

УДК 533.6.013.2.011.32

© 2005 г. А. Н. ХРАБРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА ПРОФИЛЕ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ОТКЛОНЕНИИ ОРГАНА УПРАВЛЕНИЯ НА ЗАДНЕЙ КРОМКЕ

Рассматривается линейная задача нестационарного обтекания тонкого симметричного профиля в идеальной жидкости с органом управления на задней кромке, отклоняемым по произвольному закону. Вычисляются аэродинамические нагрузки, действующие на профиль. Интенсивность вихревого следа, сходящего с профиля, определяется численным решением интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Рассматриваются также вопросы математического моделирования нестационарных аэродинамических нагрузок в виде, удобном для совместного решения задач аэродинамики и динамики полета. Результаты моделирования сравниваются с результатами полученных численных решений.

Ключевые слова: идеальная жидкость, нестационарное обтекание, тонкий профиль, аэродинамические органы управления.

Одной из центральных проблем при решении любой задачи динамики полета в атмосфере является нахождение аэродинамических сил и моментов, действующих на летательный аппарат при его произвольном неустановившемся движении. Для исследования задач устойчивости и управляемости, синтеза законов автоматического управления необходимо не просто уметь рассчитывать аэродинамические нагрузки при заданных законах изменения кинематических параметров движения, но и разработать математическую модель нестационарных аэродинамических нагрузок, удобную для совместного одновременного решения аэродинамической и динамической задач. Дело в том, что из-за вихревых следов, остающихся в жидкости за несущими поверхностями, нестационарные аэродинамические нагрузки являются функционалами от всей предыстории движения тела.

Общепринятая математическая модель [1] с использованием вращательных и нестационарных аэродинамических производных, учитывающая линейные эффекты вращения тела и скорости изменения углов атаки и скольжения, не учитывает влияния предыстории движения. На больших углах атаки проблема усложняется возможными гистерезисными эффектами при развитии отрывного обтекания. Рассматриваемый в литературе подход к описанию эффектов предыстории движения с помощью переходных функций и интегралов Дюамеля [2] приводит к настолько сложной математической задаче исследования систем интегродифференциальных уравнений, что с его помощью не была решена еще ни одна практическая задача. Для таких систем уравнений необходимо заново разрабатывать аппарат исследования устойчивости и управляемости движения.

Очень заманчиво моделировать нестационарные аэродинамические характеристики с учетом предыстории движения, оставаясь в классе тех же динамических систем на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, что и уравнения динамики полета. При этом для исследования задач устойчивости движения и синтеза алгоритмов автоматического управления можно использовать классические методы, применяя их

к расширенной системе уравнений, включающей как уравнения динамики, так и динамические уравнения, описывающие развитие нестационарных нагрузок.

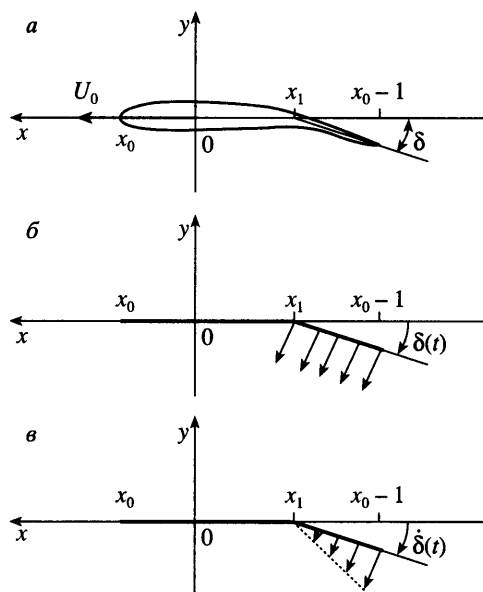
Некоторые полуэмпирические подходы к разработке таких математических моделей нестационарных аэродинамических характеристик самолета рассмотрены, например, в [3]. Для более корректного теоретического обоснования этого подхода было признано целесообразным исследовать математическую модель нестационарных аэродинамических характеристик тонкого профиля при его произвольном движении в идеальной несжимаемой жидкости. Классическая теория нестационарного движения профиля [4] была сформулирована в частотной области в работах Бирнбаума, Кюсснера (немецкая школа), Лаврентьева, Келдыша, Седова (московская школа), Сирса, Кармана, Теодорсена (американская школа). Автором на основе подхода московской школы [5] разрабатывается математическая модель нестационарной аэродинамики профиля во временной области в классе динамических систем с дополнительными внутренними переменными. В линейной постановке нестационарные задачи, обусловленные вариациями угла атаки, угловой скорости тангажа и угла отклонения рулевой поверхности можно рассматривать отдельно. Математическая модель, связанная с произвольным изменением угла атаки и угловой скорости тангажа тонкого профиля, рассмотрена ранее [6].

В настоящей работе приводится решение задачи о моделировании нестационарных аэродинамических нагрузок при произвольном отклонении руля на задней кромке профиля. На основании известного подхода с использованием теории функций комплексной переменной [5] задача о движении профиля с произвольным законом отклонения органа управления сводится к решению интегрального уравнения Вольтера первого рода с ядром, имеющим интегрируемую сингулярность. На основании алгоритма численного решения таких уравнений с использованием быстрого преобразования Фурье [7] разрабатывается методика нахождения интенсивности вихревого слоя, сходящего с профиля, и последующего расчета аэродинамических характеристик при произвольном законе отклонении руля по времени.

Для математического моделирования нестационарных аэродинамических нагрузок используется аппроксимация результатов решения в частотной области с помощью переходных функций разного порядка. Применение обратного преобразования Лапласа приводит к получению соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений с некоторыми внутренними переменными, динамика которых позволяет описать эффекты запаздывания развития нестационарных аэродинамических нагрузок при динамическом отклонении руля.

Ниже кратко рассматривается постановка задачи, обсуждается методика численного решения интегрального уравнения, вычисляются нестационарные аэродинамические нагрузки. Разрабатываются также математические модели 1-го, 2-го и 3-го порядка, позволяющие легко получать приближенные решения с помощью интегрирования соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты моделирования сравниваются с результатами точных численных решений.

1. Рассмотрим обтекание тонкого симметричного профиля несжимаемой жидкостью при произвольном динамическом отклонении органа управления на задней кромке. Задачу будем решать в безразмерном виде, считая, что скорость движения профиля в жидкости $U_0 = 1$ и длина его хорды $b = 1$. Решение ищется в связанной с профилем системе координат, начало которой расположено в точке, относительно которой рассчитывается аэродинамический момент тангажа (фиг. 1). Профиль в этой системе координат расположен вдоль оси x от точки x_0 до точки $x_0 - 1$ (x_0 – центровка профиля). Отклоняемая часть профиля (рулевая поверхность) расположена вдоль оси x от точки x_1 до задней кромки. Длина руля, таким образом, равна $l = x_1 - x_0 + 1 \leq 1$. Закон отклонения руля по времени задается функцией $\delta(t) \ll 1$. Будем считать, что ось вращения руля находится в точке $x = x_1$.



Фиг. 1. Схема профиля с органом управления на задней кромке (а) и граничные условия в стационарном (б) и нестационарных (в) случаях

В случае произвольного нестационарного движения профиля с возможным вертикальным смещением центра тяжести существуют два независимых кинематических параметра, полностью описывающих возмущенную нормальную скорость на его поверхности. Постоянная составляющая определяется углом атаки профиля α , а линейная по координате x составляющая зависит от угловой скорости вращения профиля по тангажу ω_z [6]. Нестационарные нагрузки, соответствующие присоединенным массам, определяются при этом членами, пропорциональными первым производным по времени $\dot{\alpha}$ и $\dot{\omega}_z$. В случае изменения угла отклонения руля относительно точки $x = x_1$ для него имеем тождество $\omega_z = \dot{\delta}$, тем самым угловая скорость вращения полностью определяется законом отклонения руля. Нормальная компонента скорости на профиле при этом выражается соотношениями (см. фиг. 1)

$$v_n(x, t) = 0, \quad x \in [x_0, x_1]; \quad v_n(x, t) = -\delta(t) - \dot{\delta}(t)(x_1 - x), \quad x \in [x_1, x_0 - 1] \quad (1.1)$$

Без ограничения общности ввиду линейности задачи можно считать, что нестационарное движение начинается из некоторого установившегося движения с нулевой циркуляцией около профиля. При неустановившемся движении с отклонением руля по заданному закону около тела будет возникать циркуляция, а, следовательно, за профилем будет развиваться вихревой след. Считается, что этот вихревой след расположен за профилем вдоль отрезка оси x , длина которого увеличивается с течением времени.

Решение задачи о вычислении нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на профиль при произвольном неустановившемся отклонении руля, при сделанных выше предположениях проводится аналогично [5]. В комплексной плоскости $z = x + iy$ находится функция скоростей абсолютного течения жидкости

$$\frac{dw}{dz} = u - iv$$

Эта функция регулярна вне профиля и вихревого следа, исчезает на бесконечности $dw/dz \rightarrow 0$ и удовлетворяет следующим граничным условиям. На обеих сторонах отрезка $(x_0, x_0 - 1)$, соответствующего профилю, вертикальная компонента скорости одинакова и имеет заданное значение $v = v_n(x, t)$, определяемое выражением (1.1). При переходе через линию разрыва скоростей в вихревой пелене вертикальная составляющая скорости v непрерывна. Возмущенная горизонтальная компонента скорости u конечна в задней кромке профиля $x = x_0 - 1$ (условие Чаплыгина–Жуковского). Таким образом, задачу нахождения функции dw/dz во всей плоскости можно свести к ее определению в верхней или нижней полуплоскости с добавочным граничным условием $u = 0$ для части оси x вне профиля и вихревого следа.

Введем обозначения u_1 и u_2 для значений продольной составляющей скорости при подходе к разрыву вихревого следа снизу и сверху. С учетом изложенного выше имеем $u_2(x) = -u_1(x)$.

Если $\Gamma(s)$ – циркуляция по контуру, охватывающему профиль с частью вихревой пелены и пересекающему вихревую пелену в точке с координатой s , то $d\Gamma/ds = 2u_2(s)$. Решение краевой задачи для dw/dz в верхней полуплоскости можно получить с использованием формулы Келдыша–Седова с учетом необходимых особенностей на передней и задней кромках профиля

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z - x_0 + 1}{z - x_0}} \left[\int_{x_0 - 1}^{x_0} \frac{v_n(\xi, t)}{\xi - z} \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi + \int_{s_0}^{s_1} \frac{u_2(s)}{\xi - z} \sqrt{\frac{\xi - x_0}{\xi - x_0 + 1}} ds \right] \quad (1.2)$$

Здесь s_0 и s_1 – координаты начала и конца вихревой пелены в неподвижной системе координат. Если начало неподвижной системы координат выбрать в точке, совпадающей с положением задней кромки профиля в момент начала неустановившегося движения, то $s_0 = 0$, $s_1 = t$. Переменные ξ и s связаны соотношением

$$\xi = s - s_1 + x_0 - 1 \quad (1.3)$$

Таким образом, имеем аналитическое выражение для функции скоростей в зависимости от нормальной составляющей скорости на профиле, определяемом законом отклонения органа управления (1.1) и разрыва скорости в вихревой пелене за профилем $u_2(s)$. Эта последняя функция неизвестна и нуждается в дополнительном определении.

Для нахождения функции разрыва скорости в следе u_2 и вычисления аэродинамических нагрузок, действующих на профиль, понадобится разложение функции скоростей в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Так как на бесконечности $dw/dz \rightarrow 0$, то искомое разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\Gamma_0}{2\pi i z} + \frac{ic_2}{z^2} + \frac{ic_3}{z^3} + \dots \\ \Gamma_0 &= -2 \left[\int_{x_0 - 1}^{x_0} v_n \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi + \int_{s_0}^{s_1} u_2 \sqrt{\frac{\xi - x_0}{\xi - x_0 + 1}} ds \right] \\ c_2 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x_0 - 1}^{x_0} v_n (1 + 2\xi) \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi + \int_{s_0}^{s_1} u_2 (1 + 2\xi) \sqrt{\frac{\xi - x_0}{\xi - x_0 + 1}} ds \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$c_3 = \frac{1}{8\pi} \left\{ \int_{x_0-1}^{x_0} v_n [4x_0 - 1 + 4\xi(1 + 2\xi)] \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi + \int_{s_0}^{s_1} u_2 [4x_0 - 1 + 4\xi(1 + 2\xi)] \sqrt{\frac{\xi - x_0}{\xi - x_0 + 1}} ds \right\}$$

Величина Γ_0 представляет собой циркуляцию по бесконечно удаленному контуру, которая должна быть постоянна во времени и равна нулю в соответствии с постановкой задачи. Поэтому выражение для Γ_0 из соотношений (1.4) может рассматриваться как интегральное уравнение для нахождения функции u_2

$$\int_{s_0}^{s_1} u_2(s) \sqrt{\frac{\xi - x_0}{\xi - x_0 + 1}} ds = - \int_{x_0-1}^{x_0} v_n \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi \quad (1.5)$$

где в правой части присутствует интеграл от заданной нормальной компоненты скорости на профиле (1.1). В неподвижной системе координат с учетом соотношения (1.3) это уравнение может быть записано в виде

$$\int_0^t u_2(s) \sqrt{\frac{s-t+1}{s-t}} ds = F(t) \quad (1.6)$$

где в правой части находится известная функция от времени. После численного решения данного уравнения, методика которого рассмотрена ниже, можно вычислить нестационарные аэродинамические нагрузки.

2. Для определения нестационарных аэродинамических нагрузок воспользуемся полученным выше разложением функции dw/dz в окрестности бесконечно удаленной точки (1.4). Формулы для подъемной силы и момента тангажа относительно начала подвижной системы координат в безразмерном виде могут быть записаны в виде [5]

$$c_y = 2\Gamma_0 - 4\pi \frac{dc_2}{dt}, \quad m_z = -4\pi c_2 - 2\pi \frac{dc_3}{dt}$$

Вычисления приводят к следующим результатам для коэффициента подъемной силы

$$c_y = -4 \int_{x_0-1}^{x_0} v_n \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi - 4 \int_{x_0-1}^{x_0} \frac{dv_n}{dt} \sqrt{(x_0 - \xi)(1 - x_0 + \xi)} d\xi + 2 \int_{s_0}^{s_1} \frac{u_2(s) ds}{\sqrt{(x_0 - 1 - \xi)(x_0 - \xi)}} \quad (2.1)$$

и коэффициента момента тангажа относительно начала связанной системы координат

$$m_z = -2 \int_{x_0-1}^{x_0} v_n (1 + 2\xi) \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi - 2 \int_{x_0-1}^{x_0} \frac{dv_n}{dt} \xi \sqrt{(x_0 - \xi)(1 - x_0 + \xi)} d\xi - 2 \left(x_0 - \frac{1}{4}\right) \int_{x_0-1}^{x_0} \frac{dv_n}{dt} \sqrt{(x_0 - \xi)(1 - x_0 + \xi)} d\xi + 2 \left(x_0 - \frac{1}{4}\right) \int_{s_0}^{s_1} \frac{u_2(s) ds}{\sqrt{(x_0 - 1 - \xi)(x_0 - \xi)}} \quad (2.2)$$

При $x_0 = 1/2$ эти формулы совпадают с соответствующими формулами, полученными в [5].

С учетом выражения (1.1) эти формулы дают для коэффициента подъемной силы и момента тангажа

$$c_y = 4 \int_{x_0-1}^{x_1} (\delta + \dot{\delta}x_1 - \dot{\delta}\xi) \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi + 4 \int_{x_0-1}^{x_1} (\dot{\delta} + \ddot{\delta}x_1 - \ddot{\delta}\xi) \sqrt{(x_0 - \xi)(1 - x_0 + \xi)} d\xi +$$

$$+ 2 \int_{s_0}^{s_1} \frac{u_2(s) ds}{\sqrt{(x_0 - 1 - \xi)(x_0 - \xi)}} \quad (2.3)$$

$$m_z = 2 \int_{x_0-1}^{x_1} (\delta + \dot{\delta}x_1 - \dot{\delta}\xi)(1 + 2\xi) \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi +$$

$$+ 2 \int_{x_0-1}^{x_1} (\dot{\delta} + \ddot{\delta}x_1 - \ddot{\delta}\xi) \xi \sqrt{(x_0 - \xi)(1 - x_0 + \xi)} d\xi +$$

$$(2.4)$$

$$+ 2 \left(x_0 - \frac{1}{4}\right) \int_{x_0-1}^{x_1} (\dot{\delta} + \ddot{\delta}x_1 - \ddot{\delta}\xi) \sqrt{(x_0 - \xi)(1 - x_0 + \xi)} d\xi +$$

$$+ 2 \left(x_0 - \frac{1}{4}\right) \int_{s_0}^{s_1} \frac{u_2(s) ds}{\sqrt{(x_0 - 1 - \xi)(x_0 - \xi)}}$$

Введем обозначения

$$I_n = \int_{x_0-1}^{x_1} \xi^n \sqrt{\frac{x_0 - \xi}{1 - x_0 + \xi}} d\xi, \quad J_n = \int_{x_0-1}^{x_1} \xi^n \sqrt{(x_0 - \xi)(1 - x_0 + \xi)} d\xi \quad (2.5)$$

Эти интегралы с помощью замены переменных $s = \xi - x_0 + 1$ могут быть преобразованы к виду, позволяющему вычислить их с использованием тригонометрической подстановки $s = \sin^2 \varphi$.

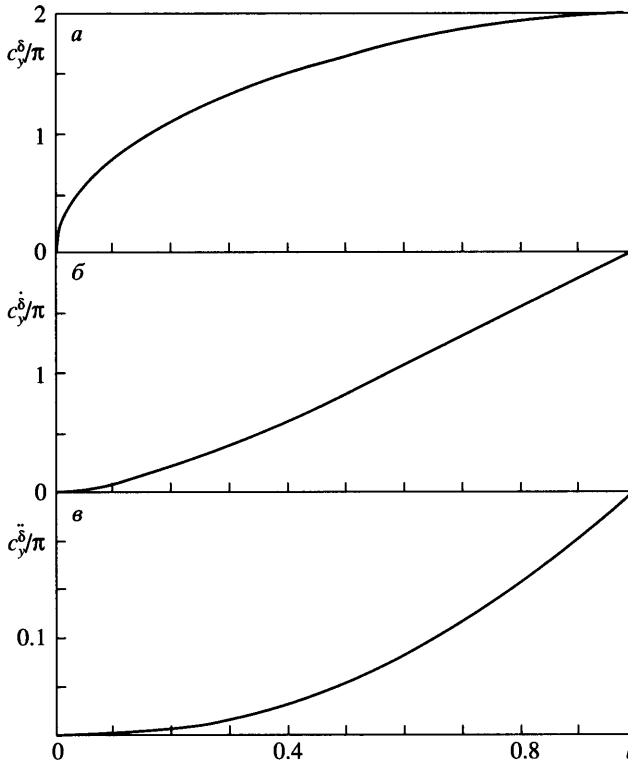
В общем виде можно записать выражения для зависимости от времени нестационарных аэродинамических коэффициентов

$$c_y(t) = c_{y3}^{\delta} \delta(t) + c_{y3}^{\dot{\delta}} \dot{\delta}(t) + c_{y3}^{\ddot{\delta}} \ddot{\delta}(t) + c_{y3}$$

$$m_z(t) = m_z^{\delta} \delta(t) + m_z^{\dot{\delta}} \dot{\delta}(t) + m_z^{\ddot{\delta}} \ddot{\delta}(t) + \left(x_0 - \frac{1}{4}\right) c_{y3} \quad (2.6)$$

$$c_{y3} = 2 \int_{s_0}^{s_1} \frac{u_2(s) ds}{\sqrt{(x_0 - 1 - \xi)(x_0 - \xi)}}$$

Здесь c_{y3} – нестационарная составляющая подъемной силы, обусловленная влиянием сошедшего вихревого следа. Следует отметить, что c_{y3} в случае нестационар-



Фиг. 2. Стационарные и нестационарные производные коэффициента подъемной силы вследствие динамического отклонения руля, $l = x_1 - x_0 + 1$

ного отклонения рулевой поверхности также приложена на одной четверти хорды профиля и создает соответствующий момент тангажа.

Таким образом, нестационарные аэродинамические нагрузки, обусловленные произвольным отклонением закрылка (руля), представляются суммой составляющих пропорциональных $\delta(t)$, $\dot{\delta}(t)$ и $\ddot{\delta}(t)$, а также составляющей вихревого следа, в которой содержится влияние предыстории движения. Аэродинамические производные по δ , $\dot{\delta}$ и $\ddot{\delta}$, вызванные нестационарным отклонением закрылка, выражаются через введенные выше интегралы (2.5)

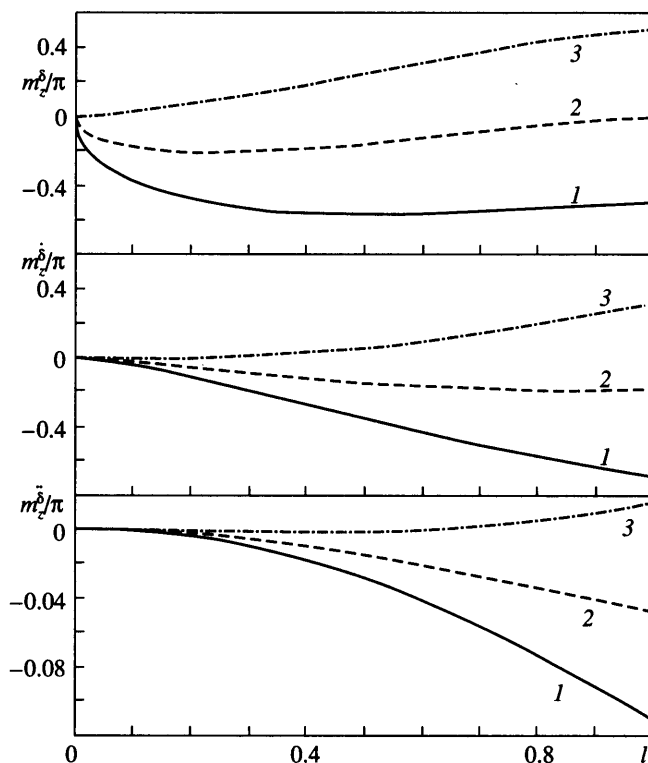
$$c_y^\delta = 4I_0, \quad m_z^\delta = 2(I_0 + 2I_1)$$

$$c_y^{\dot{\delta}} = 4(x_1 I_0 - I_1 + J_0), \quad c_y^{\ddot{\delta}} = 4(x_1 J_0 - J_1)$$

$$m_z^\delta = 2 \left[x_1 I_0 + 2 \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) I_1 - 2I_2 + \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) J_0 + J_1 \right]$$

$$m_z^{\ddot{\delta}} = 2 \left[x_1 \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) J_0 + \left(x_1 - x_0 + \frac{1}{4} \right) J_1 - J_2 \right]$$

Данные выражения для каждого конкретных значений x_0 и x_1 могут быть вычислены аналитически. Например, для случая $x_0 = 1/2$ (центровка находится в середине



Фиг. 3. Стационарные и нестационарные производные коэффициента момента тангажа вследствие динамического отклонения руля для различных центровок: 1–3 – $x_0 = 0, 0.25, 0.5$

профиля) и $x_1 = -1/4$ (длина закрылка равняется четверти хорды) аэродинамические производные, обусловленные отклонением руля, принимают значения

$$c_y^\delta = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}, \quad c_y^\delta = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad c_y^\delta = -\frac{\pi}{24} + \frac{3\sqrt{3}}{32}$$

$$m_z^\delta = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}, \quad m_z^\delta = -\frac{\pi}{48} + \frac{3\sqrt{3}}{64}, \quad m_z^\delta = -\frac{\pi}{96} + \frac{9\sqrt{3}}{512}$$

При произвольных x_0 и x_1 получение аналитических выражений достаточно затруднительно. На фиг. 2 приведены результаты численных расчетов производных c_y^δ/π , c_y^δ/π и c_y^δ/π для тонкого профиля в зависимости от длины закрылка. Для коэффициента подъемной силы эти производные не зависят от центровки профиля x_0 . На фиг. 3 приведены аналогичные результаты расчета производных m_z^δ/π , m_z^δ/π и m_z^δ/π для различных положений центровок профиля.

3. Для нахождения нестационарных аэродинамических нагрузок в случае произвольного отклонения руля решается интегральное уравнение (1.6) с целью нахождения функции разрыва скорости на вихревом следе u_2 и последующего вычисления со-

ставляющей аэродинамической нагрузки c_{y3} . Правая часть уравнения (1.6) для произвольного закона отклонения рулевой поверхности может быть представлена в виде

$$F(t) = -I_0\delta(t) - (x_1I_0 - I_1)\dot{\delta}(t)$$

где интегралы I_0 и I_1 являются функциями только длины закрылка l .

Уравнение (1.6) – интегральное уравнение Вольтерра первого рода со слабой (интегрируемой) сингулярностью. Алгоритм численного решения таких интегральных уравнений первого и второго рода дан в [7]. При численном решении используется быстрое преобразование Фурье, поэтому задача решается на равномерной сетке с шагом h , число узлов которой равно $N = 2^m + 7$. Исследованы условия сходимости и устойчивости, показано, что скорость сходимости численного решения к точному составляет $O(h^4)$.

В [6] эта методика использовалась при решении интегрального уравнения Вольтерра для нахождения функции разрыва скоростей в следе при неустановившемся движении тонкого профиля. В случае нестационарного отклонения рулевой поверхности в данном интегральном уравнении изменяется только правая часть, поэтому численный алгоритм здесь используется тот же.

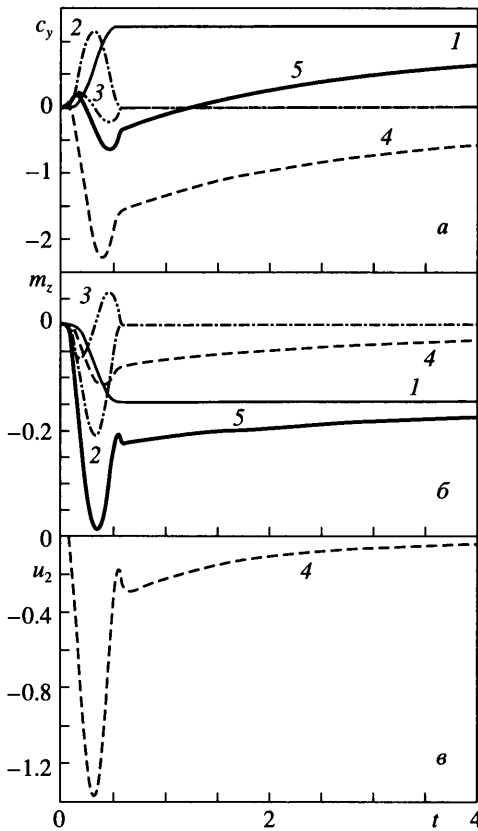
Результатом численного решения интегрального уравнения (1.6) является непрерывная функция разрыва скоростей в следе $u_2(t)$. Для нахождения нестационарной составляющей аэродинамических нагрузок в соответствии с выражением (2.6) необходимо вычисление определенного интеграла по вихревому следу. Этот интеграл также является слабо сингулярным, т.е. содержит интегрируемую особенность. Методика его численного определения на той же сетке, на которой получена функция $u_2(t)$, приведена в [6].

Обратимся к конкретным примерам. Опыт проведения расчетов показал, что результаты численного решения интегрального уравнения достаточно чувствительны к гладкости правой части. При разрывах и изломах в правой части в решении могут появляться колебания, для подавления которых необходимо существенно измельчать сетку, что, в свою очередь, приводит к увеличению требуемого машинного времени. Поэтому для описания пробного закона отклонения по времени органа управления выбрана специальная функция, представляющая собой гладкую “ступеньку”. Для получения класса таких функций использовался следующий алгоритм. Вторая производная искомой функции отклонения руля $\ddot{\delta}(t)$ задавалась на отрезке $t \in [t_1, t_2]$ в виде

$$\ddot{\delta}(t) = (t - t_1)[t - 1/2(t_1 + t_2)](t - t_2)$$

При других t функция $\ddot{\delta}(t) = 0$. Интегрированием этой функции с нулевыми начальными условиями находилась функция $\dot{\delta}(t)$. Повторное интегрирование дает функцию $\delta(t)$. Нормирование функций проводилось так, чтобы при $t > t_2$ получалось $\delta(t) = 1$. Таким образом, в численном решении задачи был использован класс ступенчатых функций таких, что при $t < t_1$, $\delta(t) = 0$, $t > t_2$, $\delta(t) = 1$, а при $t_1 \leq t \leq t_2$ функция $\delta(t)$ монотонно возрастает. При этом функция $\delta(t)$ имеет непрерывную первую и вторую производную. Следует отметить, что в линейной задаче амплитуда ступеньки не имеет значения.

В настоящей работе численно исследуется развитие нестационарных аэродинамических нагрузок на тонком профиле с использованием таких ступенчатых функций для закона отклонения руля. На фиг. 4 показаны результаты численных расчетов для профиля с $x_0 = 0.3$ и $x_1 = -0.45$, что соответствует центровке профиля, расположенной на 30% хорды, и длине закрылка, равной 25% хорды. Решение получено для безраз-



Фиг. 4. Нестационарные аэродинамические нагрузки профиля (а-в) при динамическом отклонении руля ($x_0 = 0.3$, $x_1 = -0.45$, $t_1 = 0.1$, $t_2 = 0.6$) для составляющих: 1 – квазистационарных, 2, 3 – пропорциональных $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$, 4 – обусловленных развитием вихревого следа; 5 – зависимости суммарных аэродинамических коэффициентов

ревого следа, наблюдается потеря подъемной силы. В дальнейшем коэффициент подъемной силы восстанавливается и постепенно возрастает до нового стационарного значения, соответствующего отклоненному закрылку. Но происходит это довольно медленно, так при прохождении профилем около трех хорд динамический коэффициент c_y составляет только около половины от его нового стационарного значения.

Проведенные расчеты для более быстрых и медленных отклонений рулевых поверхностей показали качественно аналогичные результаты. При быстрых отклонениях в переходные моменты существенно большее значение начинают играть члены, пропорциональные $\dot{\delta}(t)$ и $\ddot{\delta}(t)$. При медленных отклонениях нестационарные аэродинамические нагрузки приближаются к своим квазистационарным зависимостям. Составляющая вихревого следа везде запаздывает примерно одинаково, но эффект ее при медленных отклонениях рулевой поверхности ослабевает.

мерного времени $t \in [0, 4]$ с использованием сетки с $m = 10$ (общее количество ячеек равно $N = 1031$). При этом рулевая поверхность отклонялась по заданному квазиступенчатому закону за время от $t_1 = 0.1$ до $t_2 = 0.6$, т.е. полное отклонение закрылка происходит за время, при котором профиль пролетает половину хорды. На фиг. 4 показаны результаты расчета для суммарного нестационарного коэффициента подъемной силы c_y и его составляющих, а также аналогичные результаты для коэффициента момента тангажа m_z . Там же представлен график для численного решения интегрального уравнения Вольтерра (1.6) по нахождению функции разрыва скоростей в вихревом следе $u_2(t)$. Кривые различного типа соответствуют составляющим аэродинамических нагрузок: квазистационарным $c_y^\delta \delta(t)$ и $m_z^\delta \delta(t)$; пропорциональным $\dot{\delta}$ и $\ddot{\delta}$, а также обусловленным влиянием вихревого следа. Там же показаны и результаты для полных нестационарных зависимостей от времени рассматриваемых аэродинамических нагрузок.

Полученные данные позволяют заключить, что развитие нестационарных аэродинамических нагрузок при отклонении органов управления происходит с большим запаздыванием по сравнению с обычно используемым в практических приложениях квазистационарным подходом. Для коэффициента c_y в начальный момент наблюдается даже обратная реакция по отклонению органа управления, т.е. при быстром отклонении рулевой поверхности вниз для создания дополнительной подъемной силы в первоначальные моменты времени из-за динамических эффектов, связанных с развитием вих-

4. Полученные результаты численных расчетов свидетельствуют о заметном запаздывании при развитии нестационарных аэродинамических нагрузок для динамического отклонения органа управления. Развитый выше метод позволяет вычислять аэродинамические характеристики для заданного закона отклонения руля, но решать интегральные уравнения на каждом шаге интегрирования по времени динамической задачи затруднительно. В связи с этим здесь разрабатывается математическая модель для нестационарных нагрузок на профиле, вызванных отклонением органа управления, в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений во временной области. Для этого используется прием, примененный в [6] для разработки математической модели нестационарных аэродинамических характеристик при неустановившемся движении профиля.

На основании (2.6) для составляющей подъемной силы c_{y3} , отвечающей за предысторию движения, и интегрального уравнения (1.6) в частотной области можно записать

$$c_{y3} = 4[C(\omega) - 1][I_0\delta + (x_1I_0 - I_1)\dot{\delta}] \quad (4.1)$$

где $C(\omega)$ – классическая функция Теодорсена [8], используемая в теории нестационарного профиля для описания нестационарных аэродинамических нагрузок в частотной области. Это соотношение можно рассматривать как передаточную функцию и аппроксимировать $C(\omega) - 1$ динамическими звеньями первого, второго или более высокого порядка в зависимости от необходимого уровня точности. В [6] получены аппроксимации

$$C(\omega) - 1 = -\frac{0.5p}{p + \beta_1}$$

для первого порядка, где $\beta_1 \approx 0.3998$ при используемых здесь безразмерных единицах

$$C(\omega) - 1 = -\frac{ap}{p + \beta_1} - \frac{(0.5 - a)p}{p + \beta_2}$$

для второго порядка ($a \approx 0.2211$, $\beta_1 \approx 0.8597$, $\beta_2 \approx 0.1673$)

$$C(\omega) - 1 = -\frac{Ap}{p + \beta_1} - \frac{Bp}{p + \beta_2} - \frac{(0.5 - A - B)p}{p + \beta_3}$$

для третьего порядка ($A \approx 0.0936$, $B \approx 0.2915$, $\beta_1 \approx 1.3641$, $\beta_2 \approx 0.3798$, $\beta_3 \approx 0.0724$).

Выполняя обратное преобразование Лапласа, получим следующие динамические системы, приближенно описывающие динамические свойства составляющей c_{y3} для первого, второго и третьего порядков

$$\dot{q}_1 + \beta_1 q_1 = -2I_0\dot{\delta} - 2(x_1I_0 - I_1)\ddot{\delta}, \quad c_{y3} = q_1$$

$$\dot{q}_1 + \beta_1 q_1 = -4aI_0\dot{\delta} - 4a(x_1I_0 - I_1)\ddot{\delta}$$

$$\dot{q}_2 + \beta_2 q_2 = -4(0.5 - a)I_0\dot{\delta} - 4(0.5 - a)(x_1I_0 - I_1)\ddot{\delta}$$

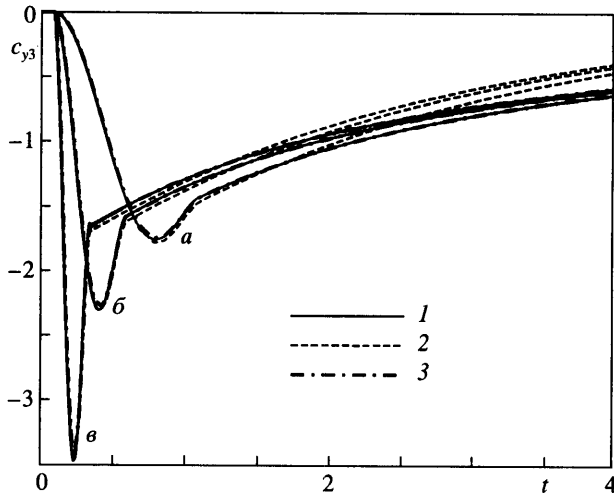
$$c_{y3} = q_1 + q_2$$

$$\dot{q}_1 + \beta_1 q_1 = -4AI_0\dot{\delta} - 4A(x_1I_0 - I_1)\ddot{\delta}$$

$$\dot{q}_2 + \beta_2 q_2 = -4BI_0\dot{\delta} - 4B(x_1I_0 - I_1)\ddot{\delta}$$

$$\dot{q}_3 + \beta_3 q_3 = -4(0.5 - A - B)I_0\dot{\delta} - 4(0.5 - A - B)(x_1I_0 - I_1)\ddot{\delta}$$

$$c_{y3} = q_1 + q_2 + q_3$$



Фиг. 5. Математическое моделирование запаздывания, обусловленного развитием вихревого следа, при квазиступенчатом отклонении руля за время: $a-b-t_2-t_1=1, 0.5, 0.25$; 1 – численное решение интегрального уравнения, 2, 3 – динамические системы 1-го и 2-го порядков

В этих выражениях q_i – некоторые внутренние переменные, используемые для описания динамики развития вихревого следа за профилем и его влияния на нестационарные аэродинамические нагрузки. При начале движения из установившегося состояния для интегрирования данных динамических систем следует использовать нулевые начальные условия для всех внутренних переменных.

Продемонстрируем на примере возможности аппроксимировать с помощью полученных динамических систем точные решения, полученные численно при решении интегральных уравнений Вольтерра. На фиг. 5 представлены результаты сравнения точных численных решений и математического моделирования с использованием динамических систем первого и второго порядков при отклонении руля за безразмерное время, соответствующие времени прохождения профилем одной (а), половины (б) и четверти хорды (в). Видно, что аппроксимация первого порядка удовлетворительно работает на начальных этапах, но затем несколько отклоняется от точных численных решений. Аппроксимация с помощью динамической системы второго порядка с точностью до толщины графика совпадает с результатом численного решения интегрального уравнения на всем рассмотренном интервале времени. Аппроксимация третьего порядка практически не отличается от результатов точного расчета.

В [6] показано также, что аппроксимация с помощью динамических систем хорошо работает и при произвольном движении профиля как твердого тела, а не только при квазиступенчатых изменениях кинематических параметров движения. Этого же следует ожидать и для произвольного закона отклонения органа управления. В линейной задаче это следствие достаточно очевидно, так как реакция линейной системы на произвольное возмущение может быть построена из ее реакции на ступеньку с помощью интеграла Дюамеля [2].

Заключение. Решена задача о нахождении нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на профиль при произвольном законе отклонения рулевой поверхности на его задней кромке. При вычислениях использован алгоритм численного решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода для нахождения функции разрыва касательной составляющей скорости в следе. Разработана также методика

математического моделирования нестационарных аэродинамических нагрузок путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для внутренних переменных, описывающих эффекты запаздывания, связанные с развитием вихревого следа за профилем. Характерные времена запаздывания определены при аппроксимации функции Теодорсена переходной функцией необходимого порядка. Показано, что модель второго порядка хорошо качественно и количественно описывает все наблюдаемые динамические явления. При добавлении этой системы к системе уравнений динамики полета или аэроупругости появилась возможность исследовать влияние предистории движения на устойчивость и управляемость полета. Следует отметить, что дополнительная система для учета динамики развития нестационарных нагрузок при произвольном отклонении руля получилась той же самой, что и для учета предистории движения по углу атаки и угловой скорости тангажа. Таким образом, к динамическим уравнениям движения профиля добавились только два дифференциальных уравнения для нестационарных аэродинамических нагрузок. Правда, в правые части этих уравнений вошли функции, зависящие от угла атаки, угловой скорости тангажа и угла отклонения руля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 03-01-00918), а также гранта ведущих научных школ НШ-2001.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов // Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука. Физматлит, 1998. 811 с.
2. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
3. Goman M.G., Khrabrov A.N. State-space representation of aerodynamic characteristics of an aircraft at high angles of attack // J. Aircraft. 1994. V. 31. № 5. P. 1109–1115.
4. Некрасов А.И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 258 с.
5. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 443 с.
6. Храбров А.Н. Математическое моделирование влияния схода вихрей на нестационарные аэродинамические характеристики профиля при его произвольном движении // Учен. зап. ЦАГИ. 2002. Т. 33. № 3–4. С. 3–17.
7. Hairer E., Lubich Ch., Schlichte M. Fast numerical solution of weakly singular Volterra integral equations // J. Comput. and Appl. Math. 1988. V. 23. № 1. P. 87–98.
8. Theodorsen T. General theory of aerodynamic instability and mechanism of flutter // NACA TR. 1935. № 496. 10 p.

Москва

Поступила в редакцию
21.X.2004