

УДК 532.526.3:533.6.01:534.2

© 2005 г. Е. П. СТОЛЯРОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Проведен анализ малых нестационарных возмущений в вязкой теплопроводной сжимаемой среде на основе линеаризации полной системы уравнений гидродинамики при малых числах Кнудсена ($Kn \ll 1$). Показано, что возмущения плотности и температуры (упругие возмущения) удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению, являющемуся асимптотическим пределом уравнений гидродинамики вдали от областей неоднородности среды (жестких, упругих или жидких границ) при $M_a = v/a \rightarrow 0$, где v – возмущенная скорость, a – адиабатическая скорость звука. Решения нового уравнения удовлетворяют первому и второму началам термодинамики и справедливы вплоть до частот, определяемых границами применимости модели сплошной среды. Получены фундаментальные решения уравнения и проанализированы их особенности. Сформулированы граничные условия и решена задача о взаимодействии упругой сферической гармонической волны с плоской бесконечной поверхностью. Обсуждены существенные физические эффекты, не описываемые в рамках уравнений идеальной жидкости.

Ключевые слова: вязкость, теплопроводность, сжимаемая жидкость, упругие волны, дисперсионное соотношение, диффузия, диссипация, неравновесность, индуцированное излучение, асимптотические разложения.

Любое движение сжимаемой сплошной среды за исключением тривиального – движения как твердого тела с постоянной по величине и направлению скоростью или вращение с постоянной угловой скоростью, сопровождается нарушением ее равновесного состояния. Гидродинамическое описание процессов в системах, не очень далеких от равновесия, основывается на законах сохранения массы, импульса и энергии с векторами потоков, линейно зависящих от пространственных производных гидродинамических функций течения: плотности, скорости и температуры.

Законы переноса получены из решения кинетического уравнения Больцмана методом Чепмена-Энскога [1, 2] в первом приближении по числу Кнудсена $Kn = l_m/L \ll 1$, где l_m – средняя длина свободного пробега молекул, L – характерный масштаб, на котором гидродинамические функции течения изменяются на свою характерную величину. Это ограничение является основным при описании слабо неравновесных гидродинамических процессов. В частности, для совершенного газа с уравнением состояния $p = \rho RT$ при нормальных условиях величина l_m составляет около $2 \cdot 10^{-7}$ м, а среднее время свободного пробега, близкое к времени установления равновесия, $\tau_m \approx 5 \times 10^{-10}$ с. Это ограничивает диапазон частот упругих колебаний сверху величиной около 20 МГц, а характерные масштабы снизу – величиной $L \approx 10^{-4}$ м. При больших частотах и на меньших масштабах необходимо использовать уравнения гидродинамики быстрых процессов, учитывающих зависимость коэффициентов переноса от времени [3]. Акустические (звуковые) колебания составляют лишь небольшую часть диапазона упругих колебаний сплошной среды (от 20 Гц до 20 кГц). Среднеквадратические амплитуды пульсационной составляющей давления, например, в обычных промышленных аэродинамических установках достигают 2–4 % от среднего статического давления. Соответствующая амплитуда пульсаций скорости, отнесенная к скорости звука (акустическое

число Маха M_a), при нормальных условиях может составлять 10^{-4} . Так как скорость на жесткой стенке в вязкой жидкости обращается в нуль, то в пристеночном слое всегда существует область, в которой пульсационная компонента скорости будет того же порядка, что и средняя гидродинамическая скорость. Следовательно, на пульсационное движение вблизи стенки и особенно вблизи критических точек эта область может оказывать решающее влияние.

В данной работе рассматриваются особенности распространения малых нестационарных возмущений в неподвижной сжимаемой среде, обусловленные наличием вязкости и теплопроводности. Эффекты, возникающие при наличии в среде неподвижных границ, иллюстрируются на примере решения задачи взаимодействия упругой сферической волны, излучаемой точечным периодическим источником, с жесткой бесконечной плоскостью.

1. Одно из простейших нестационарных движений – малые колебания тела конечных размеров, движущегося с постоянной по величине и направлению средней скоростью V_0 в однородной неподвижной среде. На больших расстояниях от обтекаемого тела всегда найдется такая область, где гидродинамические возмущения, убывающие как r^{-2} , становятся достаточно малыми по сравнению с упругими нестационарными возмущениями, амплитуды которых убывают обратно пропорционально расстоянию от тела r^{-1} . Уравнения распространения малых нестационарных возмущений в таком потоке выглядят наиболее просто и по существу совпадают с рассмотренными в [4]. Характерный линейный масштаб волнового движения – длина волны λ , а времени – λ/a_0 . Элементарные оценки показывают, что нелинейные по возмущениям члены уравнений гидродинамики имеют порядок акустического числа Маха $M_a = v/a_0$ относительно главных линейных, а главные вязкие члены порядка Re_a^{-1} , где число Рейнольдса подсчитано по длине волны и скорости звука. Поэтому нелинейными членами в уравнениях можно пренебречь, сохраняя главные вязкие, если

$$Re_a \cdot M_a \sim \frac{\lambda v}{\nu} \ll 1, \quad \text{или} \quad \lambda \ll \frac{\nu}{v}$$

При нормальных условиях и уровнях звука около 160 дБ эта оценка дает для длины волны $\lambda \ll 0.3$ м, а для частоты – $f \gg 1$ кГц. Таким образом, линеаризованные уравнения нестационарного движения в вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости можно рассматривать как асимптотические при $M_a \rightarrow 0$. Для однокомпонентного совершенного газа (при отсутствии химических реакций и фазовых превращений), пренебрегая зависимостью коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры, уравнения движения сплошной среды можно записать так

$$\frac{dv}{dt} + \frac{a^2 \nabla p}{\gamma p} = v_1 \nabla(\nabla \cdot v) - v \nabla \times \nabla \times v \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot v = 0$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -(\gamma - 1) \nabla \cdot v + \gamma v_2 \frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{a^2} \Phi$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla, \quad v = \frac{\eta}{\rho}, \quad v_1 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right), \quad v_2 = \frac{\chi}{\rho c_p} = \frac{\nu}{Pr}$$

Здесь Φ – диссипативная функция (см., например, [6]), χ – коэффициент теплопроводности, η – коэффициент сдвиговой вязкости, ζ – объемный (второй) коэффици-

ент вязкости, связанный с неравновесными процессами в упругой волне. Необходимость его введения для процессов с большим временем релаксации была обоснована Л.И. Мандельштамом и М.А. Леонтовичем [5] и подробно обсуждается в [6]. По оценкам Лайтхилла, второй коэффициент вязкости для азота N_2 равен 0.8η и обусловлен увеличенным временем установления равновесия в двухатомном газе по сравнению с одноатомным вследствие наличия вращательных степеней свободы у двухатомных молекул (см. [2, с. 305]).

Введем новые переменные, относя давление, плотность и температуру к их характерным постоянным значениям

$$\pi = \ln \frac{p}{p_0}, \quad \sigma = \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tau = \ln \frac{T}{T_0}, \quad \nabla \pi = \nabla \sigma + \nabla \tau$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{v}_p = -\nabla \varphi, \quad q = \nabla \cdot \mathbf{v} = -\Delta \varphi, \quad \boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{v}_s$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla, \quad a_0^2 = \gamma R T_0$$

Линеаризованные уравнения возмущенного движения в новых переменных запишем в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + \mathbf{v} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -q = \Delta \varphi$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \nu_1 \Delta \right) \frac{d\sigma}{dt} = \frac{a_0^2}{\gamma} (\Delta \sigma + \Delta \tau) \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \gamma \nu_2 \Delta \right) \tau = (\gamma - 1) \frac{d\sigma}{dt} \quad (1.4)$$

Уравнение для вихревой компоненты скорости отделяется и определяется возмущениями других гидродинамических функций течения через граничные условия, следующие из уравнения (1.1). Исключая переменную τ из (1.3) и (1.4), получим уравнение, описывающее распространение малых возмущений плотности σ в потоке с постоянными в среднем гидродинамическими параметрами

$$\left(\frac{d}{dt} - \gamma \nu_2 \Delta \right) \left[\frac{\gamma}{a_0^2} \left(\frac{d}{dt} - \nu_1 \Delta \right) \frac{d}{dt} - \Delta \right] \sigma = (\gamma - 1) \Delta \frac{d\sigma}{dt}$$

Этому же уравнению четвертого порядка по пространственным переменным и второго по времени удовлетворяют возмущения температуры τ . Малый коэффициент при старшей производной указывает на возможное существование областей с сингулярными возмущениями, где пространственные производные особенно велики (пограничные слои, окрестности острых кромок, и т.д.). Первый оператор в левой части уравнения – оператор теплопроводности, второй (в квадратных скобках) представляет собой волновой оператор с диссипативным членом, зависящим от сдвиговой и объемной вязкостей.

Если пренебречь вязкостью и теплопроводностью, то получим уравнение распространения возмущений в постоянном потоке идеальной жидкости

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{a_0^2} \frac{d^2}{dt^2} - \gamma \Delta \right) \sigma = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{a_0^2} \frac{d^2}{dt^2} - \Delta \right) \sigma = F(x - V_0 t, y, z)$$

Несмотря на наличие волнового оператора, это уравнение не волновое. Оно описывает возмущения плотности, которые “плывут” вместе с потоком с постоянной скоростью, а в неподвижной среде при отсутствии сил тяжести – стационарны и удовлетворяют уравнению Пуассона. В действительности этот кажущийся парадокс объясняется тем, что возмущения плотности и температуры распадаются каждая на две моды: одна из них распространяется со скоростью звука, а другая – сносится потоком с его конвективной скоростью.

Рассмотрим особенности простейших решений в свободном пространстве в неподвижной однородной среде. Уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma v_2 \Delta\right) \left[\frac{\gamma}{a_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - v_1 \Delta\right) \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] \sigma - (\gamma - 1) \Delta \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

имеет частные установившиеся решения – сферические волны вида

$$\sigma = A \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{r} \quad (1.6)$$

где A – комплексная амплитуда, ω – частота, \mathbf{k} – волновой вектор, модуль которого удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$v_2 k^4 (1 - i\gamma \varepsilon_1) - \omega k^2 (i + \varepsilon_1 + \gamma \varepsilon_2) + i \frac{\omega^3}{a_0^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{v_1 \omega}{a_0^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{v_2 \omega}{a_0^2}$$

Уравнение (1.7) в несколько других обозначениях было получено Кирхгофом в 1868 г. Оно имеет две пары комплексно-сопряженных корней

$$k_{1,2} = \pm \frac{\omega}{a_0 \sqrt{1 - i\gamma \varepsilon_1}} + O(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1 \varepsilon_2) \quad (1.8)$$

$$k_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{v_2} [i - (\gamma - 1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]} + O(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1 \varepsilon_2) \quad (1.9)$$

Для числа Прандтля $\text{Pr} = 3/4$, $\zeta = 0.8$ и $\gamma = 1.4$

$$k_{1,2} \approx \pm \frac{\omega}{a_0} \sqrt{1 + i \frac{\gamma \omega}{\rho_0 a_0^2} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta\right)} = \pm \frac{\omega}{a_0} \sqrt{1 + i \frac{18.8}{\text{Re}_a}}$$

$$k_{3,4} \approx \pm \sqrt{\frac{\omega \rho_0 \text{Pr}}{\eta} \left[i - \omega \frac{\gamma - 1}{\rho_0 a_0^2} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta - \frac{\eta}{\text{Pr}}\right) \right]} = \pm \sqrt{\frac{3\omega}{4v} \left(i - \frac{2}{\text{Re}_a}\right)}$$

Здесь число Рейнольдса Re_a подсчитано по коэффициенту сдвиговой вязкости η , длине волны, плотности и адиабатической скорости звука в невозмущенной среде.

Первая пара комплексных корней $k_{1,2}$ (1.8) характеризует распространяющиеся с практически адиабатической скоростью звука моды плотности и температуры (уп-

ругие затухающие волны). Коэффициент затухания, связанный с диффузионными процессами в волне, определяется мнимой частью волнового числа и равен

$$\alpha \approx \frac{\gamma \omega^2}{2\rho_0 a_0^3} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right)$$

а потери механической энергии в единицу времени $\langle dE_m/dt \rangle \approx 2\alpha a_0 \langle E \rangle$. Приближенно оценить потери механической энергии в волне вследствие вязкой диссипации, которая в линеаризованных уравнениях отсутствует, можно путем вычисления диссипируемой в единице объема в единицу времени механической энергии, как это сделано для плоской звуковой волны (см. [6]). С точностью до величин более высокого порядка малости получим ту же оценку

$$\frac{\langle dE_m/dt \rangle}{a_0 \langle E \rangle} \approx \frac{\omega^2}{\rho_0 a_0^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \zeta + \frac{(\gamma - 1)\chi}{c_p} \right]$$

Таким образом, общая потеря механической энергии в упругой волне оказывается примерно вдвое больше, чем в волне без учета затухания. Часть этой энергии преобразуется в энергию упругих колебаний: если сохранить нелинейный член с вязкой диссипацией в уравнении (1.4), то в правую часть уравнения (1.5) следует добавить нелинейное слагаемое

$$Q = \Delta \Phi'$$

$$\Phi' = \gamma \left[v_2 (\nabla \tau)^2 + (\gamma - 1) \frac{v_1}{a_0^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 \right]$$

Вторая пара корней $k_{3,4}$ (1.9) относится к возмущениям плотности и температуры, которые остаются в среде в форме неравновесного энтропийного следа после прохождения упругой волны. Причина этого явления известна [2, 6] и просто объяснима, если рассмотреть волну в форме волнового пакета [7]. До прихода фронта волны возмущений в среде не возникает. Звуковая волна нарушает термодинамическое равновесие в однородной среде, вызывая быстрые изменения температуры и плотности разных знаков на длине волны. Переход к равновесному состоянию с увеличением энтропии за счет вязкости и теплопроводности начинается внутри волны, но не успевает завершиться за время ее прохождения. После ухода волны в жидкости остается энтропийный след в виде распределенных в среде неоднородностей плотности и температуры, вследствие чего равновесное состояние среды оказывается нарушенным, и процесс его восстановления продолжается бесконечно долго) процесс нарушения и восстановления равновесия протекает непрерывно. Второе слагаемое под корнем в выражении (1.9) характеризует вторичное излучение из следа.

Важное следствие из полученного решения состоит в том, что в рамках уравнений сплошной среды не возникает парадокса бесконечной скорости распространения возмущений, который обсуждался в [3] в связи с рассмотрением быстрых процессов с частотами порядка a_0/l_m .

Используя выражения для комплексных корней (1.8) и (1.9), можно записать уравнения распространения малых возмущений в ином виде, эквивалентном исходному уравнению с точностью до квадратичных по ϵ членов. Примеры такого рода можно найти в монографии [7]. Уравнение, описывающее скорость и давление в упругой волне, отличается от классического акустического наличием диссипативного слагаемого со старшей производной

$$\left(1 + \frac{\eta v_1}{a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \sigma - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) формально совпадает с уравнением, полученным Стоксом (см. [8, с. 308]), и отличается лишь увеличенным коэффициентом, связанным с затуханием. Возмущения температуры и плотности распадаются на две компоненты, одна из которых (волновая) описывается вышеприведенным уравнением, а вторая – диффузионным уравнением, которое можно записать в виде

$$v_2 \Delta \tau_d - \frac{\partial}{\partial t} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{a_0^2} (v_1 - v_2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \tau_d = 0 \quad (1.11)$$

От классического уравнения теплопроводности уравнение (1.11) отличается наличием члена со второй производной по времени с малым коэффициентом, пропорциональным объемной вязкости. Это уравнение принадлежит к эллиптическому типу. Интересно отметить, что без учета объемной вязкости при числе $Pt = 3/4$ оно переходит в классическое уравнение теплопроводности, а вообще без учета вязкости ($v_1 = 0$) – в волновое (телеграфное) уравнение гиперболического типа, к которому приводят уравнения гидродинамики быстрых процессов [3].

Общее решение уравнения (1.5) для периодических возмущений можно выписать, следуя Рэлею [8]. Предположим, что гидродинамические функции течения пропорциональны e^{int} . Общее решение для температуры запишем в виде

$$\tau = A_1 q_1 + A_2 q_2 \quad (1.12)$$

где функции q_1 и q_2 являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \Delta q_1 &= \lambda_1^2 q_1, \quad \lambda_1^2 = \frac{n^2}{a_0^2} \left[1 - \frac{n}{a_0^2} (v_1 + \gamma v_2) \right] \\ \Delta q_2 &= \lambda_2^2 q_2, \quad \lambda_2^2 = \frac{n}{v_2} \left[1 - \frac{n}{a_0^2} (\gamma - 1) (v_1 - v_2) \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Вектор возмущенной скорости определяется соотношением

$$\mathbf{v} = B_1 \nabla q_1 + B_2 \nabla q_2 + A_3 \mathbf{q} \quad (1.14)$$

где вектор \mathbf{q} является решением уравнений (с постоянными B_1 и B_2)

$$\Delta \mathbf{q} = \lambda_3^2 \mathbf{q}, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad \lambda_3^2 = \frac{n}{v} \quad (1.15)$$

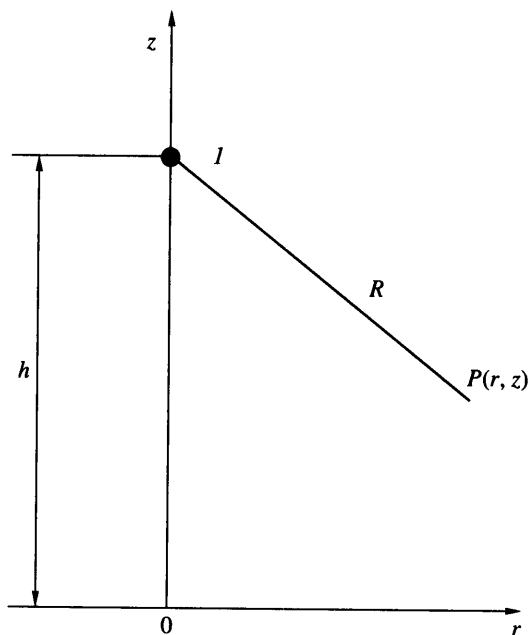
$$B_1 = A_1 \left(v - \frac{n}{\lambda_1^2} \right), \quad B_2 = A_2 \left(v - \frac{n}{\lambda_2^2} \right)$$

Возмущения плотности определяются через возмущения температуры выражением (C_1, C_2 – постоянные)

$$\sigma = C_1 q_1 + C_2 q_2 \quad (1.16)$$

$$C_1 = A_1 \frac{n - \gamma v_2 \lambda_1^2}{n(\gamma - 1)}, \quad C_2 = A_2 \frac{n - \gamma v_2 \lambda_2^2}{n(\gamma - 1)}$$

Эти результаты применялись Кирхгофом и Рэлеем к задачам распространения плоских волн в каналах. Они могут быть использованы при решении других аналогичных задач.



Точечный источник I над абсолютно жесткой плоскостью

В заключение отметим, что упругие волны описывают асимптотическое нестационарное гидродинамическое поле вдали от источника. Поэтому асимптотическое решение может быть получено только с точностью до некоторых констант, которые могут быть найдены из условий срачивания с решением вблизи источника. Для построения глобального решения необходимо построение локального решения вблизи источника и использование метода срачиваемых асимптотических разложений [9] или других асимптотических методов [10].

2. В качестве примера приведем решение задачи о падении сферической волны на жесткую безграничную стенку. Взаимодействие плоской волны с абсолютно жесткой абсолютно теплопроводной стенкой подробно рассмотрено в [11]. Из анализа решения следует, что при углах падения θ , близких к 90° , должно наблюдаться аномально большое (до 60%) поглощение звуковых волн. В [12], где рассмотрена задача о звуковом поле точечного источника вблизи жесткой границы без учета теплопроводности и второго коэффициента вязкости при использовании коэффициента отражения для плоских волн, взятого из [11], отмеченный эффект аномально высокого поглощения объясняется существованием цилиндрической (неоднородной) волны, распространяющейся вдоль плоскости, как в волноводе, и уносящей часть энергии, излучаемой источником. В данной работе рассмотрена полная задача о полях температуры, плотности и скорости вблизи жесткой поверхности без использования упрощений, принятых в [12], и дается несколько иная трактовка возникающих эффектов.

Рассмотрим установившееся (т.е. длящееся бесконечно долго) поле колеблющегося с частотой ω сферически симметричного источника (монополя), расположенного в однородной неподвижной среде на расстоянии h от плоскости. Используем цилиндрическую систему координат с осью симметрии, перпендикулярной плоскости и проходящей через центр источника (см. фигуру). Предположим, что расстояние h много больше характерного размера источника L , $h \gg L$, а отражение от плоскости не оказывает обратного влияния на источник. Линейные размеры отнесем к харак-

терному масштабу h , скорости – к скорости звука a_0 , а амплитуды – к амплитуде q_0 падающей волне. Температура в сферической волне описывается функцией

$$q_0 = \frac{\exp\{\lambda_1 R_0 - ikt\}}{R_0} \tag{2.1}$$

а в отраженной от плоскости

$$A_1 q_1 = A_1 \frac{\exp\{\lambda_1 R_1 - ikt\}}{R_1} \tag{2.2}$$

$$R_0 = \sqrt{r^2 + (z-1)^2}, \quad R_1 = \sqrt{r^2 + (z+1)^2}, \quad \lambda_1 = ik\sqrt{1 + ik(\epsilon_1 + \gamma\epsilon_2)}$$

$$\epsilon_1 = \frac{v_1}{a_0 h}, \quad \epsilon_2 = \frac{v_2}{a_0 h}, \quad k = \frac{\omega h}{a_0}$$

Здесь A_1 – комплексный коэффициент отражения. Вследствие симметрии задачи поле возмущенной скорости содержит две компоненты: тангенциальную u , параллельную плоскости и нормальную к плоскости v . На жесткой стенке потребуем выполнения условий прилипания и отсутствия теплообмена, а на бесконечности – ограниченности решения. Таким образом, граничные условия в случае теплоизолированной стенки запишутся в виде

$$z = 0, \quad u = v = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

$$R \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0$$

Для абсолютно теплопроводной стенки изменится лишь граничное условие для температуры на поверхности

$$z = 0, \quad u = v = 0, \quad \tau = 0$$

При установившемся излучении источника сформулированная задача может быть сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом преобразования Ханкеля. Для этого введем преобразования искомых функций

$$Q_i = \int_0^\infty r J_0(\xi r) q_i dr, \quad T = \int_0^\infty r J_0(\xi r) \tau dr, \quad R = \int_0^\infty r J_0(\xi r) \sigma dr$$

$$U = \int_0^\infty r J_1(\xi r) u dr, \quad V = \int_0^\infty r J_0(\xi r) v dr$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно. Умножая соотношения (1.12)–(1.16) на $J_0(\xi r)$ и интегрируя в пределах от нуля до бесконечности, получим с использованием известных соотношений для функций Бесселя [13] и разложений функций (2.1), (2.2) по цилиндрическим волнам [7]

$$\frac{d^2 Q_i}{dz^2} = \alpha_i Q_i, \quad \alpha_i = \sqrt{\xi^2 + \lambda_i^2}, \quad \lambda_1^2 = -k^2 [1 + ik(\epsilon_1 + \gamma\epsilon_2)] \tag{2.3}$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{ik}{\epsilon_2} [1 + ik(\gamma - 1)(\epsilon_1 - \epsilon_2)], \quad \lambda_3^2 = -\frac{ik}{\epsilon}, \quad \epsilon = \frac{v}{a_0 h}$$

$$Q_0 = \frac{\exp\{\alpha_1|z-1|\}}{\alpha_1}, \quad Q_1 = \frac{\exp\{-\alpha_1(z+1)\}}{\alpha_1}, \quad Q_2 = \exp(\alpha_2 z), \quad Q_3 = \exp(\alpha_3 z)$$

$$T = Q_0 + A_1 Q_1 + A_2 Q_2$$

$$U = -b_1 \xi Q_0 - A_1 b_1 \xi Q_1 - A_2 b_2 \xi Q_2 - A_3 \frac{\alpha_3}{\xi} Q_3$$

$$V = \alpha_1 b_1 Q_0 - A_1 \alpha_1 b_1 Q_1 + A_2 \alpha_2 b_2 Q_2 + A_3 Q_3$$

$$R = c_1 Q_0 + A_1 c_1 Q_1 + A_2 c_2 Q_2$$

$$b_1 = \varepsilon + \frac{ik}{\lambda_1^2}, \quad b_2 = \varepsilon + \frac{ik}{\lambda_2^2}, \quad c_1 = \frac{k - i\gamma\varepsilon_2 \lambda_1^2}{k(\gamma - 1)}, \quad c_2 = \frac{k - i\gamma\varepsilon_2 \lambda_2^2}{k(\gamma - 1)}$$

Используя граничные условия, получим выражения для коэффициентов A_i . В случае теплоизолированной стенки ($dT_w/dz = 0$)

$$A_1 = \frac{1}{D} \left[\alpha_1 \alpha_3 \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right) - \xi^2 \left(1 - \frac{\alpha_1 b_2}{\alpha_2 b_1} \right) \right], \quad A_2 = -\frac{2}{\alpha_2 D} \exp\{-\alpha_1\}$$

$$A_3 = -\frac{2b_1 \xi^2 \exp(-\alpha_1)}{D} \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right), \quad D = \alpha_1 \alpha_3 \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right) + \xi^2 \left(1 + \frac{\alpha_1 b_2}{\alpha_2 b_1} \right)$$

Для абсолютно теплопроводной стенки ($T_w = 0$) изменяются A_1, A_2, D

$$A_1 = \frac{1}{D} \left[\alpha_3 \left(\alpha_1 - \alpha_2 \frac{b_2}{b_1} \right) - \xi^2 \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right) \right], \quad A_2 = -\frac{2\alpha_3}{D} \exp\{-\alpha_1\}$$

$$D = \alpha_3 \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{b_2}{b_1} \right) + \xi^2 \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right)$$

В главном приближении по ε_i выражения для трансформант Ханкеля искомых функций

$$T = \frac{\exp\{-\alpha_1|z-1|\}}{\alpha_1} + A_1 \frac{\exp\{-\alpha_1(z+1)\}}{\alpha_1} + A_2 \exp\{\alpha_2 z\}$$

$$U = \frac{i\xi \exp\{-\alpha_1|z-1|\}}{k\alpha_1} + A_1 \frac{i\xi \exp\{-\alpha_1(z+1)\}}{k\alpha_1} - A_3 \frac{\alpha_3 \exp\{\alpha_3 z\}}{\xi}$$

$$V = -\frac{i \exp\{-\alpha_1|z-1|\}}{k} + A_1 \frac{i \exp\{-\alpha_1(z+1)\}}{k} + A_3 \exp\{\alpha_3 z\}$$

$$R = \frac{\exp\{-\alpha_1|z-1|\}}{\alpha_1(\gamma-1)} + A_1 \frac{\exp\{-\alpha_1(z+1)\}}{\alpha_1(\gamma-1)} - A_2 \exp\{\alpha_2 z\}$$

где постоянные в случае теплоизолированной стенки ($dT/dz = 0$)

$$A_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_3 - \xi^2}{D}, \quad A_2 = -\frac{2\xi^2}{\alpha_2 D} \exp\{-\alpha_1\}, \quad A_3 = \frac{2i\xi^2}{kD} \exp\{-\alpha_1\}, \quad D = \alpha_1 \alpha_3 + \xi^2$$

При абсолютно теплопроводной стенке ($T_w = 0$), другое только A_2

$$A_2 = -\frac{2\alpha_3}{D} \exp\{-\alpha_1\}$$

Поля температуры, плотности и скорости определяются обратным преобразованием Ханкеля в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned} \tau(r, z; k) &= \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) T(z; k, \xi) d\xi, & \sigma(r, z; k) &= \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) R(z; k, \xi) d\xi \\ u(r, z; k) &= \int_0^\infty \xi J_1(\xi r) U(z; k, \xi) d\xi, & v(r, z; k) &= \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) V(z; k, \xi) d\xi \end{aligned}$$

Отраженное поле температуры вдали от стенки выражается интегралом

$$\tau_1 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 + \lambda_1^2} \sqrt{\epsilon \xi^2 - ik} - \sqrt{\epsilon \xi^2}}{\sqrt{\xi^2 + \lambda_1^2} \sqrt{\epsilon \xi^2 - ik} + \sqrt{\epsilon \xi^2}} \exp\left\{-(z+1)\sqrt{\xi^2 + \lambda_1^2}\right\} \xi J_0(\xi r) d\xi \quad (2.4)$$

а поле плотности отличается от (2.4) в том же приближении лишь множителем $(\gamma - 1)^{-1}$. Для индуцированного поля завихренности из решения следует выражение

$$\psi = (\nabla \times \mathbf{v})_\varphi = -\frac{2}{\sqrt{\epsilon}} \int_0^\infty \frac{\xi^2 J_1(\xi r) \exp\left\{-\sqrt{\xi^2 + \lambda_1^2}\right\}}{\sqrt{\xi^2 + \lambda_1^2} \sqrt{\epsilon \xi^2 - ik} + \sqrt{\epsilon \xi^2}} \exp\left\{\frac{z}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\epsilon \xi^2 - ik}\right\} d\xi \quad (2.5)$$

а для градиента плотности по нормали к стенке

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = \frac{2\gamma\sqrt{\epsilon}}{\gamma-1} \int_0^\infty \frac{\xi^3 J_0(\xi r) \exp\left\{-\sqrt{\xi^2 + \lambda_1^2}\right\}}{\sqrt{\xi^2 + \lambda_1^2} \sqrt{\epsilon \xi^2 - ik} + \sqrt{\epsilon \xi^2}} d\xi \quad (2.6)$$

где $\epsilon = \eta/\rho_0 a_0 h$ – малый параметр, а величина λ_1^2 определена в (2.3).

Интегральные выражения (2.4)–(2.6) весьма сложны для нахождения простого аналитического решения, подынтегральные функции содержат полюса и точки ветвления. Подобная проблема возникает, в частности, в задаче о распространении электромагнитных волн над поверхностью Земли [7]. В принципе для любых фиксированных r, z и k решение может быть получено численным интегрированием, так как все особенности лежат вне действительной оси, а интегралы существуют и сходятся. Ограничимся лишь некоторыми качественными выводами, которые можно сделать, исходя из вида полученных решений без проведения вычислений.

Как следует из выражения (2.5), решение для завихренности – особое: оно стремится к бесконечности при $\epsilon \rightarrow 0$, однако остается конечным при любых $\epsilon > 0$ и экспоненциально убывает при удалении от стенки. Это не что иное, как поперечные сдвиговые волны, хорошо известные из курсов гидродинамики и возникающие вследствие граничного условия прилипания. Возбуждаемая завихренность вызывает появление ненулевой производной от плотности по нормали к стенке (2.6) и связанное с этим вто-

ричное индуцированное дипольное излучение. Изменение температуры и плотности определяется комплексным коэффициентом отражения (множитель перед экспонентой в интеграле (2.4)), который заметно отличается от принятого в [12]. Можно ожидать, что наличие теплообмена на стенке ($q_w \neq 0$) или ее упругость ($v_w \neq 0$) окажут заметное влияние на отражательную способность и индуцированное излучение из пристеночной области.

Ввиду линейности задачи развитый метод может быть обобщен на случай произвольного распределения источников при стационарных граничных условиях. Если граничные условия нестационарны или излучение источника неустановившееся, то вместо метода преобразования Фурье необходимо использовать метод преобразования Лапласа.

Распространение возмущений в движущейся неоднородной среде существенно отличается от рассмотренного. Кроме эффектов, описываемых классической акустикой (интерференции, дифракции, резонансных явлений и др.), в вязкой теплопроводной жидкости возникают новые: возмущения плотности и температуры в энтропийном следе волны, которые переносятся с локальной скоростью течения; вторичное излучение упругих волн из области неоднородности течения при взаимодействии осредненного потока с возмущениями плотности и температуры; образование нестационарного вихревого слоя вблизи границ однородности, который не может не оказывать влияния на развитие движения в пограничном слое; влияние теплообмена на преобразование упорядоченного (волнового) движения в хаотическое (молекулярное). Обсуждение всех этих вопросов далеко выходит за ограниченные рамки журнальной статьи и может быть предметом специального рассмотрения.

Заключение. Приведен вывод линеаризованного уравнения, являющегося асимптотическим пределом исходных уравнений гидродинамики вязкой теплопроводной сжимаемой среды. Проанализированы его частные решения, описывающие распространение упругих волн и образование энтропийного следа за ними вдали от обтекаемых тел и других границ однородности. Определено аналитическое выражение для коэффициента затухания упругих волн в однородной неподвижной среде. Построено решение задачи о взаимодействии сферической гармонической волны с плоской бесконечной поверхностью. Получены интегральные выражения для полей температуры, плотности и скорости. Показано, что в тонком слое вблизи жесткой границы возникает индуцированное нестационарное вихревое поле, а на границе – ненулевой градиент давления по нормали к ней.

Полученные результаты могут найти применение при асимптотическом анализе нестационарных течений в пограничном слое обтекаемых тел, в поиске путей затягивания или предотвращения перехода ламинарного течения в турбулентное и в построении глобальных решений нестационарных задач методом сращиваемых асимптотических разложений.

Автор выражает признательность В.Я. Нейланду и участникам семинара “Механика жидкости, газа и плазмы” НИО–8 ЦАГИ (руководители – И.В. Егоров, М.Н. Коган, И.И. Липатов) за полезное обсуждение работы и рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
2. Clarke J.F., McChesney M. The Dynamics of Real Gases. L: Butterworths, 1964. = Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967. 566 с.
3. Хонькин А.Д. О парадоксе бесконечной скорости распространения возмущений в гидродинамике вязкой теплопроводной среды и уравнениях гидродинамики быстрых процессов // Аэромеханика. М.: Наука, 1976. С. 289–299.

4. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с.
5. *Леонтович М.А.* Замечания по теории поглощения звука в газах // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 6. С. 561–576.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
8. *Strutt J.W.* (Baron Rayleigh). The Theory of Sound. L.: MacMillan, 1926. *Стрэтт Дж. В.* (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М. Л.: ОГИЗ, 1944. 476 с.
9. *Нейланд В.Я., Сычев В.В.* Асимптотические решения уравнений Навье–Стокса в областях с большими локальными возмущениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 4. С. 43–49.
10. *Van Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. New York–L.: Acad. Press, 1964. = *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
11. *Константинов Б.П.* О поглощении звуковых волн при отражении от твердой границы // Ж. техн. физики. 1939. Т. 9. № 3. С. 226–238.
12. *Мурга В.А.* Звуковое поле точечного источника вблизи жесткой плоскости в вязкой сжимаемой жидкости // Акуст. ж. 1989. Т. 35. № 1. С. 97–100.
13. *Sneddon I.* Fourier Transforms. N.Y. etc.: McGraw–Hill, 1951. = *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.V.2004