

УДК 532.516

© 2005 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, С. А. КУМАКШЕВ

## БИФУРКАЦИЯ ОСНОВНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ДИФфуЗОРЕ

Исследована эволюция стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре. Для классической постановки задачи Джеффри–Гамеля дано полное решение в зависимости от определяющих параметров. Для фиксированного значения угла раствора определено поведение основного одномерного течения при изменении числа Рейнольдса. Найдены критические значения, приводящие к бифуркации картины и невозможности существования стационарного одномерного течения. Установлен механизм и построена диаграмма бифуркации (ранее неизвестные в научной литературе по исследованию задачи Джеффри – Гамеля). Приведена зависимость критического значения числа Рейнольдса, при котором происходит бифуркация, от угла раствора диффузора. Результаты могут представить интерес для гидромеханических, технических и геофизических приложений.

*Ключевые слова:* диффузор, вязкая жидкость, задача Джеффри – Гамеля, стационарное течение, бифуркация.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается классическая задача Джеффри – Гамеля в случае диффузорного течения [1–8]. Жидкость имеет плотность  $\rho$  и динамическую вязкость  $\mu$ ; ее плоское движение происходит в области  $\Omega = \{(r, \theta) : r > 0, |\theta| < \beta\}$ , где  $r, \theta$  – полярные координаты,  $\beta$  – угол полураствора ( $0 < \beta \leq \pi$ ). На стенках диффузора  $r > 0, \theta = \pm\beta$  выполняются условия прилипания, а при  $r = 0$  течение имеет особенность типа источник постоянной мощности  $Q < 0$ . Система допускает два безразмерных параметра: угол раствора  $2\beta$  и число Рейнольдса  $Re = \rho Q/\mu$  ( $Re < 0$ ). Известно, что собственных параметров задачи недостаточно для полного обезразмеривания уравнений движения [4, 5, 9, 10].

Имеется автомодельное решение, для которого поле скоростей радиально

$$v_r = -\frac{Q}{r}V(\theta), \quad v_\theta \equiv 0 \quad (1.1)$$

и автоматически удовлетворяет условию несжимаемости для произвольной гладкой функции  $V(\theta)$ . Компоненты тензора скоростей деформаций  $v$  и напряжений  $\sigma$  равны

$$\begin{aligned} v_{rr} = -v_{\theta\theta} &= \frac{Q}{r^2}V(\theta), & v_{r\theta} &= -\frac{Q}{2r^2}V'(\theta) \\ \sigma_{rr; \theta\theta} &= -p \pm \frac{2\rho Q^2}{r^2 Re}V(\theta), & \sigma_{r\theta} &= -\frac{\rho Q^2}{r^2 Re}V'(\theta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Величины (1.1), (1.2) определяются посредством неизвестных функций профиля скорости  $V$  и давления  $p$ , для которых из уравнений Навье – Стокса следуют соотношения [1–7]

$$V'' + 4V - ReV^2 = C = \text{const} \quad (1.3)$$

$$p = \frac{\rho Q^2}{2r^2 \text{Re}} (C - 4V) \quad (1.4)$$

На безразмерную функцию  $V(\theta)$  налагаются дополнительные требования, вытекающие из локального условия прилипания жидкости на границе и интегрального условия постоянства расхода [1–7]

$$V(\pm\beta) = 0, \quad \int_{-\beta}^{\beta} V(\theta) d\theta = 1 \quad (1.5)$$

Для нахождения величин (1.1), (1.2), (1.4) и др. с помощью соотношений (1.3), (1.5) требуется определить неизвестные  $V(\theta)$  и  $C = V''(\pm\beta)$  для произвольных значений  $\text{Re} < 0$  и  $0 < \beta \leq \pi$ . Используемые в научной литературе подходы (например [3, 8, 11]) связаны, как правило, с игнорированием интегрального условия (1.5) и фиксацией значения  $V(0) = V_0$ . Это существенно искажает смысл и постановку классической задачи Джеффри – Гамела [1, 2, 4]. Неявное решение многомерной нелинейной краевой задачи посредством эллиптических функций на основе первого интеграла уравнения (1.3) не позволяет проводить эффективные высокоточные расчеты в достаточно широкой области параметров. Оно приводит к системе трех трансцендентных уравнений относительно неизвестных постоянных интегрирования уравнения (1.3) и неизвестной  $C$ . Решение на основе стандартных аналитических методов вызывает принципиальные вычислительные трудности вследствие недостаточной точности табулирования эллиптических функций и интегралов. Принято считать, что по сравнению с конфузорным диффузорное течение существенно труднее для исследования вследствие большего разнообразия особенностей при увеличении  $|\text{Re}|$ . Решение краевой задачи (1.3), (1.5) имеет явно выраженный “осцилляционный” характер, который усугубляется при  $-\text{Re} \gg 1$ . Результаты [11] получены для отдельных значений параметров  $\beta$ ,  $\text{Re}$  и не дают связной картины возможных стационарных течений и их эволюции при изменении параметров. Как в случае конфузорных ( $Q > 0$ ), так и диффузорных ( $Q < 0$ ) течений требуется разработка конструктивных численно-аналитических методов решения нелинейных краевых задач (1.3), (1.5), в том числе с учетом изопериметрических условий типа (1.5). Рассматриваемая краевая задача приводится к виду стандартной нелинейной краевой задачи четвертого порядка.

**2. Метод решения.** Эффективное высокоточное решение нелинейной краевой задачи (1.3), (1.5) проводится с помощью разработанного авторами численно-аналитического метода [12], основанного на модифицированном алгоритме Ньютона и процедуре продолжения по известным параметрам. Он был успешно реализован в случае конфузорных течений [9, 10].

Для удобства расчетов исходная краевая задача записывается в терминах следующих нормированных величин: профиля скорости  $y$ , аргумента  $x$ , неизвестных параметров  $\gamma$ ,  $\lambda$  и существенных известных параметров  $a$ ,  $b$ , которые связаны с исходными величинами соотношениями:

$$y(x) = 2\beta V(\theta), \quad z(x) = \int_0^x y(s) ds - x, \quad x = \frac{1}{2} \left( \frac{\theta}{\beta} + 1 \right), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1)$$

$$a = 4\beta, \quad b = 2\beta \text{Re}, \quad \lambda = 8\beta^3 C, \quad \gamma = y'(0)$$

Интегральное условие (1.5) учитывается посредством неизвестной функции  $z(x)$ , характеризующей источник. В результате преобразований (2.1) получается задача

Коши для  $y, z$  с неизвестными  $\gamma, \lambda$ , нахождение которых осуществляется учетом конечных условий

$$\begin{aligned} y'' + a^2 y - b y^2 &= \lambda, & y(0) &= 0, & y'(0) &= \gamma \\ z' &= y - 1, & z(0) &= 0; & y(1) &= z(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Требуется найти параметры  $\gamma, \lambda$  как функции известных величин  $a, b$ . Параметр  $\gamma$  характеризует градиент скорости течения жидкости на границе, т.е. соответствующие компоненты тензоров скоростей деформаций и напряжений (1.2). Величина  $\lambda$  определяет давление (1.4) и диагональные компоненты тензора напряжений (1.2) на стенках диффузора.

Проще сперва определять  $\gamma, \lambda$  продолжением по параметру  $b \leq 0$  при фиксированном значении параметра  $a, 0 < a \leq 4\pi$ , т.е. угла  $\beta, 0 < \beta \leq \pi$ , поскольку решение задачи (2.2) строится в явной аналитической форме для  $b = 0$  ( $\text{Re} = 0$ ). Затем искомая функция  $y$  после подстановки найденных величин  $\gamma(b), \lambda(b)$  ( $a$  – фиксировано) получается численным интегрированием задачи Коши (2.2).

Итак, для  $b = 0$  имеем искомое выражения для  $y, \gamma, \lambda$

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \frac{a}{2D} \left[ \cos\left(ax - \frac{a}{2}\right) - \cos\frac{a}{2} \right] \\ \gamma_0 &= \frac{a^2}{2D} \sin\frac{a}{2}, & \lambda_0 &= -\frac{a^3}{2D} \cos\frac{a}{2} \\ D &= \sin\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos\frac{a}{2} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

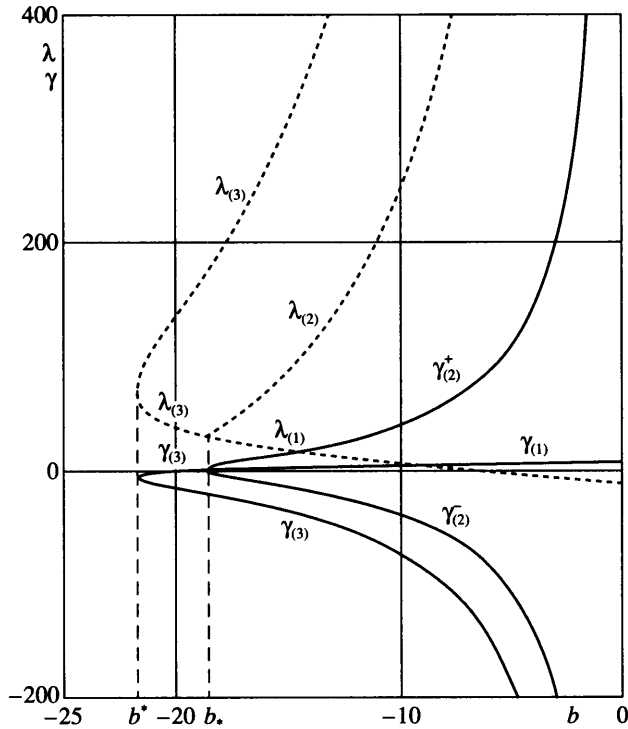
Регулярно продолжаемые по числу  $\text{Re} < 0$ , т.е. параметру  $b < 0$ , решение существует, если  $a \neq a^* = \arg D(a)$ , т.е.  $\beta \neq \beta^* \equiv 2.2467047$  [10]. Критическое значение угла раствора  $2\beta^* \approx 257^\circ$  больше развернутого и меньше угла, отвечающего прямому углу между внешними сторонами стенок диффузора. Для значений  $a \neq a^*$  построение решений задачи (2.2) сводится к рекуррентной процедуре уточнения  $\gamma(b), \lambda(b)$  для последовательности убывающих значений  $b = b_k$ , где  $k = 0, 1, \dots, k^*$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \gamma_n + \delta\gamma_n, & \lambda_{n+1} &= \lambda_n + \delta\lambda_n \\ \delta\gamma_n &= -[y_n(1)s_n(1) - z_n(1)h_n(1)]\Delta_n^{-1}(1) \\ \delta\lambda_n &= [y_n(1)w_n(1) - z_n(1)g_n(1)]\Delta_n^{-1}(1) \\ \Delta_n(x) &= y_n(x)s_n(x) - h_n(x)w_n(x), & \Delta_n(1) &\neq 0 \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $y_n(x), z_n(x)$  – решения задачи Коши (2.2) для известных на предыдущем шаге значений  $\gamma_n(b), \lambda_n(b)$ . Функции чувствительности  $g_n, w_n$  и  $h_n, s_n$  решений  $y_n, z_n$  по параметрам  $\gamma$  и  $\lambda$  вычисляются интегрированием линейных задач Коши при известных  $y_n(x), z_n(x)$  (либо совместно)

$$\begin{aligned} g'' + a^2 g - 2byg &= 0, & w' &= g; & g(0) &= w(0) = 0, & g'(0) &= 1 \\ h'' + a^2 h - 2byh &= 1, & s' &= h; & h(0) &= h'(0) = s(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Начальное приближение для  $n = 0$  задается согласно (2.3) при  $b = b_1 < b_0 = 0$ ; полученные достаточно точные значения  $\gamma_n(b_1), \lambda_n(b_1)$  будут начальными приближениями



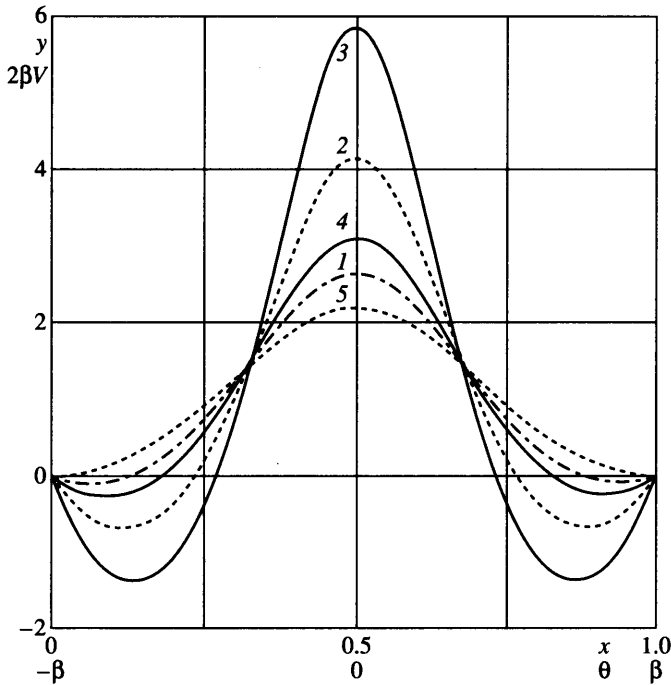
Фиг. 1. Зависимости  $\gamma(b)$  (сплошные линии),  $\lambda(b)$  (штриховые линии) и точки бифуркации  $b_*$ ,  $b^*$  для  $\beta = 10^\circ(\pi/18)$ ; 1, 2, 3 – режимы течения соответственно основное одномодовое, двух- и трехмодовое

для  $b = b_2 < b_1$ ; и т.д. Мерой точности могут служить абсолютные значения невязок по ординатам  $y_n(1)$ ,  $z_n(1)$  либо по абсциссам  $\epsilon_n = 1 - \xi_n$ ,  $\mu_n = 1 - \eta_n$ , где  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  – ближайшие к  $x = 1$  нули функций  $y_n(x)$ ,  $z_n(x)$ .

Алгоритм (2.4), (2.5) обладает свойством ускоренной (квадратичной) сходимости [2, 10, 12] и позволяет выполнять высокоточные (с относительной и абсолютной погрешностью порядка  $10^{-5}$ – $10^{-8}$ ) оперативные массовые расчеты искомых параметров  $\gamma = \gamma(b)$ ,  $\lambda = \lambda(b)$  для фиксированных значений  $\beta$ . После интегрирования задачи Коши (2.2) найденные зависимости  $y$ ,  $y'$  и  $\gamma$ ,  $\lambda$  используются для определения кинематических и динамических характеристик течений вязкой жидкости в плоском диффузоре (см. разд. 5). Проведенные численно-аналитические исследования свидетельствуют о сложной картине течений в диффузоре для различных значений параметров  $a$ ,  $b$  (т.е.  $\beta$ ,  $Re$ ), которая в научной литературе представлена недостаточно полно либо искаженно, см. [6, 7, 8, 11] и др.

**3. Решение краевой задачи и построение картины бифуркации стационарных течений.** Приводятся результаты исследований для сравнительно небольших углов  $2\beta$  раствора диффузора ( $0 < \beta \leq \pi/2$ ). Предельный случай  $\beta = 0$  отвечает течению Пуазейля между параллельными стенками и хорошо изучен [4–8]; при  $\beta = \pi/2$  имеет место течение вязкой жидкости в правой полуплоскости.

Значительное внимание уделяется расчетам и анализу картины течений для небольшой величины угла  $\beta = 10^\circ$ , которые могут представить интерес для технических, гидромеханических и геофизических приложений. На фиг. 1 представлены зависимости  $\gamma(b)$ ,  $\lambda(b)$  при  $0 \geq b \geq -25$ .



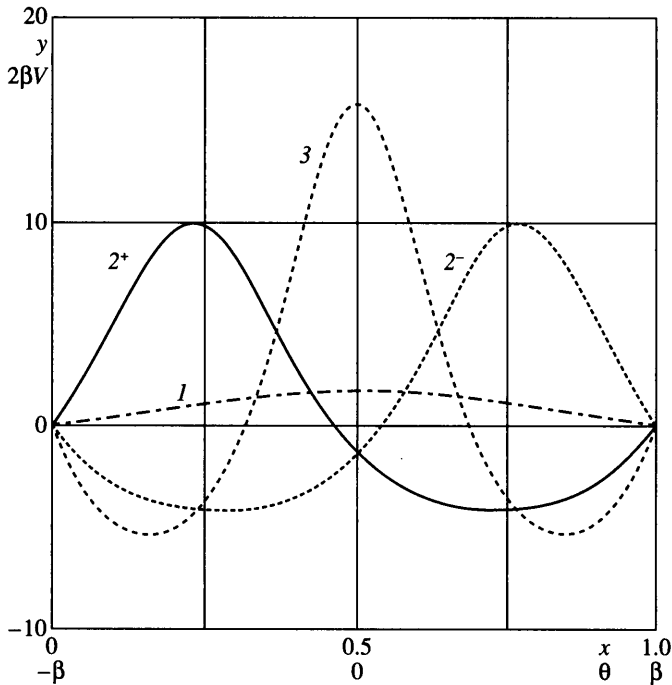
Фиг. 2. Профили скорости трехмодовых течений: кривые 1, 2 для  $b = -21$ ; 3, 4 для  $b = b_*$ ,  $b^*$  соответственно; кривая 5 – вырожденное одномодовое течение для  $b = b_*$

Вычислим сперва значения производных  $y'(0) = \gamma$  и  $y''(0) = \lambda$ , отвечающих градиенту и кривизне профиля скорости на границе.

Установлено, что соответствующая основному одномодовому течению функция  $\gamma = \gamma_{(1)}(b) > 0$  и убывает при уменьшении  $b \leq 0$ . Она достигает нулевого значения в критической точке  $b_* \approx -18.8$ , отвечающей вырождению основного одномодового течения, т.е. “чисто расходящегося” течения по терминологии [6, 8]. Точные значения  $b_*(\beta)$  определяются далее в разд. 4.

При дальнейшем уменьшении  $b < b_*$  величина  $\gamma < 0$  и убывает, а течение становится трехмодовым, т.е. содержит участки стока и истока. Исток жидкости ( $y > 0$ ) осуществляется в окрестности биссектрисы ( $x = 1/2$ , т.е.  $\theta = 0$ ). Симметрично по краям у стенок диффузора происходит сток жидкости ( $y < 0$ ), т.е. в окрестности  $x = 0$  ( $x > 0$ ) и  $x = 1$  ( $x < 1$ ), что отвечает углу  $\theta = \mp\beta$  ( $\theta > -\beta$ ,  $\theta < \beta$ ). Свойство трехмодовости этих течений усиливается (экстремумы профиля скорости увеличиваются) при уменьшении параметра  $b$  от  $b_*$  до критического значения  $b = b^* \approx -21.7$ . При  $b < b^*$  решения данного типа становятся невозможными, так как кривые  $\gamma_{(3)}(b)$ ,  $\lambda_{(3)}(b)$  в этой точке имеют вертикальные касательные, что отвечает точке поворота (фиг. 1).

Увеличение значений параметра  $b$  с помощью аналогичного подхода позволяет установить существование второй (более высокой) ветви трехмодовых течений для значений  $b^* < b < 0$ . При этом значения  $\gamma_{(3)}$  быстро убывают, а  $\lambda_{(3)}$  – возрастают при  $b \rightarrow 0$ , причем  $\gamma_{(3)} \rightarrow -\infty$ ,  $\lambda_{(3)} \rightarrow +\infty$ ; например, для  $b \approx -1$  величина  $\gamma_{(3)} \sim -10^3$ , а  $\lambda_{(3)} \sim 10^4$ . В результате для  $b^* < b < b_*$  установлено существование не менее двух типов трехмодовых течений с сильно различающимися характеристиками, т.е. значениями  $\gamma$ ,  $\lambda$ . Для одних и тех же значений параметров  $\beta$  и  $b$  (т.е.  $Re$ ) существует два режима трех-



Фиг. 3. Профили скорости одномодового (1), двух двухмодовых (2, 3) и трехмодового (4) течений для  $b = -10$

модового течения, порожденного основным (одномодовым) режимом. Профили скорости симметричны относительно биссектрисы (фиг. 2, кривые 1, 2). Вопросы устойчивости и практической реализуемости требуют отдельного обсуждения.

Анализ окрестности критической точки  $b_*$ , в которой  $\gamma = 0$ , свидетельствует о существовании наряду с одномодовым и указанным трехмодовым двух типов двухмодовых несимметричных относительно биссектрисы угла течений при увеличении  $b$ ,  $b_* < b < 0$ , которые зеркально симметричны друг к другу. У одной из стенок происходит исток жидкости ( $y > 0$ ), а у другой – сток ( $y < 0$ ). Поскольку обе ситуации ( $x = 0, 1$  или  $\theta = \mp\beta$ ) “равноправны”, то кривая  $\gamma_{(2)}(b)$  состоит из двух симметричных относительно оси абсцисс ветвей  $\gamma_{(2)}^\pm$ ; при  $b = b_*$  касательная вертикальна. Увеличение параметра  $b$  ( $b \rightarrow 0$ ) приводит к неограниченному росту  $|\gamma_{(2)}^\pm|$  аналогично рассмотренному случаю трехмодовых течений. Кривая  $\lambda_{(2)}(b)$  существует при  $b_* \leq b < 0$  и весьма быстро при увеличении  $b$  возрастает; сходным кривой  $\lambda_{(3)}(b)$  образом величина  $\lambda_{(2)} \rightarrow +\infty$  при  $b \rightarrow 0$ .

Таким образом, для значений  $b_* < b < 0$  установлено существование и определены взаимные переходы течений трех типов: основного одномодового ( $\gamma_{(1)} > 0, \lambda_{(1)} \geq 0$ ), двухмодовых ( $\gamma_{(2)}^\pm \geq 0, \lambda_{(2)} > 0$ ) и трехмодового ( $\gamma_{(3)} < 0, \lambda_{(3)} > 0$ ) (фиг. 1). Соответствующие кривые 1, 2<sup>±</sup>, 3 для профилей скорости  $u(x)$  при  $b = -10$  представлены на фиг. 3. Отметим, что при  $b = b_*$  существуют два типа течений: критическое одномодовое и

$\beta$	$b_*$	$b^*_{\approx}$	$\gamma_0$	$\lambda_0$
$\rightarrow +0$	$-6\pi$	-22	6	-12
$10^\circ$	-18.8	-21.7	5.93	-11.26
$45^\circ$	-14.2	-18.5	4.93	0
$90^\circ$	0	-9	0	39.6

трехмодовое (фиг. 2, кривые 5 и 3 соответственно). Точке поворота (значение  $b = b^*$ ), соответствует трехмодовый профиль (фиг. 3, кривая 4), который является результатом сближения двух трехмодовых профилей при  $b \rightarrow b^*$  ( $b > b^*$ ).

В результате расчетов впервые проведен анализ сложной картины бифуркации течений, происходящих на сравнительно небольшом интервале  $0 \geq b \geq -25$  ( $0 \geq \text{Re} \geq -72$  для  $\beta = 10^\circ$ ). На его основе с помощью указанной в разд. 2 процедуры можно исследовать механизм перестройки течений при дальнейшем изменении параметра  $b$ , т.е. числа  $\text{Re}$ , на неограниченном полуинтервале  $b < 0$  и для произвольных величин угла раствора  $0 < 2\beta \leq 2\pi$ .

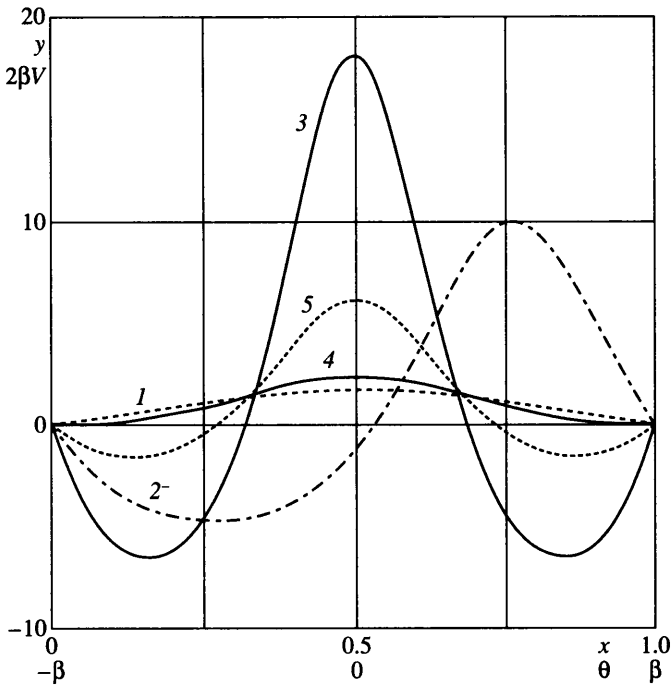
**4. Исследование зависимости картины бифуркации от угла раствора.** Приведем для наглядности таблицу критических значений параметров течения  $b_*$ ,  $b^*$  и “стартовых” величин  $\gamma_0 = \gamma_{(1)}(0)$ ,  $\lambda_0 = \lambda_{(1)}(0)$  в зависимости от угла полураствора  $\beta$ ,  $0 < \beta \leq \pi/2$ .

В соответствии с таблицей дадим комментарий. Уменьшение параметра  $a$ , т.е. угла раствора диффузора  $2\beta$  ( $0 < \beta \leq 10^\circ$ ), практически не изменяет приведенную картину бифуркации течений. В частности, величина  $b_* \rightarrow -6\pi$  при  $\beta \rightarrow 0$ , что незначительно отличается от  $b_* = -18.8$  при  $\beta = 10^\circ$ . Остальные характеристики также изменяются незначительно.

Увеличение угла полураствора  $\beta$  ( $0 < \beta < \pi/2$ ) приводит к монотонному уменьшению  $\gamma_0$  до 0 и росту  $\lambda_0$  до  $4\pi^2 \approx 39.6$ . Критическая точка  $b_*$  смещается вправо также монотонно (см. таблицу). Для значения  $\beta = \pi/2$  ( $90^\circ$ ) численно и аналитически (см. ниже) можно установить, что  $b_* = 0$ , т.е. одномодовое (“чисто расходящееся” течение) для  $b < 0$  не существует. При этом для  $b < 0$  имеют место регулярно продолжаемые два трехмодовых течения, аналогичные рассмотренным. Двухмодовые течения для  $\beta = \pi/2$  также не существуют. Зависимость критического значения  $b^*$  от  $\beta$  может быть найдена численно.

Для иллюстрации изменения картины течений в зависимости от угла раствора был рассмотрен случай  $\beta = 45^\circ$  ( $\pi/4$  рад), когда между стенками диффузора имеет место прямой угол. Критические точки  $b_*$ ,  $b^*$  смещаются вправо по сравнению со случаем  $\beta = 10^\circ$ , отвечающем меньшему углу раствора (см. таблицу). В основном поведение кривых  $\gamma$ ,  $\lambda$  аналогично приведенному на фиг. 1 и описанному выше. Можно отметить, что абсолютные значения несколько меньше. Одно-, двух- и трехмодовый профили скорости  $y_{(1)}$ ,  $y_{(2)}$ ,  $y_{(3)}$  для типичных значений параметра  $b$  представлены на фиг. 4 ( $y_{(2)}^+$  не приведена,  $y_{(2)}^+(x) \equiv y_{(2)}^-(1-x)$ ). Кривая 4 близка одномодовому профилю 1, отвечающему точке бифуркации  $b_*$ .

Рассмотрим картину течений для развернутого угла раствора диффузора  $2\beta = 180^\circ$  ( $\pi$  рад), когда одна стенка продолжает другую и течение жидкости происходит в правой полуплоскости. Значение  $b = b_* = 0$  является критическим, для него “существует” вырожденное одномодовое течение с нулевым трением на стенке ( $\gamma = 0$ ), а при  $b < 0$  одно- и двухмодовые течения отсутствуют. На интервале  $b^* \approx -9.1 \leq b < 0$



Фиг. 4. Профили скорости одно- (1), двух- (2) и трехмодового (3) течения для значения  $b = -8$  и двух трехмодовых (4, 5) режимов течения для  $b = -16$

существует два трехмодовых режима. Бифуркационная картина представлена на фиг. 5. Профили скорости для типичных значений  $b$  представлены на фиг. 6.

Кривая зависимости  $b_*(\beta)$ ,  $0 < \beta < \pi/2$ , определяющая границу существования одномодового течения, может быть найдена в неявной аналитической форме введением промежуточного параметра  $\xi$  при помощи первого интеграла первого уравнения (2.2) и квадратур

$$-b_* = 6\xi K(\xi)L(\xi), \quad \beta = K(\xi)/\sqrt{2}, \quad 0 \leq \xi < \infty$$

$$K(\xi) = \int_0^1 \frac{dq}{\sqrt{f(q, \xi)}}, \quad L(\xi) = \int_0^1 \frac{q dq}{\sqrt{f(q, \xi)}} \quad (4.1)$$

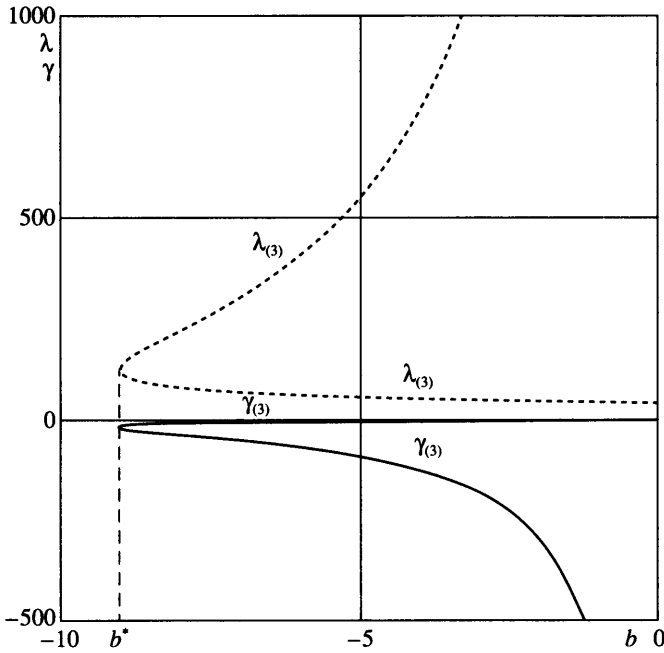
$$f(q, \xi) = q(1-q)[2 + \xi(1+q)]$$

Из (4.1) следует, что  $b_* = -6\pi$  при  $\beta = +0$  и  $b_* = 0$  при  $\beta = \pi/2$ ; промежуточные значения для  $0 < \beta < \pi/2$  представлены на фиг. 7. Если соответствующие заданному углу  $\beta$  значения вспомогательного параметра  $\xi_* = \xi(\beta)$  и искомой неизвестной  $b_*(\beta)$  определены, то критическое значение  $Re_*$ , максимальное значение  $y_m$  функции  $y(x)$  и параметр  $\lambda_*$  равны

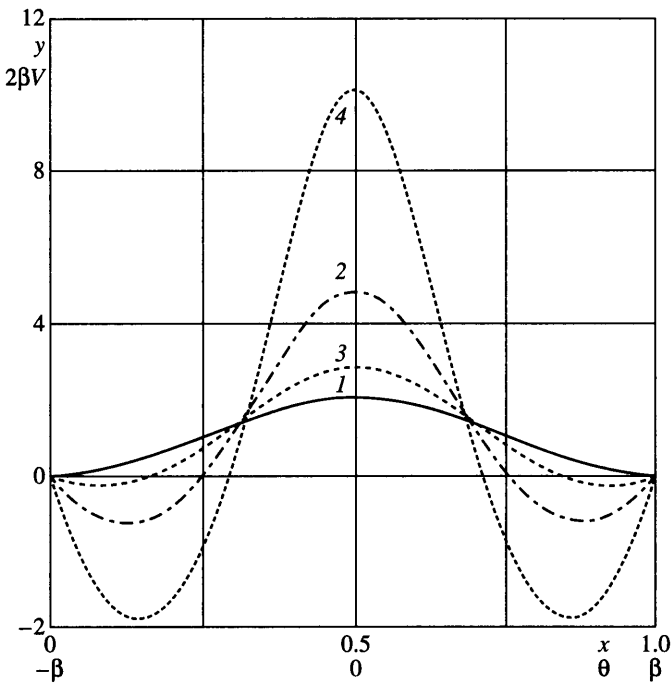
$$Re_* = \frac{b_*}{2\beta}, \quad y_m = y\left(\frac{1}{2}\right) = -12\beta^2 \frac{\xi_*}{b_*}, \quad \lambda_* = -48\beta^4 \frac{\xi_*}{b_*} (2 + \xi_*) \quad (4.2)$$

Искомые величины  $b_*$ ,  $\xi_*$ ,  $\lambda_*$  в (4.1), (4.2) находятся численно.

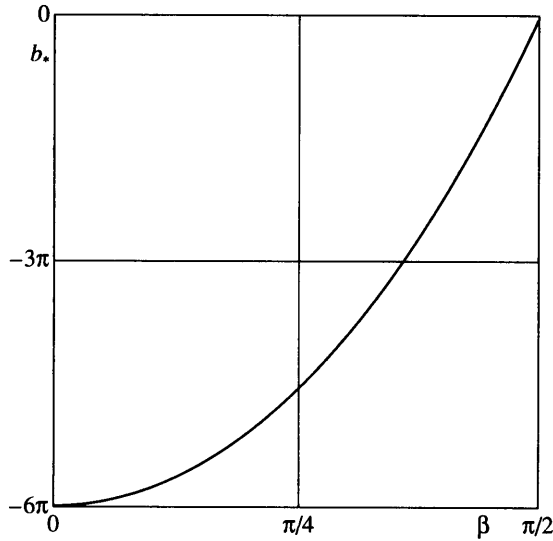




Фиг. 5. Кривые зависимостей  $\gamma(b)$ ,  $\lambda(b)$  и точки бифуркации  $b_* = 0$ ,  $b^*$  для  $\beta = 90^\circ(\pi/2)$ , отвечающие вырожденному одномодовому режиму и двум трехмодовым режимам течения



Фиг. 6. Профили скорости вырожденных одно- (1) и трехмодового (2) режимов течения для значений  $b = 0$  и  $b \approx b^*$  соответственно и двух трехмодовых режимов (3, 4) при  $b = -7$



Фиг. 7. Зависимость критического значения  $b_*$  от угла полураствора диффузора  $\beta$

Критические значения  $b^*(\beta)$ , определяющие границу существования трехмодовых течений (см.  $\gamma_{(3)}(b^*)$ ,  $\lambda_{(3)}(b^*)$  на фиг. 1), отвечают условиям неограниченности производных  $\partial\gamma_{(3)}/\partial b$ ,  $\partial\lambda_{(3)}/\partial b$ . Они конструктивно вычисляются при помощи вышеизложенной численно-аналитической процедуры ускоренной сходимости. Формулы для величин  $b^*(\beta)$ ,  $\gamma^*(\beta)$ ,  $\lambda^*(\beta)$ , аналогичные (4.1), отсутствуют.

**5. Физические характеристики диффузорных течений.** Кинематические и гидродинамические характеристики диффузорных течений получаются с помощью найденных выражений  $y(x, b)$ ,  $\gamma(b)$ ,  $\lambda(b)$  при фиксированных значениях угла  $\beta$ . Согласно (2.1), имеем для  $v_r(1.1)$ ,  $p(1.4)$  выражения

$$V(\theta, \text{Re}) = \frac{1}{2\beta} y\left(\frac{\theta/\beta + 1}{2}, 2\beta \text{Re}\right), \quad v_r(\theta, r, \text{Re}) = -\frac{Q}{r} V(\theta, \text{Re}) \quad (5.1)$$

$$p(\theta, r, \text{Re}) = \frac{\rho Q^2}{2r^2 \text{Re}} \left( \frac{\lambda}{(2\beta)^3} - 4V(\theta, \text{Re}) \right), \quad \lambda = \lambda(2\beta \text{Re})$$

Тензоры скоростей деформаций  $v$  и напряжений  $\sigma$  находятся посредством формул (1.2). Компоненты вектора напряжений определяются через  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  [10]. Компоненты вектора плотности суммарной силы  $\mathbf{F} = (F_r, F_\theta)$  на расстоянии  $r$  равны

$$F_r = \int_{-\beta}^{\beta} r \sigma_{rr} d\theta = \frac{\rho Q^2}{r \text{Re}} \left( 4 - \frac{\lambda}{8\beta^2} \right), \quad F_\theta \equiv 0 \quad (5.2)$$

Аналогично (5.2) квадратурой вычисляется в явном виде плотность мощности сил  $N$ , обусловленных напряжением  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$

$$N = \int_{-\beta}^{\beta} r \sigma_{rr} v_r d\theta = \frac{\rho Q^3}{r^2 \text{Re}} \left( \frac{\lambda}{2(2\beta)^3} - \frac{4}{\text{Re}} \left( V|_{-\beta}^{\beta} + 4 - \frac{\lambda}{(2\beta)^2} \right) \right) \quad (5.3)$$

Для одномодового и трехмодового режимов течения величина  $V|_{-\beta}^{\beta} = 2V(\beta, Re)$ , а для двухмодового она равна нулю тождественно для всех  $\beta, Re$ .

С помощью формул (5.1)–(5.3) находятся искомые параметры стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре через исходные размерные и безразмерные физические величины. Для  $Q = \text{const}$  следует, что силовые характеристики становятся неограниченными при  $Re \rightarrow 0$ , т.е.  $\mu \rightarrow \infty$ . Если определять число Рейнольдса не по расходу, а по максимальной скорости, то для многомодовых режимов  $Re \rightarrow \infty$ . Локальные и интегральные свойства радиальных течений в диффузоре исследуются с помощью формул (5.1) и (5.2), (5.3) соответственно на основе построенного выше решения задачи Джеффри–Гамеля.

**Заключение.** С помощью высокоточного метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметрам впервые построена в адекватных переменных картина стационарных течений вязкой жидкости в диффузоре. При фиксированном значении угла раствора установлено существование критических чисел  $Re$  (параметра  $b$ ) и определены их значения.

Для сравнительно небольших  $|b| \leq 25$ ,  $b = 2\beta Re$  в точке  $b = b_*$  имеет место бифуркация: в малой окрестности могут реализоваться одномодовое (основное “чисто расходящееся” течение), два трехмодовых и два двухмодовых режима течения. При дальнейшем уменьшении параметра  $b$  на интервале  $b^* \leq b < b_*$  остаются трехмодовые течения, которые при  $b = b^*$  (точка поворота) сливаются и далее ( $b < b^*$ ) отсутствуют.

Одномодовое, два двухмодовых и одно трехмодовое течения могут реализоваться при увеличении параметра  $b$ :  $b_* < b < 0$ , причем основной режим течения регулярно продолжаем вплоть до значения  $b = 0$  ( $Re = 0$ ) и далее для  $Re > 0$  (конфузор). Многомодовые течения вырождаются при  $b \rightarrow 0$ : становятся неограниченными как экстремумы профилей скорости, так и другие характеристики.

Таким образом, при  $0 < \beta < \pi/2$  задача имеет три особых значения параметра  $b$ :  $b = 0$ ,  $b_*$ ,  $b^*$ , т.е. числа Рейнольдса  $Re = b/(2\beta)$ . Для углов  $\pi/2 \leq \beta < \pi$  одномодовые течения отсутствуют (согласно формуле (2.3)).

Одним из существенных результатов является установление факта неединственности течений и его значения для объяснения экспериментальных данных. В научной, в том числе учебной, литературе отсутствует убедительное объяснение поведения течений в окрестности первой точки бифуркации  $Re_*$ . Изложенные результаты дают обоснованную картину стационарных диффузорных течений в зависимости от определяющих параметров.

Авторы благодарны А.А. Бармину за существенные замечания по изложению результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 03-01-96539, 05-01-00043, 05-01-00401), Программы поддержки ведущих научных школ НШ 1627.2003.1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Phil. Mag. 1915. Ser. 6. V. 29. № 172. P. 455–465.
2. Hamel G. Spiralformige Bewegungen zäher Flüssigkeiten // Jahres ber. Deutsch. Math. Ver. 1917. Bd 25. S. 34–60.
3. Rosenhead L. The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1940. V. 175. № 963. P. 436–467.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

- 6 Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
- 7 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- 8 Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1967. = Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
- 9 Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакиев С.А. Новые несимметричные и многомодовые решения задачи о течении вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 1. С. 46–50.
- 10 Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакиев С.А. Регулярно продолжаемые по числу Рейнольдса решения задачи Джеффри–Гамеля // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 15–32.
- 11 Millsaps K., Pohlhausen K. Thermal distributions in Jeffery–Hamel flows between nonparallel plane walls // J. Aeronaut. Sci. 1953. V. 20. № 3. P. 187–196.
- 12 Акуленко Л.Д., Кумакиев С.А., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 723–741.

Москва

Поступила в редакцию  
7.IX.2004