовлетворяют (1.1). Вследствие (2.6) и (2.13) выполняются также условия несжимаемости и отсутствия внешнего момента.

3. Решение задачи о замороженной решетке сфер. Для нахождения тензорных коэффициентов в задаче о замороженной решетке сфер необходимо подставить (2.5) в граничное условие (2.2) и разложить мультиполи $L_{j\dots k}^\infty$ и M_{ijk}^∞ по малому параметру ε . Ниже приведено решение задачи с точностью до ε^6 .

После подстановки $X = a$ и учета поправок на сходимость и периодичность $\eta\omega$ есть линейная комбинация выражений $x_j \dots x_k$ и

$$\sum_{n \neq 0} \frac{x_j \dots x_k^n}{(X^n)^q} \quad (3.1)$$

После замены $x_j^n = x_j - m_j$ и разложения в ряд по малому параметру эти дроби представляются линейными комбинациями сумм вида

$$\sum_{n \neq 0} \frac{n_j \dots n_k \xi^m}{n^q}$$

Если количество индексов j, \dots, k и степень m малы, эти суммы можно выразить через x_j , символ Кронекера δ_{kl} и весовые коэффициенты

$$\rho_d^{a,b,c} = \sum_{n \neq 0} \frac{n_1^a n_2^b n_3^c}{n^d} \tag{3.2}$$

Если одна из компонент n_1, n_2, n_3 отсутствует, соответствующий индекс не пишется. Суммирование по $n \neq 0$ имеет следующие свойства:

1) симметрия относительно n_1, n_2, n_3 , т.е.

$$\sum_{n \neq 0} n_j^a n_k^b = \sum_{n \neq 0} n_j^b n_k^a \quad \forall j, k = 1, 2, 3$$

2) Если хотя бы одна из степеней a, b, c нечетна, то $\rho_d^{a,b,c} = 0$. Произведения $n_j \dots n_k$ при суммировании дают ненулевой результат, если и только если индексы j, \dots, k равны попарно.

Пользуясь этими свойствами, можно вывести ряд соотношений между весовыми коэффициентами, например

$$\rho_{q-2} = 3\rho_q^2, \quad \rho_q^4 = \rho_{q-2}^2 - 2\rho_q^{2,2} \tag{3.3}$$

$$\sum_{n \neq 0} \frac{n_j n_j}{n^q} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \rho_{q-2}, \quad \sum_{n \neq 0} \frac{n_j \xi}{n^q} = \frac{1}{3} x_j \rho_{q-2}$$

Разложив дроби вида (3.1) в ряд по степеням ϵ , получим возмущение скорости на поверхности частицы, центр которой помещен в начало координат. Приравняв это выражение к $-\eta E_{ij} x_j$, можно будет найти тензорные коэффициенты в задаче α с выбранной степенью точности.

Для отыскания компонент $B_{12}, \dots, P_{333333}$ все слагаемые в итоговом выражении для v_i , содержащие немые индексы, представляются в развернутом виде, например, $F_{ij} x_j = F_{i1} x_1 + F_{i2} x_2 + F_{i3} x_3$. В выражениях вида $\xi^q = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3)^q$ раскрываются скобки. Формулы для $\eta v_1, \eta v_2, \eta v_3$ получаются с помощью подстановки $i = 1, 2, 3$. В силу (2.2) функции

$$v_1 + E x_2, \quad v_2 + E x_1, \quad v_3 \tag{3.4}$$

должны быть равны 0 при $X = a$. Граничное условие учитывается заменой $x_1^2 = a^2 - x_2^2 - x_3^2$, а тензорные коэффициенты заменяются согласно (2.7). В результате выражения (3.4) представляются линейными комбинациями сумм вида (3.2). Если хотя бы один из индексов a, b, c нечетен, то $\rho_d^{a,b,c} = 0$, и соответствующее слагаемое можно не рассматривать. Это позволяет в несколько раз уменьшить количество слагаемых в (3.4).

Тензоры $BA_{ij}, \dots, PA_{ijklms}$ раскладываются по степеням ϵ , например

$$BA_{ij} = \sum_{q=0}^6 BA_{ij}^{(q)} \epsilon^q$$

После этого в (3.4) приводятся подобные слагаемые по степеням ϵ и по произведениям вида $x_1^k x_2^l x_3^m$. Приравнявая к нулю множители при подобных слагаемых, получим семь систем линейных уравнений для определения $VA_{12}^{(0)}, \dots, PA_{333333}^{(6)}$.

Процедура получения и обработки систем линейных уравнений для определения компонент тензоров программируется в системе Mathematica. Для упрощения систем и исключения линейно зависимых уравнений используется метод Гаусса. Уравнения можно значительно упростить, пользуясь равенствами типа (3.3).

Проверка показала, что можно считать $PA_{ijklms} \sim \epsilon^5$. Системы, отвечающие $\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^4$, являются однородными, поэтому в качестве их решения выбирается нулевое. Система, соответствующая ϵ^6 , также удовлетворяется, если положить $PA_{ijklms}^{(6)} = 0$.

Получено, что в задаче α тензоры имеют вид

$$B_{ij} = 0, \quad F_{jk} = -\frac{5a^3}{3}\eta(f + f_1)E_{jk}$$

$$D_{ijkl} = a^5\eta\left[\left(\frac{f + f_1}{10} + g\right)\delta_{i(j}E_{kl)} + T_{i(j}E_{kl)} + E_{i(j}W_{kl)}\right] \quad (3.5)$$

$$P_{ijklms} = a^7\eta\delta_{i(j}E_{kl}Z_{ms)}$$

где параметры $f, f_1, g, T_{ij}, W_{kl}, Z_{ms}$ принимают значения

$$f = 1 + 10\beta_2\epsilon^3 + (10\beta_2\epsilon^3)^2, \quad f_1 = \frac{14}{3}(\rho_5 - 15\rho_9^{2,2})\epsilon^5$$

$$g = \frac{1}{60}(11\rho_5 - 210\rho_9^{2,2} + 315\rho_{11}^{2,2,2})\epsilon^5$$

$$T_{33} = -\frac{7}{12}(\rho_5 - 24\rho_9^{2,2} + 63\rho_{11}^{2,2,2})\epsilon^5$$

$$W_{33} = \frac{21}{4}(\rho_9^{2,2} - 7\rho_{11}^{2,2,2})\epsilon^5$$

$$Z_{33} = \frac{13}{2160}(\rho_5 - 33\rho_9^{2,2} + 126\rho_{11}^{2,2,2})\epsilon^5$$

Остальные компоненты тензоров T_{ij}, W_{kl}, Z_{ms} равны нулю.

Поскольку $B_{ij}^\alpha = 0$, то в силу (2.13) и в задаче β $B_{ij}^\beta = \eta\omega VA_{ij}^\beta = 0$. Применение изложенного выше алгоритма к условию (2.3) показывает, что $VA_{ij}^\beta \neq 0$, поэтому $\omega = 0$. Таким образом, решение задачи β для решетки тривиально: $v_i = 0$. В этом состоит качественная особенность взаимодействия сфер в решетке. В [2] показано, что две гидродинамически взаимодействующие частицы вращаются относительно жидкости даже при отсутствии приложенного извне момента. Наличие решетки приводит к тому, что каждая сфера вращается так, как если бы остальные сферы отсутствовали. Аналогичный результат был получен в [10].

Подстановка (3.5) в (2.5) дает решение исходной задачи о кубической решетке сфер в вязкой жидкости

$$v_i = -\frac{5a^3}{2}(f + f_1)E_{jk}(M_{ijk}^\infty - \beta_{ijkl}x_l) - \frac{a^5}{6}(f + f_1 + 10g)E_{jk}L_{ijk}^\infty -$$

$$-\frac{5a^2}{3}(T_{ij}E_{kl} + E_{ij}W_{kl})L_{jkl}^\infty - \frac{a^5}{6}E_{jk}(T_{lm} + W_{lm})\sum_n L_{ijkln}^n (X^n)^2 - \frac{210}{13}E_{jk}Z_{lm}L_{ijkln}^\infty$$

$$p' = -\frac{5a^3}{3}\eta(f + f_1)E_{jk}L_{jk}^\infty + 3\eta a^5 E_{jk}(T_{lm} + W_{lm})L_{jklm}^\infty$$

В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ эти формулы переходят в хорошо известные распределения скорости и давления вблизи одиночной частицы.

4. Эффективная вязкость суспензии с кубической решеткой частиц. Для вычисления эффективной вязкости используется равенство, указанное в [1]: если линейные размеры объема V , занимаемого суспензией, много больше расстояний между частицами, то

$$\Sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Sigma_{kk} = 2\eta E_{ij} + \frac{1}{V} \sum_{\Omega \in V} S_{ij} \tag{4.1}$$

Здесь Σ_{ij} – среднее напряжение в жидкости, S_{ij} – силовой диполь

$$S_{ij} = \oint_{\partial\Omega} \left(\sigma_{ik}x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kl}x_l \right) m_k dS$$

Для бесконечной периодической решетки среднее по объему заменяется средним по ячейке

$$\Sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Sigma_{kk} = 2\eta E_{ij} + \frac{1}{3}S_{ij}$$

Из (1.6), (2.8) и (2.10) следует, что

$$S_{ij} = \oint_{\partial\Omega} \left(\tau_{ik}^0 x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kl}^0 x_l \right) m_k dS + \int_{\Omega} \left[\sum_{n \neq 0} \left(\tau_{ij}^n - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}^n \right) + \Pi_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Pi_{kk} + 2\eta E_{ij} \right] dV \tag{4.2}$$

С выбранной степенью точности $\Pi_{ij} = 20\eta\beta_2\epsilon^3 f E_{ij}$, поэтому

$$\int_{\Omega} \left(\Pi_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Pi_{kk} + 2\eta E_{ij} \right) dV = 2\eta|\Omega|f E_{ij} \tag{4.3}$$

Первое слагаемое в (4.2) после упрощений дает

$$\oint_{\partial\Omega} \left(\tau_{ik}^0 x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kl}^0 x_l \right) n_k dS = 3|\Omega|\eta(f + f_1)E_{ij} \tag{4.4}$$

Второе слагаемое (4.2) представляет собой интеграл от линейной комбинации выражений типа (3.1). Для каждого конкретного набора индексов i, \dots, j эти интегралы сводятся к сумме интегралов вида

$$\int_{\Omega} \sum_{n \neq 0} \frac{x_1^k x_2^l x_3^m n_1^p n_2^q n_3^s \xi^t}{X^b n^c} dV$$

Так как сфера симметрична относительно своего центра, а оператор $\sum_{n \neq 0}$ – относительно переменных суммирования, то слагаемые, содержащие координаты x_1, x_2, x_3 или n_1, n_2, n_3 в нечетных степенях, не дают вклада в результат. Поэтому интегралы

$$\int_{\Omega \neq 0} \sum \frac{x_i^n \dots x_j^n}{(X^n)^q} dV$$

не равны нулю тогда и только тогда, когда индексы i, \dots, j равны попарно (для M_{ijk}^n необходимо учесть поправки на сходимость), например

$$\int_{\Omega \neq 0} \sum \left[\frac{x_i^n x_j^n}{(X^n)^5} - \frac{n_i n_j}{r^3 n^5} \right] = A \delta_{ij} \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega \neq 0} \sum \left[\frac{x_i^n x_j^n x_k^n x_l^n}{(X^n)^7} - 5 \frac{n_i n_j n_k n_l}{r^3 n^7} \right] = Y o_{ijkl} + Z \delta_{(ij} \delta_{kl)}$$

Функции A, \dots, Y, Z находятся подстановкой конкретных индексов в (4.5), после чего получается

$$\int_{\Omega \neq 0} \left(\sum \left(\tau_{ij}^n - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^n \right) \right) dV = 2|\Omega| f_1 E_{ij} \quad (4.6)$$

Собирая выражения (4.3), (4.4), (4.6), найдем силовой диполь с точностью до ϵ^6

$$S_{ij} = 5|\Omega| \eta E_{ij} (f + f_1) \quad (4.7)$$

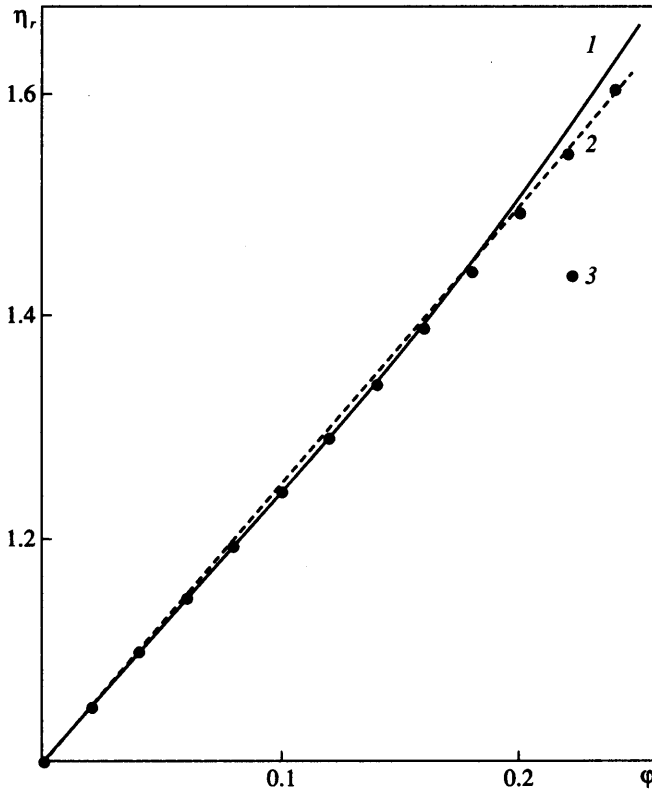
Концентрация взвеси $\varphi = 4\pi\epsilon^3/3$, поэтому

$$\Sigma_{ij} - \frac{1}{3} \Sigma_{kk} = 2\eta E_{ij} \left\{ 1 + \frac{5}{2} \varphi \left[1 + \frac{15\beta_2}{2\pi} \varphi + \left(\frac{15\beta_2}{2\pi} \varphi \right)^2 + \frac{14}{3} (\rho_5 - 15\rho_9^{2,2}) \left(\frac{3}{4\pi} \varphi \right)^{5/3} \right] \right\} + o(\varphi^3)$$

Выражение для эффективной вязкости получается сравнением среднего девиаторного напряжения с $2\eta E_{ij}$

$$\eta^* = \eta \left\{ 1 + \frac{5}{2} \varphi \left[1 + \frac{15\beta_2}{2\pi} \varphi + \left(\frac{15\beta_2}{2\pi} \varphi \right)^2 + \frac{14}{3} (\rho_5 - 15\rho_9^{2,2}) \left(\frac{3}{4\pi} \varphi \right)^{5/3} \right] \right\} + o(\varphi^3) \quad (4.8)$$

При малых концентрациях уравнение (4.8) переходит в формулу Эйнштейна для суспензии не взаимодействующих сфер. При $\varphi \leq \varphi_0 \approx 0.18$ вязкость суспензии с периодической решеткой меньше вязкости суспензии не взаимодействующих сфер. В то же время в [1] указано, что в суспензии случайно распределенных частиц учет толь-



Зависимость относительной вязкости $\eta_r = \eta^*/\eta$ от концентрации взвеси ϕ : 1 – по формуле (4.8), 2 – по формуле Эйнштейна, 3 – в [10]

ко парных взаимодействий приводит к увеличению вязкости. Это различие можно объяснить так. Если в жидкости имеется решетка частиц, то возмущенная скорость u_i – нечетная периодическая функция, равная нулю в точках, соответствующих полупериоду решетки. Таким образом, возмущение, создаваемое каждой частицей, на некотором расстоянии от нее гасится решеткой. Если же в жидкости взвешены не взаимодействующие сферы, то возмущения, вносимые ими в поток, убывают с расстоянием, но взаимно не компенсируются.

Поэтому при малых концентрациях взвеси эффективная вязкость суспензии с периодической решеткой меньше, чем у суспензии не взаимодействующих сфер. В этом состоит качественное отличие поведения периодической суспензии от суспензии, где частицы распределены случайным образом: учет гидродинамического взаимодействия приводит не к увеличению, а к уменьшению эффективной вязкости.

При увеличении концентрации возмущение, хотя и гасится решеткой на расстоянии порядка $r/2$ от центра частицы, вблизи ее поверхности является достаточно большим, и поэтому эффективная вязкость периодической суспензии, начиная с $\phi = \phi_0$, превышает вязкость суспензии не взаимодействующих сфер.

Вязкость периодической суспензии исследовалась в [10], где предполагалось, что скорость течения имеет вид (1.2), (1.3), а эффективная вязкость искалась как тензор четвертого ранга. Однако для сдвигового потока в одной из координатных плоскостей η^* может быть найдена как скаляр.

На фигуре приведены графики относительных вязкостей $\eta_r = \eta^*/\eta$ как функций ϕ . Различие относительных вязкостей вплоть до значения $\phi = 0,25$ не превышает

1.75%. Таким образом, выведенная формула (4.8) вязкости периодической суспензии хорошо согласуется с ранее полученными результатами других авторов.

Заключение. Рассмотрена задача о течении вязкой жидкости с периодической решеткой твердых сфер. При решении задачи модифицирован метод для суспензии случайно распределенных частиц. Найдены возмущения полей скорости и давления, обусловленные присутствием решетки, а также вычислена эффективная вязкость периодической суспензии.

В ходе решения подтверждена гипотеза о том, что гидродинамическое взаимодействие многих частиц не может быть сведено к простой сумме парных взаимодействий. Установлены качественные отличия течения жидкости, содержащей периодическую решетку, от течения жидкости, в которой частицы распределены случайным образом. Подтверждено ранее полученный результат: частицы в решетке не вращаются относительно жидкости в отсутствие внешнего момента. Показано, что учет взаимодействия частиц в диапазоне концентраций $\phi \leq 0.18$ при наличии периодической структуры приводит не к увеличению, а к уменьшению эффективной вязкости по сравнению с моделями, учитывающими только парные взаимодействия.

Полное решение задачи о периодической решетке сфер в линейном потоке вязкой жидкости и расчет эффективной вязкости суспензии на основе полученного решения приведены впервые. Результаты хорошо согласуются с данными других авторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00435).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batchelor G.K., Green J.T.* The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 56. Pt 3. P. 401–427.
2. *Мартынов С.И.* Гидродинамическое взаимодействие частиц // *Изв. РАН. МЖГ.* 1998. № 2. С. 112–119.
3. *Мартынов С.И.* Взаимодействие частиц в течении с параболическим профилем скорости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2000. № 1. С. 84–91.
4. *Мартынов С.И.* Движение вязкой жидкости через периодическую решетку сфер // *Изв. РАН. МЖГ.* 2002. № 6. С. 48–54.
5. *Ефремов И.Ф.* Периодические коллоидные структуры. Л.: Химия, 1971. 192 с.
6. *Pusey P.N., van Megen W., Underwood S.M., Bartlett P., Ottewill R.H.* Colloidal fluids, crystals and glasses // *J. Phys. Condens. Matter.* 1990. V. 2. Pt. S. P. SA373-SA377.
7. *Kegel W.K.* Crystallization in Glassy Suspensions of Colloidal Hard Spheres // *Langmuir.* 2000. V. 16. № 3. P. 939–941.
8. *Gray J.J., Bonnecaze R.T.* Rheology and dynamics of sheared arrays of colloidal particles // *J. Rheol.* 1998. V. 42. № 5. P. 1121–1151.
9. *Van der Vorst B., van den Ende D., Aelmans N.J.J., Mellema J.* Shear viscosity of an ordering latex suspension // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 56. № 3. P. 3119–3126.
10. *Nunan K.C., Keller J.B.* Effective viscosity of a periodic suspension // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 142. P. 269–287.
11. *Hasimoto H.* On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their applications to viscous flow past a cubic array of spheres // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 5. P. 317–308.
12. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.