

УДК 532.546.013.4:536.25

© 2005 г. М. М. РАМАЗАНОВ

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ В ТЕПЛОПРОВОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрена стационарная конвекция жидкости в тонком пористом вертикальном кольце, расположенном в теплопроводной полуплоскости. Выведены приближенные уравнения для указанной задачи. Получено аналитическое решение для кругового кольца. Для эллиптического кольца найдено численно-аналитическое решение. Исследована зависимость числа Нуссельта и расхода жидкости от числа Рейля, аспектного отношения и глубины залегания контура.

Конвекции жидкости в пористом кольце посвящен ряд работ [1–3]. В [1] рассмотрена двумерная конвекция с изотермической внутренней границей, а на внешней границе задана температурная стратификация. Особенностью данной задачи является то, что кольцо окружено непроницаемой теплопроводной средой, где на большом расстоянии от кольца задан термический градиент, направленный вертикально вниз. В [2, 3] рассматривается двумерная конвекция в кольцевой области, заполненной пористой средой. Из результатов указанных работ следует, что в рассматриваемой постановке с удовлетворительной точностью можно использовать гидравлическое приближение. В настоящей работе этот вопрос обсуждается более конкретно и получены необходимые оценки. Приведенные результаты могут быть полезны при исследовании гидротермальной конвекции в земной коре, имеющей важные геофизические приложения [4–6].

Ключевые слова: свободная конвекция, теплопроводность, пористая среда, вертикальное кольцо.

1. Круговой контур. Вертикальный замкнутый пористый контур круговой формы насыщен жидкостью и расположен в теплопроводной полуплоскости (фиг. 1). Контур имеет радиус r_0 , толщину hr_0 ($h \ll 1$) и его центр расположен на глубине Hr_0 ($H > 1$) от изотермической границы полуплоскости. На большом расстоянии от контура задан термический градиент G , направленный вертикально вниз. Необходимо найти скорость циркуляции жидкости и аномалию теплового потока, обусловленную конвекцией жидкости в контуре.

Впишем необходимые уравнения в полярных координатах (r, φ) . Во внутренней и внешней области (относительно контура) имеем стационарное уравнение теплопроводности

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta T_i = 0, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.1)$$

Уравнения конвекции в кольце запишем в приближении Дарси – Обербека – Бусинеска [7]

$$-\frac{\mu}{k} u_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho_0 g \beta T_e e_\varphi = 0 \quad -\frac{\mu}{k} u_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho_0 g \beta T_e e_r = 0$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad \rho_0 C_p \left(\frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \lambda_s \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) \quad (1.2)$$

Граничные условия

$$T_e = T_0 = \text{const}, \quad z = 0; \quad [T] = 0, \quad \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0, \quad u_r = 0, \quad r = r_0 \left(1 \pm \frac{h}{2} \right)$$

$$f(r, \varphi + 2\pi) = f(r, \varphi) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial z} \rightarrow -G, \quad r \rightarrow \infty, \quad z < 0; \quad f = \{u_r, u_\varphi, T, p\}$$

Здесь T_i, T_e, T – температуры во внутренней, внешней области и в кольце соответственно, u_φ, u_r – тангенциальная и радиальная компоненты скорости фильтрации, p – давление, отсчитываемое от распределения при механическом равновесии, ρ_0 – характерная плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, β – коэффициент теплового расширения, μ – динамическая вязкость, k – проницаемость, λ_s – эффективная теплопроводность насыщенной пористой среды, C_p – удельная изобарическая теплоемкость, e_z – единичный вектор, направленный против вектора тяжести, e_φ, e_r – единичные вектора в тангенциальном и радиальном направлениях, $z = 0$ – граница полуплоскости, $[]$ – скачок функции на границах кольца.

Упростим задачу (1.1)–(1.3), учитывая, что толщина кольца мала ($h \ll 1$). Положим в (1.2) $r \approx r_0$ и усредним все уравнения по сечению кольца, используя граничные условия (1.3). В результате, опуская второе уравнение, которое в дальнейшем не понадобится, запишем (1.2) в виде

$$-\frac{\mu}{k} \langle u_\varphi \rangle - \frac{1}{r_0} \frac{d\langle p \rangle}{d\varphi} + \rho_0 g \beta \langle T \rangle e_z e_\varphi = 0$$

$$\langle u_\varphi \rangle = \text{const} \quad (1.4)$$

$$\rho_0 C_p r_0 \frac{1}{d\varphi} \frac{d\langle u_\varphi T \rangle}{d\varphi} = \frac{\lambda}{r_0 h} \left[\frac{\partial T_e}{\partial r} - \frac{\partial T_i}{\partial r} \right] + \frac{\lambda_s d^2 \langle T \rangle}{r_0^2 d\varphi^2}$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности в непроницаемой среде, $\langle \rangle$ – знак усреднения по сечению кольца.

Сделаем предположение

$$|\langle (u_\varphi - \langle u_\varphi \rangle)(T - \langle T \rangle) \rangle| \ll \langle u_\varphi \rangle \langle T \rangle \quad (1.5)$$

Тогда учитывая соотношение

$$\langle u_\varphi T \rangle = \langle u_\varphi \rangle \langle T \rangle + \langle (u_\varphi - \langle u_\varphi \rangle)(T - \langle T \rangle) \rangle$$

и вводя новые обозначения $u \equiv \langle u_\varphi \rangle, T \equiv \langle T \rangle, p \equiv \langle p \rangle$, перепишем (1.4) в виде

$$-\frac{\mu}{k} u - \frac{1}{r_0} \frac{dp}{d\varphi} + \rho_0 g \beta T e_z e_\varphi = 0, \quad u = \text{const} \quad (1.6)$$

$$\rho_0 C_p u \frac{dT}{d\varphi} = \frac{\lambda}{h} \left[\frac{\partial T_e}{\partial r} - \frac{\partial T_i}{\partial r} \right] + \frac{\lambda_s d^2 T}{r_0 d\varphi^2}$$

Одномерные уравнения (1.6) соответствуют гидравлическому приближению, когда рассматриваются средние по сечению потока жидкости гидродинамические величины.

Найдем условие, при котором неравенство (1.5) не выполняется. Пусть δ – безразмерная толщина теплового пограничного слоя в кольце, Nu – число Нуссельта вбли-

зи контура, R – число Рэлея (1.10). Из первого и третьего уравнения (1.4) и последнего уравнения (1.2) в безразмерном виде получим оценки

$$u \sim RT, \quad uT \sim \frac{Nu}{h}, \quad u \sim \frac{1}{\delta^2}$$

Отсюда найдем

$$\delta \sim \left(\frac{h}{R\text{Nu}}\right)^{1/4}, \quad T \sim \left(\frac{\text{Nu}}{R\bar{h}}\right)^{1/2}, \quad u \sim \left(\frac{R\text{Nu}}{h}\right)^{1/2} \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) и $T - \langle T \rangle \sim \text{Nu}\delta$, $u - \langle u \rangle \sim R\text{Nu}\delta$ в неравенство, противоположное (1.5), получим

$$\delta = O(h^\alpha) \Leftrightarrow R\text{Nu} = O(h^{1-4\alpha}), \quad \alpha \geq 1$$

Следовательно, неравенство (1.5) будет выполнено при

$$R\text{Nu} \ll 1/h^3 \quad (1.8)$$

Если (1.8) не выполняется, то гидравлическое приближение неприемлемо, и в (1.7) вместо h необходимо подставить δ . В результате получим оценки

$$\delta \sim \frac{1}{(R\text{Nu})^{1/3}}, \quad T \sim \left(\frac{\text{Nu}^2}{R}\right)^{1/3}, \quad u \sim (R\text{Nu})^{2/3} \quad (1.9)$$

В рассматриваемой задаче при условии (1.8) число Нуссельта порядка 1 (за исключением точек, достаточно близких к изотермической поверхности). Действительно, при малых числах Рэлея вклад конвекции мал, а при больших температуру в контуре в первом приближении можно считать постоянной. В этом случае задача имеет точное решение. В частности, для кругового контура в теплопроводной плоскости получим $\max \text{Nu} = 2$. Если (1.8) не выполняется, то $\text{Nu} \sim 1/\delta$ и имеют место оценки (1.9).

Таким образом, рассматриваемая задача при условии (1.8) приближенно описывается системами (1.1), (1.6). Решение обеих задач необходимо шить, на бесконечности задан термический градиент, а на поверхности полуплоскости фиксирована температура.

В третьем уравнении (1.6) ввиду малости h будем пренебрегать вторым членом справа по сравнению с первым. При необходимости этот член может быть учтен. Можно учесть также квадратичную инерционную поправку в уравнении движения в (1.6).

Приведем уравнения (1.1), (1.6) к безразмерному виду, вводя следующие характерные масштабы: r_0 – длины, Gr_0 – температуры (G – термический градиент), $\lambda/\rho_0 C_p r_0$ – скорости, $\mu\lambda/\rho_0 C_p h$ – давления.

В безразмерном виде, сохраняя обозначения, уравнения (1.1), (1.6) и граничные условия запишем в виде

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta T_i = 0, \quad w = uh$$

$$w = -\frac{dp}{d\varphi} + RhT_e z e_\varphi, \quad w = \text{const}, \quad R = \frac{k\rho_0^2 C_p g \beta Gr_0^2}{\lambda\mu}$$

$$w \frac{dT}{d\varphi} = \left[\frac{\partial T_e}{\partial r} - \frac{\partial T_i}{\partial r} \right], \quad T_e = T_i = T, \quad r = 1 \quad (1.10)$$

$$T_e = 0, \quad z = 0; \quad \frac{\partial T_e}{\partial z} \rightarrow -1, \quad r \rightarrow \infty, \quad z < 0$$

Здесь R – число Рэлея, w – расход жидкости в контуре, T, T_e, T_i – температура в контуре, во внешней и внутренней областях относительно контура соответственно, e_z, e_φ – единичные вектора, направленные вертикально вверх и по касательной к контуру.

Положим $T = \theta - z, T_e = \theta_e - z, T_i = \theta_i - z$ и запишем задачу (1.10) относительно $\theta, \theta_e, \theta_i$ в бицилиндрических координатах (σ, τ) [8]

$$x = \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \quad z = -\frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \quad a = \sqrt{H^2 - 1}$$

$$g_{\tau\tau} = g_{\sigma\sigma} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_e}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial \sigma^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \sigma^2} = 0 \quad (1.11)$$

$$w = \frac{Rh}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_e e_z e_\sigma \sqrt{g_{\sigma\sigma}} d\sigma$$

$$w \frac{d\theta}{d\sigma} = \left[\frac{\partial \theta_e}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} \right] + \frac{aw \operatorname{sh} \tau_0 \sin \sigma}{(\operatorname{ch} \tau_0 - \cos \sigma)^2}, \quad \theta_e = \theta_i = \theta, \quad \tau = \tau_0$$

$$\theta_e = 0, \quad \tau = 0; \quad \frac{\partial \theta_e}{\partial z} \rightarrow 0, \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad z < 0$$

Здесь $g_{\tau\tau}, g_{\sigma\sigma}$ – диагональные компоненты метрического тензора, $a = \operatorname{sh} \tau_0$ – параметр, фиксирующий контур.

Будем искать решение (1.11) в виде

$$\theta_e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n \tau}{\operatorname{sh} n \tau_0} (a_n \sin n \sigma + b_n \cos n \sigma), \quad \theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(\tau - \tau_0)} (a_n \sin n \sigma + b_n \cos n \sigma) \quad (1.12)$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n \sigma + b_n \cos n \sigma)$$

Подставляя θ из (1.12) в (1.11) и используя разложение

$$\frac{\sin \sigma}{(\operatorname{ch} \tau_0 - \cos \sigma)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{b^{n-1}(b^2 - 1)} \sin n \sigma \quad (1.13)$$

для коэффициентов a_n, b_n , получим выражения

$$a_n = \frac{4a^2}{b^{n-1}(b^2 - 1)} \frac{k_n w}{w^2 + k_n^2}, \quad b_n = -\frac{4a^2}{b^{n-1}(b^2 - 1)} \frac{w^2}{w^2 + k_n^2} \quad (1.14)$$

$$k_n = \operatorname{cth} n \tau_0 + 1 = \frac{2b^{2n}}{b^{2n} - 1}, \quad b = H + \sqrt{H^2 - 1}, \quad a = \frac{b^2 - 1}{2b}$$

Все полученные выше выражения точны (в рамках модели). В [9] получено приближенное выражение для скорости, основанное на том, что при $H \rightarrow \infty$ компоненты

$g_{\sigma\sigma} - 1$ и $g_{\tau\tau} - 1 \sim O(1/H^2)$. Однако при достаточно малых глубинах расположения контура указанная формула становится неудовлетворительной. Поэтому приведем здесь точное выражение для скорости циркуляции жидкости. Подставляя (1.12) и (1.14) в уравнение движения в системе (1.11), учитывая выражение для метрического тензора и разложение (1.13) для расхода жидкости, получим искомое выражение в неявном виде

$$1 = \frac{8a^4 Rh}{(b^2 - 1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^{2n-2}} \frac{k_n}{w^2 + k_n^2} \quad (1.15)$$

Полагая в (1.15) $w = 0$ получим критическое число Рэлея

$$R_c h = 4 \left(1 + \frac{b^2}{(b^2 + 1)^2 - b^2} \right) \quad (1.16)$$

Отсюда при приближении контура к дневной поверхности, т.е. при $H \rightarrow 1$ ($b \rightarrow 1$) имеем $R_c h = 16/3$.

При больших глубинах расположения контура ($H \rightarrow \infty$) из (1.16) получим значение $R_c h = 4$, найденное в [10].

С ростом числа Рэлея из (1.15) получим асимптотическую формулу

$$w \sim \sqrt{Rh} \quad \text{или} \quad u \sim \sqrt{R/h} \quad (1.17)$$

совпадающую с полученной в [9, 10] и с (1.7) при $Nu \sim 1$.

Выражение для числа Нуссельта на поверхности имеет вид

$$Nu = 1 + \frac{2a}{x^2 + a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{sh} n \tau_0} (a_n \sin n \sigma + b_n \cos n \sigma)$$

2. Контур эллиптической формы. Из теории конвекции в однородном слое известно, что размер конвективных ячеек зависит от числа Рэлея, т.е. от интенсивности конвекции [11]. Доказанных методов определения такой зависимости пока нет. Хотя качественно совпадающий с экспериментом результат для ограниченной области дает метод максимума теплового потока. Согласно этому методу размер конвективной ячейки определяется из условия максимума теплового потока. Выше рассмотрен контур круговой формы. Однако, если сеть разломов позволяет, с ростом числа Рэлея для конвекции могут оказаться выгодными ячейки с другим аспектным отношением. Для изучения этого вопроса в данном разделе рассмотрена модель с одним контуром эллиптической формы и определено оптимальное аспектное отношение в зависимости от числа Рэлея и соответствующее максимальное по аспектному отношению распределение теплового потока.

Физическая постановка данной задачи не отличается от задачи, рассмотренной в разд. 1. Отличие ее математической постановки заключается в том, что теперь контур не круговой, а эллиптической формы. От рассмотренной в [10] данная задача отличается тем, что здесь учитывается изотерма на поверхности Земли, т.е. контур расположен в полушлоскости.

Поместим начало координат в центре эллипса и введем эллиптические координаты u, v

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} u \cos v, & z &= c \operatorname{sh} u \sin v, & c^2 &= a^2 - 1, & (a \geq 1) \\ x &= c \operatorname{sh} u \cos v, & z &= c \operatorname{ch} u \sin v, & c^2 &= 1 - a^2, & (a \leq 1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $a, 1$ – безразмерные полуоси эллипса вдоль осей x и z соответственно. Математическая постановка задачи (1.10) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_e}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T_e}{\partial v^2} = 0, \quad w = \frac{R}{L} \int_0^{2\pi} T N e_z t dv \quad (2.2)$$

$$N = \sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 v}$$

$$w \frac{dT}{dv} = \left[\frac{\partial T_e(u_0, v)}{\partial u} - \frac{\partial T_i(u_0, v)}{\partial u} \right], \quad T = T_i = T_e, \quad u = u_0$$

$$\{T, T_i, T_e\}(v + 2\pi) = \{T, T_i, T_e\}(v) \quad (2.3)$$

$$T \rightarrow T_r, \quad u \rightarrow \infty; \quad T_r = T_0 + H - z$$

$$T_e = T_0, \quad z = H$$

Здесь условие $u = u_0$ фиксирует контур, w – расход жидкости в контуре, L – длина контура, T_r – температура при механическом равновесии, T_0 – температура на границе полуплоскости, зависящая от выбора начала отсчета и поэтому далее положим ее равной нулю.

Будем искать решение в виде

$$T = T_r + \theta - \theta'_e, \quad T_i = T_r + \theta_i - \theta'_e, \quad T_e = T_r + \theta_e - \theta'_e$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n v + b_n \cos n v), \quad \theta_e = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(u-u_0)} (a_n \sin n v + b_n \cos n v) \quad (2.4)$$

$$\theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} ((\operatorname{ch} n(u-u_0) + p_n \operatorname{sh} n(u-u_0)) a_n \sin n v +$$

$$+ (\operatorname{ch} n(u-u_0) + q_n \operatorname{sh} n(u-u_0)) b_n \cos n v)$$

$$\theta'_e(x, z) = \theta_e(x, 2H - z)$$

Разложим функцию θ'_e в ряд Фурье на контуре ($u = u_0$).

$$\theta'_e(u_0, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [a_n (c_{nm}^1 \sin m v + c_{nm}^2 \cos m v) + b_n (d_{nm}^1 \sin m v + d_{nm}^2 \cos m v)] \quad (2.5)$$

$$c_{nm}^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n(u'-u_0)} \sin n v' \sin m v dv, \quad c_{nm}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n(u'-u_0)} \sin n v' \cos m v dv$$

$$d_{nm}^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n(u'-u_0)} \cos n v' \sin m v dv, \quad d_{nm}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n(u'-u_0)} \cos n v' \cos m v dv \quad (2.6)$$

$$u' = u(x(u_0, v), 2H - z(u_0, v)), \quad v' = v(x(u_0, v), 2H - z(u_0, v))$$

В (2.6) u', v' получены из эллиптических координат $u(x, z), v(x, z)$ после замены z выражением $2H - z$ и последующего перехода к эллиптическим координатам u_0, v .

Подставляя (2.4)–(2.6) в уравнение (2.3), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно a_n и b_n . Причем при фиксированном расходе жидкости w эта система линейна, а для w получим нелинейное уравнение – уравнение движения в (2.2).

Выражение θ_i в (2.4) неоднозначно, так как величины p_n и q_n произвольны. С целью выделения единственного, регулярного решения внутренней задачи применим к θ_i первую формулу Грина для гармонических функций [12]

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^{u_0} \left[\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial v} \right)^2 \right] du = \int_0^{2\pi} \left(\theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial u} \right) (u_0, v) dv \quad (2.7)$$

В результате получим

$$q_n = \frac{1}{p_n}, \quad p_n = \operatorname{th} n u_0, \quad a \leq 1; \quad p_n = \operatorname{cth} n u_0, \quad a \geq 1 \quad (2.8)$$

Тепловой поток на поверхности, т.е. число Нуссельта, вычислим по формуле

$$\operatorname{Nu} = 1 - \left(\frac{\partial \theta_e}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \theta_e}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) (z = H) \quad (2.9)$$

С ростом глубины залегания контура H полученное решение стремится к элементарному виду, найденному в [10]

$$\begin{aligned} T &= T_r + a_1 \sin v + b_1 \cos v \\ T_i &= T_r + [\operatorname{ch}(u - u_0) + p_1 \operatorname{sh}(u - u_0)] a_1 \sin v + \\ &+ [\operatorname{ch}(u - u_0) + q_1 \operatorname{sh}(u - u_0)] b_1 \cos v \\ T_e &= T_r + \exp(-u + u_0) (a_1 \sin v + b_1 \cos v) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$w^2 = (1 + a) \left[\frac{\pi R h}{L} - \frac{1 + a}{a} \right]; \quad p_1 = a, \quad q_1 = \frac{1}{a}$$

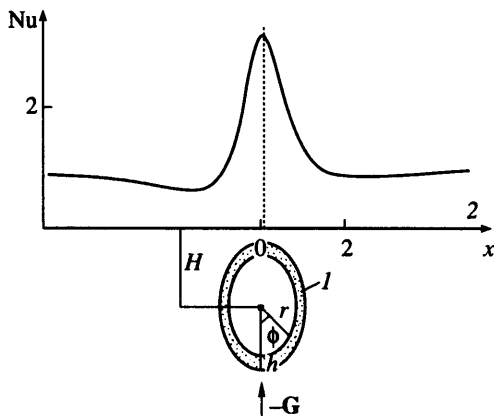
$$a_1 = \frac{a w^2}{a w^2 + (1 + a)^2}, \quad b_1 = \frac{a(1 + a) w}{a w^2 + (1 + a)^2}$$

3. Обсуждение результатов. Найденные формулы могут быть использованы при вычислении характеристик гидротермальной конвекции в разломных, трещиновато-пористых зонах земной коры.

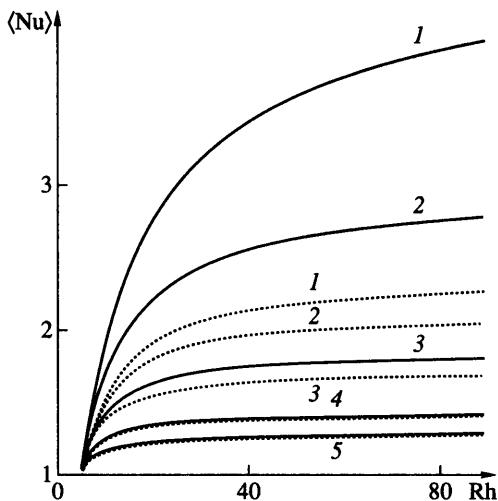
Существенное отличие данного решения от случая пористого горизонтального слоя состоит в том, что стационарная конвекция управляется не числом Рэлея, а его произведением на безразмерную толщину кольца.

Согласно фиг. 1 над восходящим потоком жидкости имеет место положительная аномалия, а по бокам над контуром депрессия теплового потока с минимумом над нисходящим потоком жидкости. Максимум теплового потока с ростом числа Рэлея R смещается к центру контура. В случае эллиптического контура картина качественно не меняется.

Для эллиптического контура коэффициенты в решении (2.4) найдены с использованием метода Гаусса и метода итераций относительно w . Анализ решения показал, что среднее число Нуссельта над контуром имеет максимум по аспектному отношению, т.е. по a -отношению длин осей эллипса. Из фиг. 2 следует, что при $Rh = 100$ с ростом глубины залегания контура в пределах (1.1–2.5) среднее число Нуссельта на поверхности убывает в пределах (4–1.2).



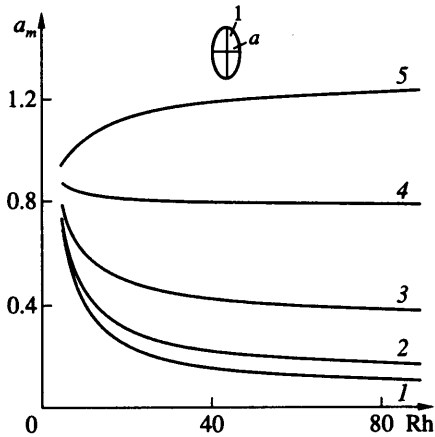
Фиг. 1. Модель задачи: 1 – конвективный контур; 2 – поверхность Земли; G – термический градиент. Распределение числа Нуссельта $Nu(x)$ на поверхности Земли при $Rh = 100$ и $H = 1, 2$



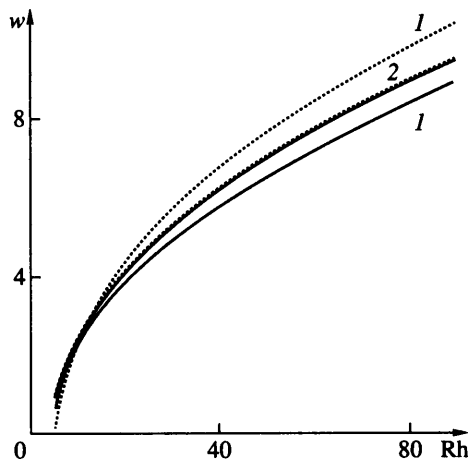
Фиг. 2. Зависимость максимума (по аспектному отношению a) среднего числа Нуссельта $\langle Nu \rangle$ от Rh над эллиптическим контуром (сплошные линии) и круговым (штриховые) при $H = 1.1, 1.2, 1.5, 2, 2.5$ (линии 1–5)

Характер зависимости аспектного отношения a_m , доставляющего максимум среднему числу Нуссельта, от числа Рэлея зависит от глубины расположения контура H (фиг. 3). Для небольших H с ростом Rh a_m убывает, а для больших глубин примерно при $H > 2$ растет. При фиксированном значении Rh с ростом глубины a_m растет.

Расчеты показывают, что расход жидкости также имеет максимум по аспектному отношению, но соответствующие значения a_m для расхода жидкости и среднего числа Нуссельта не совпадают. При этом максимальный расход жидкости слабо отличается от расхода для кругового контура.



Фиг. 3. Зависимость аспектного отношения, обеспечивающего максимум среднему числу Нуссельта, от Rh для $H = 1.1, 1.2, 1.5, 2, 2.5$ (кривые 1–5)



Фиг. 4. Зависимость расхода жидкости в контуре w от Rh для эллипсов с экстремальным a (сплошные линии) и окружностей (штриховые) при $H = 1.1, 2$

Скорость циркуляции для кругового контура больше, чем для эллиптического (фиг. 4). С этим связано то, что на указанной фигуре для кругового контура расход жидкости падает с глубиной расположения контура, стремясь к предельному распределению, а для эллиптического (с указанным аспектным отношением) растет.

Имеет место также максимум по a числа Нуссельта в точке $x = 0$, т.е. над центром контура. При этом соответствующее значение a_m также не совпадает с критическими значениями для среднего числа Нуссельта и расхода жидкости. С ростом глубины залегания влияние формы контура уменьшается (фиг. 2).

Приведем оценку скорости циркуляции жидкости для характерных параметров в разломных зонах. Рассмотрим данные из работы [13], где приводятся расчеты трех-

мерной задачи для одиночного разлома высотой H_0 , включенного в непроницаемый для жидкости теплопроводный куб

$$H_0 = 500 \text{ м}; \quad h_0 = \frac{1}{8}H_0 = 62.5 \text{ м}; \quad G = 30^\circ \frac{\text{С}}{\text{км}}, \quad \nu = 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \quad (3.1)$$

$$\beta = 3 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{К}}; \quad \rho C_p = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}} \quad \lambda = 2.5 \frac{\text{Вт}}{\text{МК}}, \quad k = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$$

Из (1.15) для развитой конвекции ($R \gg R_C$) имеем $u \approx \sqrt{R/h}$ ($h = h_0/r_0$, $r_0 = H_0/2$). Если в качестве масштаба длины взять диаметр кольца d , а не радиус, то в размерном виде получим

$$u \approx \frac{\lambda}{\rho C_p d} \sqrt{\frac{R}{2h}} \quad (3.2)$$

Из данных (3.1), для которых $R = 180$, согласно (3.2) получим $u \approx 1$ см/год. Рассмотренная модель может служить моделью двух гидродинамически связанных разломов. В работе [13] для тех же параметров в случае одного разлома численно найдено $u = 0.6$ см/год. Таким образом получаем правильный порядок величины.

Если неравенство (1.8) не выполняется, полученное решение несправедливо и для оценок можно использовать выражения (1.9).

Заключение. Рассмотрена задача о стационарной конвекции жидкости в вертикальном, тонком пористом кольце, расположенном в теплопроводной полуплоскости с заданным на бесконечности термическим градиентом. Выведены условия, при которых кольцо можно рассматривать как контур и применимо гидравлическое приближение.

Конвекция жидкости в кольце управляется не числом Рэлея, а произведением числа Рэлея на безразмерную толщину кольца. Над восходящим потоком жидкости наблюдается положительная аномалия, а по бокам контура – депрессия теплового потока с минимумом над нисходящим потоком жидкости. При заданном числе Рэлея и глубине расположения эллиптического контура существует аспектное отношение a_m , доставляющее максимум среднему числу Нуссельта над контуром. С ростом числа Рэлея a_m может расти или убывать в зависимости от глубины. Сравнительные оценки показали, что полученные результаты могут быть использованы при расчетах характеристик гидротермальной конвекции в земной коре.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 03-01-00889).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Робиллард Л., Вассер Р., Нгуен Т.Н. Свободная конвекция в двумерном пористом контуре // Теплопередача. 1986. № 2. С. 24–30.
2. Магомедбеков Х.Г., Рамазанов М.М. Линейный анализ конвективной неустойчивости жидкости в горизонтальной кольцевой полости, заполненной пористой средой // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 19–25.
3. Магомедбеков Х.Г., Рамазанов М.М. Гидротермальная конвекция в тонком пористом кольце // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 4–8.
4. Herzen R.P. von., Green K.E., Williams D. Hydrothermal circulation at the Galapagos spreading centre // Geol. Soc. Amer. Abstr. Programs. 1977. V. 9. № 7. P. 1212, 1213.
5. Каракин А.В., Лобковский Л.И., Мясников В.П. Гидротермальная конвекция в верхних слоях коры и ее влияние на геотермический градиент // Теоретические и экспериментальные исследования по геотермике морей и океанов. М.: Наука, 1984. С. 9–17.
6. Лопатников С.Л. Тепловая конвекция и образование месторождений нефти // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 4. С. 541–543.

7. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
8. Korn J.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. N. y. etc.: Mc-Jraw-Hill, 1968.
9. Рамазанов М.М. О тепловой аномалии, обусловленной конвекцией жидкости в разломных и трещиновато-пористых областях земной коры // Физика Земли. 2003. № 8. С. 55–60.
10. Рамазанов М.М. Конвекция жидкости в тонком пористом кольце эллиптической формы при наклонном подогреве // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 6. С. 134–141.
11. Гетлинг А.В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея – Бенара // Успехи физических наук. 1991. Т. 161. № 1. С. 1–80.
12. Седов Л.И. Механика сплошных сред. М.: Наука, 1983. Т. 1. 528 с.; 1984. Т. 2. 560 с.
13. Бобров А.М., Лопатников С.Л. Развитие гидротермальной конвекции в вертикальной проницаемой зоне, заключенной в трехмерный непроницаемый теплопроводный массив // Физика Земли. 2001. № 3. С. 63–70.

Каспийск

Поступила в редакцию
20. IV. 2004