

УДК 532.517.013.4

© 2005 г. С. В. МАНУЙЛОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ И РОСТА
НЕУСТОЙЧИВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПУЛЬСИРУЮЩИХ ТЕЧЕНИЯХ**

Теоретически изучены общие закономерности процессов порождения и усиления вторичных возмущений в осциллирующих течениях вязкой жидкости. Анализ явлений устойчивости и восприимчивости выполнен на примере возмущений, генерируемых пульсациями расхода течения Пуазейля на малых двумерных неровностях стенок канала. Показано, что наличие неровностей приводит к возбуждению в потоке возмущений всех частот, кратных частоте колебаний основного течения. С помощью преобразования Фурье по продольной координате задача расчета частотных гармоник сводится к системе уравнений типа Орра-Зоммерфельда, связанных между собой через пульсационную компоненту основного течения. На основе исследования аналитических свойств фурье-образов показано, что вверх и вниз по потоку от неровностей возмущение представимо в виде суперпозиции мод нестационарного течения Пуазейля. Предложена классификация мод и произведен расчет спектра. Исследована структура среднеквадратичных пульсаций, порождаемых свободными возмущениями. Продемонстрированы примеры расчетов эволюции вынужденных возмущений для случаев, когда рассеяние колебаний основного течения на неровности приводит к генерации одной и двух мод, растущих вниз по потоку.

Ключевые слова: пульсирующее течение Пуазейля, неустойчивость, восприимчивость к неровностям.

Субгармонический и клевановский типы ламинарно-турбулентного перехода являются наиболее распространенными и изученными сценариями турбулизации течения в пограничном слое при низкой интенсивности возмущений в набегающем потоке [1]. Один из классических подходов к теоретическому объяснению явлений, наблюдаемых в предпереходной области, заключается в анализе вторичной неустойчивости нестационарного основного течения, обусловленного искажением стационарного осредненного потока волной Толлмина-Шлихтинга конечной амплитуды [2]. В этой связи большое значение приобретает исследование устойчивости периодических по времени течений вязкой жидкости. Ламинарный пограничный слой представляет собой безусловно практически важный, но не слишком удобный объект для разработки методов такого исследования, поскольку теоретический анализ существенно усложнен наличием продольной неоднородности основного течения.

Идеальным объектом для исследований такого рода представляется пульсирующее течение Пуазейля в плоском канале. По-видимому, первая попытка исследования устойчивости этого течения была предпринята в [3]. Там для анализа возмущенного движения применялось галеркинское разложение параметров возмущения в продольном и поперечном направлениях по системе собственных функций бигармонического оператора, благодаря чему задача сводилась к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами для неизвестных зависимостей амплитуд от времени. Рост (или затухание) по времени решений поставленной задачи изучались методом Флоке. Численный анализ [3] был подвергнут критике в [4], поскольку многие результаты [3] не удалось повторить с помощью неза-

висимого подхода (методом разложения по амплитуде пульсаций основного течения). В частности, не удалось обнаружить и подтвердить явление катастрофической потери устойчивости одной из устойчивых мод стационарного течения Пуазейля при наложении на него пульсаций расхода незначительной амплитуды. Не удалось воспроизвести этот результат и в данном исследовании. Отметим, что в [3, 4] анализу устойчивости были подвергнуты течения со сравнительно небольшими амплитудами колебаний расхода (порядка 10% по скорости относительно осредненного течения).

Устойчивость нестационарного течения Пуазейля исследовалась в [3, 4] во “временной” постановке, т.е. изучалась эволюция по времени возмущений, имеющих синусоидальную форму в продольном направлении; вопрос о появлении в потоке таких возмущений оставался вне рамок рассмотренных задач. В связи с этим в данной работе основное внимание уделено вопросу генерации неустойчивых возмущений в пульсирующем течении Пуазейля. Показано, что растущие вниз по потоку возмущения могут возбуждаться при рассеянии пульсаций основного течения на малых неровностях стенок канала.

Стационарные искривления стенок не приводят к генерации растущих возмущений в стационарном течении Пуазейля [5]; для возбуждения в нем волн неустойчивости необходимо внешнее нестационарное воздействие, например, малые гармонические колебания участков стенок [6]. Исследуемая в данной работе постановка задачи восприимчивости по физическому смыслу аналогична рассмотренным в [7, 8]: здесь также неустойчивые возмущения генерируются при непосредственном рассеянии основного течения на стационарной неровности, причем характеристики возбуждаемых волн (период и форма колебаний, длина волны и инкремент нарастания) определяются параметрами ядра течения и существенным образом зависят от нестационарного характера невозмущенного потока.

В отношении исследования устойчивости рассматриваемого течения основное отличие данной работы от [3, 4] заключается в “пространственном” типе постановки, вытекающем из локализованного характера воздействия неровности на пульсирующее течение: генерируемые неровностью волны неустойчивости периодичны по времени (с фиксированным периодом, равным периоду колебаний основного течения) и нарастают в продольном направлении. Численный анализ характеристик устойчивости и восприимчивости произведен в широком диапазоне изменения относительной скорости пульсаций основного течения.

1. Постановка задачи восприимчивости и метод расчета. Будем изучать восприимчивость нестационарных течений к малым двумерным неровностям обтекаемой поверхности. В качестве основного течения будем рассматривать пульсирующее плоское течение Пуазейля – одномерное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с гармоническими по времени колебаниями расхода. Перейдем к безразмерным независимым переменным и параметрам течения, выбирая в качестве основных единиц полуширину канала и величину осредненной скорости основного течения на его оси. Вычисленное по этим параметрам число Рейнольдса обозначим R .

Введем декартову систему координат с началом в центре канала, ось x направим вдоль вектора скорости осредненного течения, а ось y – перпендикулярно стенкам. Безразмерное время обозначим t . Двумерное возмущение $\psi(t, x, y)$ функции тока удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + (1 - y^2 + U_0) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \left(2 - \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta^2 \psi = 0$$

$$U_0 = A \operatorname{Re}[U(y) \exp(-i\omega t)], \quad U = \frac{\cos \beta - \cos \beta y}{\cos \beta - 1} \quad (1.1)$$

$$\beta = \sqrt{i\omega R}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

которое следует из линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса для течений вязкой несжимаемой жидкости. Здесь $U_0(t, y)$ – профиль пульсационной составляющей скорости основного течения [9], описывающий гармонические колебания потока с частотой ω и конечной амплитудой A .

Будем считать, что возмущения течения вызваны малыми двумерными искривлениями верхней и нижней стенок канала

$$y^{(+,-)} = \pm 1 + hF^{(+,-)}(x), \quad 0 < h \ll 1 \quad (1.2)$$

где h – характерная высота неровностей, а финитные функции $F^{(+,-)}$ описывают их форму.

В рамках рассматриваемой постановки рассеяние колебаний основного потока на неровностях считается единственной причиной возникновения возмущений. Эти возмущения не являются гармоническими по времени из-за наличия продольной неоднородности (1.2) и зависимости от времени коэффициентов в конвективных членах уравнения (1.1). В этой связи будем искать частные решения уравнения (1.1) в классе периодических по времени функций с периодом, равным периоду пульсаций невозмущенного течения:

$$\psi = h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x, y) \exp(-in\omega t) + O(h^2) \quad (1.3)$$

Подстановка ряда (1.3) в уравнение (1.1) приводит к линейной системе уравнений в частных производных для коэффициентов Фурье (звездочкой помечены комплексно сопряженные величины):

$$\begin{aligned} -in\omega\Delta\Phi_n + (1-y^2)\frac{\partial\Delta\Phi_n}{\partial x} + 2\frac{\partial\Phi_n}{\partial x} - \frac{1}{R}\Delta^2\Phi_n = \\ = -\frac{A}{2}\left(U\frac{\partial\Delta\Phi_{n-1}}{\partial x} - \frac{d^2U}{dy^2}\frac{\partial\Phi_{n-1}}{\partial x} + U^*\frac{\partial\Delta\Phi_{n+1}}{\partial x} - \frac{d^2U^*}{dy^2}\frac{\partial\Phi_{n+1}}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Граничные условия для нее при $y = \pm 1$ следуют из линеаризованных по параметру h условий прилипания, записанных для неровных стенок (1.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_n}{\partial x}(x, \pm 1) = 0 \\ \frac{\partial\Phi_{-1}}{\partial y}(x, \pm 1) = \mp \frac{A}{2} \frac{\beta^* \sin\beta^*}{\cos\beta^* - 1} F^{(+,-)}(x), \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}(x, \pm 1) = \pm 2F^{(+,-)}(x) \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}(x, \pm 1) = \mp \frac{A}{2} \frac{\beta \sin\beta}{\cos\beta - 1} F^{(+,-)}(x), \quad \frac{\partial\Phi_n}{\partial y}(x, \pm 1) = 0, \quad |n| \geq 2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4) и краевые условия (1.5) для всех гармоник, за исключением трех, однородны. Тем не менее рассеяние колебаний основного течения на неровностях приводит к возбуждению в потоке возмущений всех частот, кратных ω , поскольку уравнения для “соседних” гармоник связаны друг с другом через конвективные члены.

Решение задачи (1.4), (1.5) определено с точностью до произвольной линейной комбинации собственных возмущений, имеющих период $T = 2\pi/\omega$. Для выделения единственного решения необходимо либо наложить на возмущение дополнительные условия вверх и вниз по потоку, либо искать решение в форме, ограничивающей класс возможных возмущений. Основное течение однородно в продольном направлении. В связи с этим будем искать решение исследуемой задачи восприимчивости с помощью преобразования Фурье по продольной координате

$$\Phi_n = \Phi_n^{(s)} + \Phi_n^{(a)}, \quad \Phi_n^{(s,a)} = (2\pi)^{-1} \int_C f^{(s,a)}(k) \phi_n^{(s,a)}(y; k) \exp(ikx) dk$$

$$f^{(s,a)} = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(s,a)}(x) \exp(-ikx) dx, \quad F^{(s,a)} = \frac{F^{(+)}(x) \mp F^{(-)}(x)}{2}$$
(1.6)

В отличие от классического обратного преобразования Фурье в преобразовании (1.6) интегрирование выполняется по контуру C , вообще говоря не совпадающему с действительной осью комплексной плоскости k . Эта ситуация совершенно аналогична той, что имела место при исследовании задач восприимчивости стационарного течения Пуазейля к вибрации стенок канала: там в зависимости от выбора контура интегрирования обратное преобразование Фурье могло описывать как генерацию волны неустойчивости вибратором [6, 10], так и процесс подавления набегающей волны активной вибрацией стенок [11]. Таким образом, надлежащий выбор контура C позволяет выделить единственное решение, соответствующее типу рассматриваемой физической задачи. Используемые в данной работе контуры интегрирования будут описаны в разд. 3.

Невозмущенное течение симметрично относительно оси канала. Это позволяет разделять возмущение на симметричную и антисимметричную части (помечены верхними индексами (s) и (a)), которые в дальнейшем могут изучаться независимо. В преобразовании (1.6) фурье-образы симметричной и антисимметричной компонент решения ради удобства нормированы на фурье-образы соответствующих форм неровностей, что позволяет явно выделить зависимость искомого решения задачи восприимчивости от геометрических параметров искривления стенок.

При $y = 0$ нормированные фурье-образы удовлетворяют условиям симметрии

$$\phi_n^{(a)}(0) = \frac{d\phi_n^{(s)}}{dy}(0) = \frac{d^2\phi_n^{(a)}}{dy^2}(0) = \frac{d^3\phi_n^{(s)}}{dy^3}(0) = 0$$
(1.7)

Преобразование (1.6) сводит систему уравнений в частных производных (1.4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Условия (1.7) позволяют сформулировать краевую задачу на полуширине канала $0 \leq y \leq 1$. В дальнейшем будем для краткости опускать указатели типов симметрии, поскольку система уравнений для нормированных фурье-образов имеет одинаковый вид для обоих типов

$$\left(1 - y^2 - \frac{n\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2\phi_n}{dy^2} - k^2\phi_n\right) + 2\phi_n - \frac{1}{ikR} \left(\frac{d^4\phi_n}{dy^4} - 2k^2\frac{d^2\phi_n}{dy^2} + k^4\phi_n\right) =$$

$$= -\frac{A}{2} \left[U \left(\frac{d^2\phi_{n-1}}{dy^2} - k^2\phi_{n-1}\right) - \frac{d^2U}{dy^2} \phi_{n-1} + U^* \left(\frac{d^2\phi_{n+1}}{dy^2} - k^2\phi_{n+1}\right) - \frac{d^2U^*}{dy^2} \phi_{n+1} \right]$$
(1.8)

Линейная система (1.8) представляет собой систему уравнений типа Орра-Зоммерфельда, завязанных между собой через пульсационную составляющую основного течения. Граничные условия при $y = 1$ для нормированных фурье-компонент также имеют универсальный вид для обоих типов симметрии, причем в отличие от (1.5) они не зависят от формы неровностей

$$\begin{aligned} \phi_n(1) = 0; \quad \frac{d\phi_{-1}}{dy}(1) = -\frac{A \beta^* \cos \beta^*}{2 \cos \beta^* - 1}, \quad \frac{d\phi_0}{dy}(1) = 2 \\ \frac{d\phi_1}{dy}(1) = -\frac{A \beta \sin \beta}{2 \cos \beta - 1}; \quad \frac{d\phi_n}{dy}(1) = 0, \quad |n| \geq 2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Соотношения (1.3), (1.6)–(1.9) составляют аналитический метод решения рассматриваемой задачи восприимчивости. В отличие от [3] в этом подходе используется естественная дискретизация возмущения – его периодичность по времени. В результате задача расчета возмущения сводится к решению краевой задачи для бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и вычислению интегралов Фурье.

При численном решении сформулированной задачи бесконечная сумма в (1.3) аппроксимировалась конечной с пределами суммирования от $-N$ до N , где N – число учитываемых гармоник. Для обеспечения достаточной точности вычислений ($\sim 0.1\%$) число N варьировалось от 5 до 12 в зависимости от величины A (интенсивности пульсаций основного течения). Соответствующие “обрезанные” краевые задачи (1.6)–(1.9) решались методом Рунге – Кутты с применением процедуры ортогонализации [12]. Интегралы Фурье вычислялись методом, изложенным в [11]. Для уменьшения объема вычислений использовалось свойство симметрии $\phi_n(y; -k) \equiv \phi_{-n}^*(y; k^*)$.

2. Исследование устойчивости осциллирующего течения. Изучим структуру возмущений вверх и вниз по потоку от искривленных участков стенок. Будем считать, что неровности находятся на промежутке $[-b, b]$. Подобно [6], для вычисления интегралов (1.6) при $|x| > b$ замкнем контур интегрирования дугой асимптотически большого радиуса, расположенной в зависимости от знака x в верхней (+) или нижней (–) части комплексной плоскости k , и воспользуемся интегральной теоремой Коши о вычетах. В результате получим вид коэффициентов ряда Фурье (1.3) вверх и вниз по потоку от искривленного участка

$$\Phi_n = \text{sign } x \sum_{m=1}^{\infty} f(k_m^{(+,-)}) \text{ res}_{k=k_m^{(+,-)}} [i\phi_n(y; k)] \exp(ik_m^{(+,-)}x), \quad |x| > b$$

Здесь суммирование ведется по одному из двух классов полюсов подынтегральных выражений (1.6): при анализе затухания возмущения вверх (вниз) по течению от неровностей внутрь соответствующего замкнутого контура попадают полюса $k_m^{(-)}$ ($k_m^{(+)}$); при этом контур интегрирования обходится по- (против) часовой стрелки. Полюса преобразования Фурье совпадают с волновыми числами, характеризующими продольную эволюцию периодических по времени (с периодом T) свободных возмущений пульсирующего течения Пуазейля в плоских границах. В силу упомянутого в разд. 1 свойства симметрии каждому полюсу $k = \alpha$ соответствует полюс $k = -\alpha^*$. По сути, оба эти волновых числа описывают одну и ту же моду.

Объединяя слагаемые, соответствующие таким парам волновых чисел, выпишем окончательный вид разложений, представляющих структуру возмущения вверх и вниз

по потоку от искривленной секции канала в форме суперпозиции свободных возмущений Ψ_α

$$\Psi = h \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha} + O(h^2) \quad (2.1)$$

$$\Psi_{\alpha}(t, x, y) = \operatorname{Re} \left[f(\alpha) S(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(y; \alpha) \exp(i\alpha x - in\omega t) \right]$$

Волновое число моды α и соответствующий ему набор $\{\varphi_n\}$ удовлетворяют задаче на собственные значения

$$\begin{aligned} & \left(1 - y^2 - \frac{n\omega}{\alpha} \right) \left(\frac{d^2 \varphi_n}{dy^2} - \alpha^2 \varphi_n \right) + 2\varphi_n - \frac{1}{i\alpha R} \left(\frac{d^4 \varphi_n}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \varphi_n}{dy^2} + \alpha^4 \varphi_n \right) = \\ & = -\frac{A}{2} \left[U \left(\frac{d^2 \varphi_{n-1}}{dy^2} - \alpha^2 \varphi_{n-1} \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \varphi_{n-1} + U^* \left(\frac{d^2 \varphi_{n+1}}{dy^2} - \alpha^2 \varphi_{n+1} \right) - \frac{d^2 U^*}{dy^2} \varphi_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\varphi_n(1) = \frac{d\varphi_n}{dy}(1) = \varphi_n^{(a)}(0) = \frac{d\varphi_n^{(s)}}{dy}(0) = \frac{d^2 \varphi_n^{(a)}}{dy^2}(0) = \frac{d^3 \varphi_n^{(s)}}{dy^3}(0) = 0$$

Амплитуда генерируемой моды определяется геометрическим параметром

$$f = \int_{-b}^b F(x) \exp(-i\alpha x) dx$$

(при вычислении фурье-образа используется симметричная или антисимметричная компонента формы неровности в зависимости от типа симметрии моды), а также приведенным комплексным коэффициентом рассеяния S . Вид этого коэффициента зависит от способа нормировки собственной функции $\{\varphi_n\}$, определенной с точностью до мультипликативной комплексной постоянной. Пусть $v(t, x, 0) = \operatorname{Re}[u_0(t) \exp(i\alpha x)]$ – распределение пульсаций скорости вдоль оси канала, соответствующее однододовому возмущению. Будем нормировать моду условием $u_0(0) = 1$. В зависимости от типа симметрии это условие соответствует одному из двух соотношений

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_n^{(s)}}{dy}(0) = 1, \quad -i\alpha \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{(a)}(0) = 1$$

В результате выражение для приведенного коэффициента рассеяния приобретает вид (знаки “–” и “+” соответствуют разложениям (2.1) в областях, лежащих выше и ниже по потоку от неровностей)

$$S = \pm c \operatorname{res}_{k=\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[k\varphi_n(0; k) + i \frac{d\varphi_n}{dy}(0; k) \right]; \quad c = \begin{cases} 2, & \operatorname{Re}\alpha \neq 0 \\ 1, & \operatorname{Re}\alpha = 0 \end{cases}$$

Опишем результаты исследования спектра возмущений. При $A \rightarrow 0$ уравнения для гармоник φ_n “расцепляются”, и система (2.2) приобретает вид бесконечного набора независимых уравнений Орра-Зоммерфельда для частот $\{n\omega, -\infty < n < \infty\}$. В связи с этим будем разбивать все множество собственных значений задачи (2.2) на беско-

нечные подмножества $\{\alpha_m^{(n)}\}$, каждое из которых “порождается” спектром стационарного течения Пуазейля, соответствующим частоте $n\omega$.

В данной работе точный расчет спектра пульсирующего течения Пуазейля выполнялся с помощью вычисления корней дисперсионного соотношения методом Ньютона. В силу вышеупомянутого условия симметрии вычислялись только группы мод, порождаемые спектрами стационарного течения для неотрицательных частот $(0, \omega, 2\omega, \dots)$. На первом этапе производился расчет спектра для $\omega = 0, A = 0$, затем методом продолжения по параметру ω вычислялись спектры гармонических по времени возмущений стационарного течения Пуазейля, соответствующие дискретному набору частот, и, наконец, методом продолжения по параметру A рассчитывались соответствующие группы мод колеблющегося течения.

Спектр стационарных возмущений стационарного течения симметричен относительно оси $\text{Re}\alpha = 0$, причем большинство мод в окрестности начала координат расположены именно на этой оси [5]. Это свойство облегчало поиск мод для $\omega = 0$. Расчет спектра упрощало и то обстоятельство, что при $R \gg 1$ волновые числа мод стационарного течения Пуазейля хорошо описываются асимптотической формулой $\alpha \sim K(\omega R)/R$, где параметрические зависимости $K(\Omega)$ находятся из решения задачи на собственные значения для упрощенного уравнения Орра – Зоммерфельда

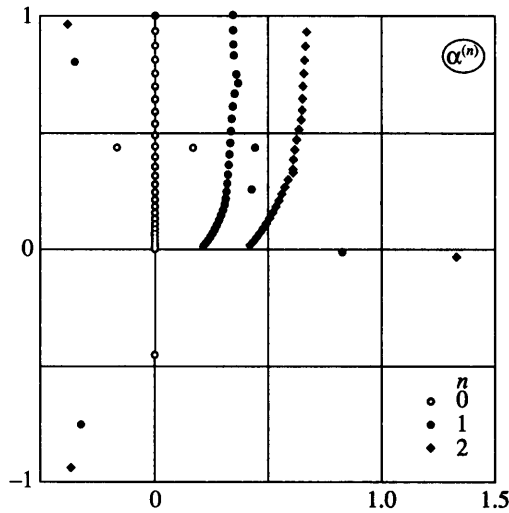
$$\left(1 - y^2 - \frac{\Omega}{K}\right) \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + 2\varphi - \frac{1}{iK} \frac{d^4 \varphi}{dy^4} = 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi(1) = \frac{d\varphi}{dy}(1) = \varphi^{(a)}(0) = \frac{d\varphi^{(s)}}{dy}(0) = \frac{d^2 \varphi^{(a)}}{dy^2}(0) = \frac{d^3 \varphi^{(s)}}{dy^3}(0) = 0$$

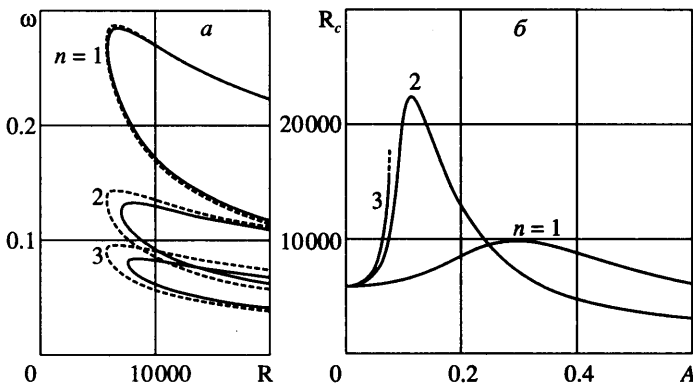
В случае стационарных возмущений ($\Omega = 0$) краевая задача (2.3) не содержит независимых параметров. Собственные значения минимального модуля для случаев симметричного и антисимметричного решения имеют вид $K^{(s)}(0) = i28.22, K^{(a)}(0) = i21.68$. Численный анализ показывает, что неустойчивая мода (волна Толлмина-Шлихтинга) “происходит” от антисимметричной стационарной моды, соответствующей четвертому по величине модуля волновому числу $K^{(a)}(0) = i271.84$ в своем типе симметрии. Использование асимптотической формулы для вычисления первых десяти мод каждого типа при $\omega = 0, R \sim 10^4$ дает ошибку менее 0.1%. Все иллюстрируемые ниже результаты относятся к антисимметричным возмущениям, по отношению к которым теряет устойчивость стационарное течение Пуазейля.

На фиг. 1 показаны три группы мод $\alpha^{(0,1,2)}$ из спектра антисимметричных возмущений пульсирующего течения Пуазейля ($R = 15000, \omega = 0.2, A = 0.5$). Положение большинства мод мало отличается от их положения при $A = 0$. Наиболее сильно смещены отдельно стоящие моды, в частности, теряет устойчивость мода, соответствующая волне Толлмина – Шлихтинга стационарного течения Пуазейля с частотой 2ω (крайне правая мода на фиг. 1).

Рассмотрим подробнее вопрос о потере устойчивости в пульсирующем течении Пуазейля. Напомним, что в рамках рассматриваемой постановки речь идет о неустойчивости “пространственного” типа, когда возмущения периодичны по времени. В этом случае дестабилизация потока означает, что при изменении параметров основного течения затухание какой-либо моды сменяется ее нарастанием вниз по потоку. Для классификации неустойчивостей такого рода снова совершим предельный переход $A \rightarrow 0$. С уменьшением амплитуды пульсаций влияние нестационарности основного течения на характеристики устойчивости становится пренебрежимо малым. Тем не менее роль слабых пульсаций расхода полностью сохраняется в отношении процесса генерации возмуще-



Фиг. 1. Спектр антисимметричных возмущений пульсирующего течения Пуазейля ($R = 15000$, $\omega = 0.2$, $A = 0.5$)

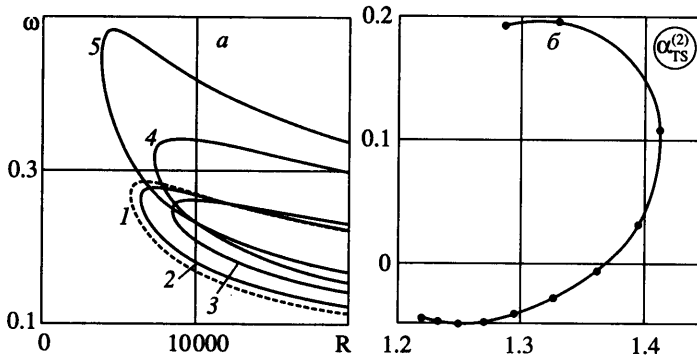


Фиг. 2. Области неустойчивости осциллирующего течения Пуазейля; *a* – кривые нейтральной устойчивости ($A = 0.05$ – сплошные линии, $A = 0$ – штриховые); *б* – зависимости критических чисел Рейнольдса от амплитуды пульсаций основного течения

ний: возбуждаются только моды с периодом, равным периоду колебаний основного течения.

Из сказанного следует, что при $A \ll 1$ на плоскости R, ω имеется бесконечное число кривых нейтральной устойчивости, получающихся из нейтральной кривой для стационарного течения Пуазейля аффинным сжатием по оси ω в n раз ($n = 1, 2, 3, \dots$; фиг. 2, *a*, штриховые линии). При $A \neq 0$ нейтральные кривые перестают быть аффинно подобными; их положение для $A = 0.05$ показано на фиг. 2, *a* сплошными линиями.

Описанные кривые ограничивают области, в каждой из которых теряет устойчивость мода, являющаяся аналитическим продолжением по параметру A моды Толлмина – Шлихтинга с частотой, кратной ω . Будем называть такие моды модами типа Толлмина – Шлихтинга. В диапазоне $0 \leq A \leq 1$, исследованном в данной работе, не удалось обнаружить неустойчивых мод, отличных от мод типа Толлмина – Шлихтинга. В



Фиг. 3. Устойчивость нестационарного течения Пуазейля; а – нейтральные кривые первой неустойчивой моды, $A = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 1$ (кривые 1–5); б – траектория второй неустойчивой моды при изменении A от 0 (верхняя точка) до 1 с шагом 0.1 ($R = 15000$, $\omega = 0.2$)

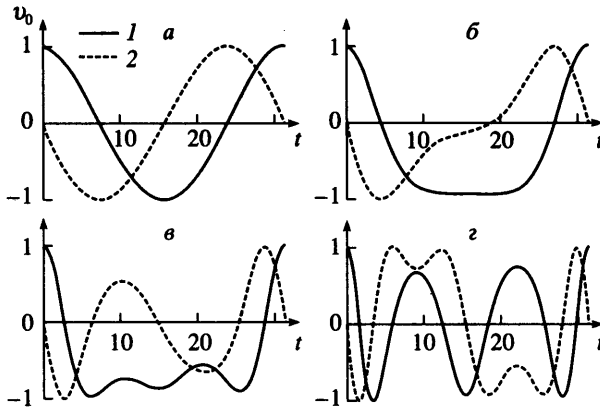
точках перекрытия областей неустойчивости рассеяние колебаний основного течения на неровностях приводит к генерации двух (или нескольких) мод, растущих вниз по потоку.

Как и в классической теории устойчивости стационарных течений вязкой жидкости, каждая мода типа Толлмина – Шлихтинга при заданном A характеризуется критическим числом R_c – минимальным значением, которое принимает число Рейнольдса на соответствующей нейтральной кривой. При $A \rightarrow 0$ числа R_c всех мод стремятся к предельному значению 5772 – критическому числу Рейнольдса стационарного течения Пуазейля [13]. Проведенные вычисления показали, что на первые 10 мод типа Толлмина – Шлихтинга малые колебания основного течения оказывают стабилизирующее воздействие ($R_c > 5772$), причем наибольший стабилизирующий эффект наблюдается для моды с номером 3; моды с номерами $n \geq 11$ дестабилизируются.

Зависимости $R_c(A)$ для трех мод типа Толлмина – Шлихтинга показаны на фиг. 2, б. Расчет показывает, что с увеличением A рост R_c сменяется убыванием, причем смена поведения происходит тем резче, чем выше номер моды. Для первой моды максимум критического числа Рейнольдса 9770 достигается при $A = 0.293$. В окрестности точки $A = 0$ графики зависимостей $R_c(A)$ имеют форму парабол. Как показал аналитический анализ, выполненный с помощью теории возмущений, это связано с квадратичным характером зависимостей вариаций собственных значений от амплитуды пульсаций основного течения при $A \ll 1$.

На фиг. 3, а показаны положения нейтральных кривых первой неустойчивой моды для различных амплитуд пульсаций основного течения. Численный анализ показывает, что стабилизирующее воздействие малых колебаний потока распространяется только на голову нейтральной кривой и на окрестность нижней ветви; в окрестности верхней ветви наблюдается слабый дестабилизирующий эффект. С ростом амплитуды пульсаций уменьшение размера неустойчивой области сменяется увеличением, и нейтральная кривая смещается в область больших частот и меньших чисел Рейнольдса.

Те же тенденции имеют место и в случае нейтральных кривых для мод с номерами $n = 2, 3$. В результате при $A > 0.379$ точка $R = 15000$, $\omega = 0.2$ захватывается областью неустойчивости второй моды. Траектория ее волнового числа при изменении амплитуды пульсаций в диапазоне $0 \leq A \leq 1$ показана на фиг. 3, б. При $A = 1$ критические точки нейтральных кривых для мод с номерами $n = 1, 2, 3$ характеризуются следующими парами параметров R, ω : 3844, 0.449; 2434, 0.328; 2112, 0.273.



Фиг. 4. Форма пульсаций скорости, производимых в центре канала первой неустойчивой модой при $R = 15000$, $\omega = 0.2$; а, б, в, г соответствуют $A = 0.02, 0.2, 0.5, 1$ ($1 - \text{Re } v_0, 2 - \text{Im } v_0$)

На фиг. 4 проиллюстрировано изменение формы пульсаций при увеличении амплитуды колебаний расхода. Расчеты выполнены для возмущения скорости, производимого в центре канала первой неустойчивой модой ($R = 15000$, $\omega = 0.2$). Форма пульсаций описывается комплексной функцией

$$v_0(t) = -i\alpha \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(0; \alpha) \exp(-in\omega t)$$

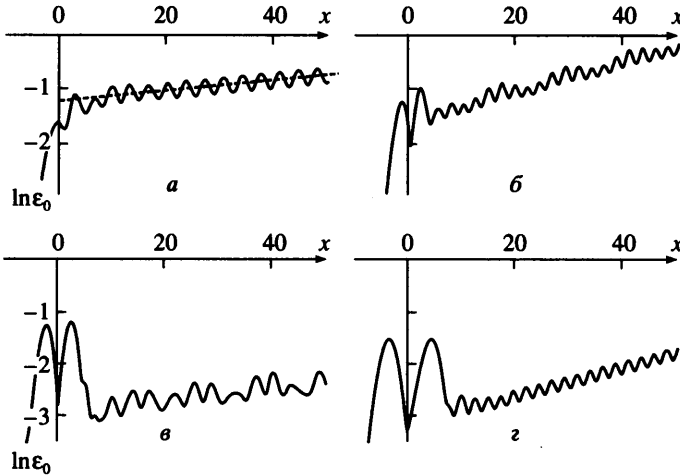
действительная часть которой описывает форму колебаний при $x = 0$, а мнимая – на четверть длины волны ниже по потоку. Результаты приведены для промежутка $0 < t < T$, соответствующего одному периоду колебаний ($T = 10\pi$).

При $A = 0.02$ возмущение слабо отличается от гармонического (фиг. 4, а): амплитуды гармоник с номерами $n = 0, 2$ составляют $\sim 4\%$ от амплитуды гармоники с номером $n = 1$; остальные гармоники пренебрежимо малы. С увеличением интенсивности колебаний основного течения в 10 раз ($A = 0.2$; фиг. 4, б) ангармоничность возмущения становится ярко выраженной, поскольку относительные амплитуды гармоник, соседних с первой, составляют $\sim 50\%$. При $A = 0.5$ (фиг. 4, в) наблюдается своеобразное удвоение частоты возмущения: амплитуды нулевой и второй гармоник превосходят амплитуду первой примерно в 3 раза. При $A = 1$, напротив, гармоники с номерами $n = 0, 2$ малы, а гармоники с $n = -3, -2, -1, 1, 3, 4, 5$ сравнимы по величине (фиг. 4, г).

3. Численный анализ процесса возбуждения неустойчивых мод на неровностях стенок. Процесс генерации волн неустойчивости в колеблющемся течении Пуазейля проиллюстрируем на примере антисимметричной неровности $F^{(+,-)} = H(x/b)$, где b – эффективная ширина искривленного участка канала, а $H(x)$ – бесконечно дифференцируемая финитная функция с носителем $(-1, 1)$

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int \prod_{-j=1}^{+\infty} \left(\frac{2^j}{k} \sin \frac{k}{2^j} \right) \exp(-ikx) dk$$

Эта функция четная и неотрицательная, принимающая максимальное значение $H(0) = 1$; график функции при $0 < x < 1$ проходит через точку $(1/2, 1/2)$ и центрально симметричен относительно нее (вид аналогичной неровности приведен в [14]).



Фиг. 5. Распределение среднеквадратичных пульсаций возмущений скорости вдоль оси канала, вызванных рассеянием колебаний расхода на антисимметричной неровности стенок канала ($R = 15000, \omega = 0.2$); *a* – генерация одной волны Толлмина – Шлихтинга ($A = 0.2, b = 3$); *б, в, з* – возбуждение двух волн неустойчивости при $b = 3, 4.7, 7.6$ ($A = 0.5$)

В качестве меры интенсивности генерируемых возмущений будем использовать распределение среднеквадратичных пульсаций скорости вдоль оси канала:

$$\epsilon_0(x) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} = \sqrt{\left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(x, 0) \right]^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial \Phi_{-n}}{\partial x}(x, 0) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x}(x, 0) \right]} \quad (3.1)$$

На фиг. 5 показаны распределения интенсивности возмущений, вызванных рассеянием колебаний основного течения различной амплитуды на неровностях различной ширины (все расчеты выполнены для $R = 15000, \omega = 0.2$). При $A = 0.2$ вниз по потоку нарастает одна мода типа Толлмина – Шлихтинга с волновым числом $\alpha_{TS}^{(1)} = 0.9046 - i0.0096$ (фиг. 5, *a*), поэтому для описания процесса генерации контур C в обратном преобразовании Фурье в (1.6), начинающийся и заканчивающийся в бесконечности, должен обходить соответствующие полюса $\alpha_{TS}^{(1)}$ и $-\alpha_{TS}^{(1)*}$ снизу, не охватывая при этом других полюсов из нижней полуплоскости [10]. Размер неровности $b = 3$ выбирался близким половине длины волны неустойчивости: в этом случае модуль геометрического параметра f максимален, и амплитуда генерируемой волны наибольшая.

Проведенные расчеты показали, что в отличие от случая стационарного основного течения кривая нарастания возбуждаемой волны имеет колебательный вид (правая часть фиг. 5, *a*). Это явление объясняется ангармоничностью волны, отмеченной в разд. 2. По аналогии с (3.1) вычислим продольное распределение интенсивности среднеквадратичных пульсаций $\epsilon_\alpha(x)$, производимых одной волной с волновым числом $\alpha = 2\pi/\lambda - i\gamma$ на оси канала

$$\epsilon_\alpha = P(x)e^{\gamma x}, \quad P = \sqrt{E_0 + \operatorname{Re} E \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} x\right) - \operatorname{Im} E \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda} x\right)} \quad (3.2)$$

$$E_0 = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2, \quad E = 2C_0^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} C_n, \quad C_n = -i\alpha f S \Phi_n(0)$$

Функция P периодична с периодом $\lambda/2$. В случае гармонического по времени возмущения (например, при $A = 0$) все коэффициенты Фурье C_n возмущения скорости, за исключением C_1 , равны 0, функция P вырождается в постоянную, и кривая нарастания имеет монотонный вид. В общем случае возмущение ангармонично, и функция P колеблется в пределах $\sqrt{E_0 - |E|}$, $\sqrt{E_0 + |E|}$; при этом в качестве характеристики начальной амплитуды генерируемой волны естественно использовать величину нулевого коэффициента Фурье функции P

$$a = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} P(x) dx \quad (3.3)$$

В рассматриваемом случае все моды, за исключением первой моды типа Толлмина – Шлихтинга, затухают вниз по потоку от неровности, и при $x > 15$ кривая нарастания возмущения практически совпадает с вычисленной по формуле (3.2) для возбуждаемой волны неустойчивости. Прямая $\ln \epsilon_0 = \ln a + \gamma x$, соответствующая “усредненному” распределению амплитуды генерируемой волны, отмечена на фиг. 5, a штриховой линией.

На фиг. 5, b – z проиллюстрированы процессы рассеяния колебаний невозмущенного потока на неровностях различной протяженности для $A = 0.5$. При такой амплитуде осцилляций основного течения теряет устойчивость и вторая мода типа Толлмина – Шлихтинга, и вниз по потоку растут две моды с волновыми числами $\alpha_{TS}^{(1)} = 0.8246 - i0.0097$, $\alpha_{TS}^{(2)} = 1.3262 - i0.0283$ (см. фиг. 1), так что контур S из (1.6) должен охватывать снизу обе пары соответствующих полюсов.

Для $b = 3$ вычисления начальных амплитуд генерируемых волн, произведенные по формуле (3.3), дают $a_{TS}^{(1)} = 0.063$, $a_{TS}^{(2)} = 0.203$, т.е. начальная амплитуда второй неустойчивой моды более чем в 3 раза превышает амплитуду первой; примерно во столько же раз больше и ее инкремент нарастания. Таким образом, вниз по потоку от неровности такого размера доминирует вторая неустойчивая мода. Об этом свидетельствует высота расположения и средний наклон кривой нарастания в правой части фиг. 5, b , а также период ее колебаний 2.4, соответствующий половине длины волны второй неустойчивой моды. Влияние первой неустойчивой моды ограничено длинноволновой модуляцией кривой нарастания, обусловленной интерференцией волн.

Понизить роль каждой из неустойчивых мод в структуре возмущения вниз по потоку от искривленного участка канала можно с помощью специального подбора продольного размера неровностей. Начальная комплексная амплитуда каждой моды пропорциональна геометрическому параметру f , модуль которого имеет минимум в случае, когда длина неровности приблизительно равна длине волны соответствующей неустойчивой моды (в силу принципа суперпозиции вторая половина неровности “гасит” первую). Ширина неровности $b = 4.7$ приблизительно равна длине волны второй неустойчивой моды, в связи с чем на умеренных расстояниях от неровности доминирует первая мода. Именно этой моде соответствует средний наклон кривой и расстояние между “горбами” (фиг. 5, b). Из-за интерференции со второй неустойчивой модой малой амплитуды также наблюдается длинноволновая модуляция, усиливающаяся вниз по потоку. На достаточно большом расстоянии доминирование первой моды сменяется доминированием второй, поскольку последняя имеет большую скорость роста. При $b = 7.6$ размер неровности соответствует длине волны первой неустойчивой моды; в этом случае доминирование второй моды столь велико, что длинноволновая модуляция вниз по потоку не наблюдается (фиг. 5, z).

В последних трех описанных случаях амплитуда генерируемых волн далека от максимально возможной. В связи с этим в окрестности неровностей доминирует нулевая гармоника возмущения, поведение которой в качественном отношении близко к поведению возмущения при стационарном обтекании локального антисимметричного искривления канала. При такой конфигурации течения максимумы модуля возмущения скорости на оси достигаются на некотором удалении вверх и вниз по потоку от центрального сечения, а в окрестности середины искривленной секции вертикальная скорость близка к 0. Именно этими соображениями объясняется характерный “провал” около точки $x = 0$ в распределениях интенсивностей среднеквадратичных пульсаций, показанных на фиг. 5, б–г.

Рассмотренные неровности аффинно подобны; они имеют одинаковую высоту и разную ширину. В этом случае расстояние между положениями максимумов модуля скорости пропорционально b , а высота максимумов тем больше, чем неровность “круче”, т.е. обратно пропорциональна b . Эти качественные особенности также отчетливо видны на фиг. 5, б–г.

Построенные решения линеаризованной задачи не являются равномерно пригодными. В случае генерации растущих возмущений рассматриваемая область ограничена в продольном направлении неравенством $ha \exp(\gamma x) \ll 1$, где a и γ – начальная амплитуда и инкремент нарастания доминирующей моды.

Еще раз подчеркнем, что рассматриваемая постановка задачи носит сугубо модельный характер, поскольку ламинарный режим течения Пуазейля в плоском канале при числах Рейнольдса порядка критического чрезвычайно трудно реализуем (если вообще возможен). Тем не менее такая постановка помогает выявить общие закономерности процессов генерации и эволюции неустойчивых возмущений в течениях вязкой жидкости, характеризующихся пульсациями расхода конечной амплитуды.

Заключение. Теоретически исследован процесс взаимодействия пульсаций расхода плоского течения Пуазейля с малыми двумерными неровностями стенок канала. Физическим следствием такого взаимодействия оказывается возбуждение в потоке возмущений со всеми частотами, кратными частоте колебаний основного течения. С помощью анализа аналитических свойств преобразования Фурье возмущения по продольной переменной показано, что вверх и вниз по потоку от неровности возмущение имеет вид суперпозиции мод одномерного основного течения, колеблющегося в плоских границах. Произведена классификация мод и подробно исследован спектр их продольной эволюции.

Изучена устойчивость пульсирующего течения Пуазейля. Показана возможность одновременного существования нескольких мод, растущих при распространении вниз по потоку. В силу ангармоничности каждой неустойчивой моды соответствующая ей кривая нарастания интенсивности среднеквадратичных пульсаций имеет колебательный вид с периодом, равным половине длины волны возмущения. Приведены примеры расчета процессов генерации одной и двух нарастающих мод.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00632) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1984.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 151 с.
2. Herbert T. Three-dimensional phenomena in the transitional flat-plate boundary layer // AIAA Pap. 1985. № 85-0489.
3. Grosch C.E., Salwen H. The stability of steady and time-dependent plane Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1968. V. 335. Pt 1. P. 361–392.

4. *Kerczek C. von.* The instability of oscillatory plane Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 116. P. 91–114.
5. *Мануйлович С.В.* О прохождении волны неустойчивости через участок канала переменной ширины // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1992. № 2. С. 34–41.
6. *Мануйлович С.В.* О восприимчивости плоского течения Пуазейля к вибрации стенок канала // *Изв. РАН. МЖГ.* 1992. № 4. С. 12–19.
7. *Мануйлович С.В.* О возмущениях пространственного пограничного слоя, вызванных неровностями обтекаемого тела // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1989. № 5. С. 129–134.
8. *Устинов М.В.* Генерация мод вторичной неустойчивости при взаимодействии волны Толлмина-Шлихтинга с неровностью // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 3. С. 28–38.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М: Наука, 1986. 736 с.
10. *Богданова Е.В., Рыжов О.С.* О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах // *ПМТФ.* 1982. № 4. С. 65–72.
11. *Мануйлович С.В.* Распространение возмущений в плоском течении Пуазейля между стенками неоднородной податливости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 4. С. 29–46.
12. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук.* 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.
13. *Orszag S.A.* Accurate solution of Orr-Sommerfeld stability equation // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 50. Pt. 4. P. 689–703.
14. *Мануйлович С.В.* О возмущениях течения Гамеля, вызванных неровностью стенок канала // *Изв. РАН. МЖГ.* 2004. № 4. С. 48–64.

Москва
e-mail: manu@recp.aerocentr.msk.su

Поступила в редакцию
9.VIII.2004