МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 4 • 2005

УДК 532.5

© 2005 г. О. В. ВОИНОВ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ ЭЛЛИПСОИДОМ И ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассмотрены медленные течения вязкой жидкости в тонком зазоре между движущимся эллипсоидом и прямой трубой эллиптического сечения, а также между вращающимся эллипсоидом и тороидальной трубой, в том числе между эллипсоидом и плоскостью. Получено решение краевой задачи для уравнения Рейнольдса, описывающего течение в зазоре. Найден эффект подобия профилей давления в системах эллипсоид – плоскость и цилиндр – плоскость.

Ключевые слова: вязкая жидкость, уравнение Рейнольдса, вращающийся эллипсоид.

В задаче движения твердого тела около стенки точное решение уравнений Стокса известно для случая шара около плоскости [1]. Простые приближенные формулы, описывающие течение, есть для больших расстояний от стенки [1]. Плоские задачи движения жидкости в зазоре между телом и стенкой подробно изучены, начиная с [2].

Задача о течении жидкости в тонком зазоре шар – плоскость, описываемом уравнением Рейнольдса, рассмотрена в [3], однако решение не было найдено. Подход [3] использует разделение переменных в полярных координатах на плоскости, но полученное при этом обыкновенное дифференциальное уравнение не интегрируется в общем виде. Для него ограничились лишь выводом асимптотики решения задачи при больших расстояниях. Известно [4] решение в частном случае невращающегося шара.

В настоящей работе определяется точное решение задачи Голдмана, Кокса и Бреннера, а также более общей задачи для уравнения Рейнольдса, когда два тела, образующие тонкий зазор, не обладают осевой симметрией относительно оси, проходящей через их ближайшие точки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямую трубу, заполненную вязкой жидкостью, внутри которой катится тело вращения, симметричное относительно плоскости $y = 0$, продольно пересекающей трубу. Таким телом может быть эллипсоид. Пусть плоскость x, y касается трубы в точке $x = y = 0$, ближайшей к поверхности этого тела, расстояние между поверхностями тел (толщина зазора) в малой окрестности этой точки равно

$$h(x, y) = h_0 + \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}(k_2 - k_S)y^2, \quad k_2 \ge k_S \ge 0 \tag{1.1}$$

где h_0 – минимальная толщина зазора ($\dot{h}_0 = 0$); $k_1 > 0$, k_2 – главные кривизны поверхности эллипсоида в точке, наиболее близкой к стенке; k_S – кривизна поверхности трубы в поперечном сечении (знаки кривизны соответствуют тому, что нормали к поверхностям направлены от стенки). Радиусы кривизны определены как $R_1 = k_1^{-1}$, $R_2 = k_2^{-1}$ и $R_S = k_S^{-1}$.

Давление $p(x, y)$ в тонком зазоре ($h_0 \ll R_1$) описывается уравнением Рейнольдса

$$\operatorname{div}(h^3 \operatorname{grad} p) = -6\mu(u + R_1\omega)\frac{\partial h}{\partial x} \tag{1.2}$$

Здесь u и ω – поступательная и угловая составляющие скорости эллипсоида, μ – динамическая вязкость. Вдали от начала координат давление постоянно

$$p \to p_0, \quad r \to \infty, \quad r^2 = x^2 + y^2 \tag{1.3}$$

Решение краевой задачи (1.2), (1.3) с функцией $h(x, y)$, заданной (1.1), аналогично решению плоской задачи, представлено в виде

$$p = p_0 + \frac{cx}{h^2(x, y)} \tag{1.4}$$

Подставив зависимость (1.4) в (1.2), найдем значение постоянной c. В итоге получим точное решение краевой задачи для уравнения Рейнольдса

$$p - p_0 = \frac{6\mu(u + R_1\omega)k_1}{3k_1 + 2(k_2 - k_s)} \frac{x}{(h_0 + 1/2k_1x^2 + 1/2(k_2 - k_s)y^2)^2} \tag{1.5}$$

Рассмотрим частные случаи решения (1.5).

1. Если круговой цилиндр радиуса R движется вдоль плоскости (плоская задача типа, впервые решенной О. Рейнольдсом [2]), то (1.5) принимает вид

$$p - p_0 = 2\mu(u + R\omega)x\left(h_0 + \frac{1}{2}kx^2\right)^{-2} \quad (k = R^{-1}) \tag{1.6}$$

2. Если шар радиуса R движется вдоль плоскости, то согласно (1.5)

$$p - p_0 = \frac{6}{5}\mu(u + R\omega)x\left(h_0 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2\right)^{-2} \tag{1.7}$$

Асимптотика решения (1.7) при $r(h_0R)^{-1/2} \to \infty$ согласуется с асимптотическим решением [3]; в отсутствие вращения ($\omega = 0$) (1.7) переходит в решение [4].

3. В случае шара радиуса R в круглой трубе радиуса $R_S > R$ формула (1.5) дает

$$p - p_0 = \frac{6\mu(u + R\omega)k}{5k - 2k_S}x\left(h_0 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(k - k_S)y^2\right)^{-2}$$

Отметим сходство формул давления в тонких зазорах в плоской задаче о качении цилиндра вдоль стенки (1.6) и в неплоской задаче о движении эллипсоида (1.5). В задаче об эллипсоиде вблизи стенки профиль давления на линии $y = 0$ подобен профилю давления в задаче о цилиндре около стенки. Запишем минимальное давление, соответствующее формуле (1.5)

$$\min\{p\} = p_0 - \frac{9/4}{3 + 2R_1(k_2 - k_S)}\mu(u + R_1\omega)\frac{1}{h_0}\sqrt{\frac{3R_1}{2h_0}}, \quad x = -\sqrt{\frac{2}{3}h_0R_1} \tag{1.8}$$

Минимум давления достигается на линии $y = 0$. Отметим, что в случае кругового цилиндра, катящегося по плоскости, коэффициент в (1.8) равен 3/4. Коэффициент подобия профилей давления равен $(1 + {}^2\!/_3\, R_1(k_2 - k_S))^{-1}$.

2. Эллипсоид, вращающийся внутри тороидальной трубы. Рассмотрим другую задачу – вращение эллипсоида внутри замкнутой тороидальной трубы эллиптического сечения. При этом толщина зазора определяется выражением

$$h(x, y) = h_0 + \frac{1}{2}(k_1 - k_{S1})x^2 + \frac{1}{2}(k_2 - k_{S2})y^2, \quad k_1 > k_{S1}, \quad k_2 > k_{S2} \tag{2.1}$$

Уравнение Рейнольдса имеет вид

$$\operatorname{div}(h^3 \operatorname{grad} p) = -6\mu(u + R_1\omega_1 + R_{S1}\omega_S)\frac{\partial h}{\partial x} \tag{2.2}$$

где ω_S, ω_1 – скорости вращения трубы и эллипсоида. Аналогично (1.5) запишем решение уравнения (2.2) с функцией $h(x, y)$, (2.1)

$$p - p_0 = \frac{6\mu(u + R_1\omega_1 + R_{S1}\omega_S)}{3(k_1 - k_{S1}) + 2(k_2 - k_{S2})} \frac{(k_1 - k_{S1})x}{(h_0 + 1/2(k_1 - k_{S1})x^2 + 1/2(k_2 - k_{S2})y^2)^2} \tag{2.3}$$

Рассмотренные задачи о полях давления в тонких зазорах для случаев произвольных тел вращения в некруглых трубах, в том числе для случая эллипсоида внутри тороидальной трубы эллиптического сечения, и найденные для них решения уравнения Рейнольдса (1.5) и (2.3) выходят за рамки постановки задачи Голдмана, Кокса и Бреннера [3]. Эти решения можно записать методом разделения переменных в эллиптических координатах.

Подобие профилей давления в системе эллипсоид – плоскость и в системе цилиндр – плоскость заслуживает внимания из-за существенно разной геометрии систем, несмотря на это профили давления на линии $y = 0$ подобны с коэффициентом $(1 + 2/3R_1k_2)^{-1}$.

Заключение. Отметим, что кроме рассмотренных случаев найденное решение уравнений Рейнольдса описывает поле давления в тонком зазоре между вращающимися эллипсоидами, а также в зазоре между произвольными гладкими телами в общем случае их относительного движения, если аналогично учесть компоненты скорости поверхности в направлении оси y. При этом необходимо, чтобы в рассматриваемый момент времени было выполнено $\dot{h}_0 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
2. *Reynolds O.* On the theory of lubrication and its application to Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscousity of olive oil // Philos. Trans. Roy. Soc. A. London. 1886. V. 177. P. 157–233.
3. *Goldman A.J., Cox R.G., Brenner H.* Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall // Chem. Ent. Sci. 1967. V. 22. № 4. P. 637–651.
4. *O'Neill M.E., Stewartson K.* On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. № 4. P. 705–724.

Тюмень
Тюменский филиал Института теоретической
и прикладной механики СО РАН

Поступила в редакцию
21.XII.2004