МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2005

УДК 532.5.013.4:536.24

© 2005 г. А. М. ПЫЛАЕВ

ЗАДАЧА О КРИТИЧЕСКИХ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ГОРИЗОНТАЛЬНО- ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЯХ

Представлены результаты анализа линейных возмущений равновесия вязкой теплопроводной жидкости или газа в полостях с сечениями простой геометрии. Рассмотрены движения как плоские, так и периодические в направлении горизонтальной образующей граничной поверхности. Рассчитаны варианты как с постоянством, так и с периодической модуляцией ускорения поля массовых сил. Решения задачи относительно функции тока (или вертикальной составляющей скорости) и температуры представлялись в форме двойных или тройных рядов типа Фурье. Для коэффициентов в разложениях получена бесконечная система уравнений, допускающая редукцию. Выявлено хорошее согласование результатов с известными данными.

Ключевые слова: приближение Буссинеска, модуляции, плоские и пространственные возмущения, бесконечные системы, изолинии.

Цель и содержание проведенного исследования обусловлены потребностями расчета теплового режима приборных отсеков космических аппаратов в условиях слабой гравитации. Принято во внимание возможное многообразие как геометрии каналов или прослоек в элементах конструкций, так и вариантов неравномерности распределения температуры T на границе полостей (за счет размещенных в отсеках тепловых источников). Представлялись возможными или реализуемыми и варианты с выполнением обязательного условия механического равновесия неравномерно нагретой жидкости. В связи с этим была предпринята разработка метода анализа линейных возмущений равновесия вязкой жидкости, газа или жидкой фазы теплоаккумулирующего материала в полостях, неограниченных в направлении координаты z, с сечениями, имеющими несложное аналитическое описание границы. Предусмотрен анализ возмущений как плоских, т.е. не зависящих от z и представлявшихся наиболее опасными в смысле нарушения равновесия, так и периодических по z. Учтена возможность линейных гармонических колебаний полости вместе с жидкостью.

Полученные результаты могут иметь и другие приложения. Множество критических движений представляет естественный полный базис для любого конвективного движения в полости [1]. Это обстоятельство может быть полезно при итерационном аналитическом решении нелинейных задач.

Обсуждаемая проблема представляет собой специфический случай явления конвективной устойчивости. В монографиях [2, 3] и публикациях [4–16] рассматривались только частные варианты области решения.

Так как применение численного метода установления стационарного режима затруднительно (время установления по мере приближения к порогу устойчивости растет), обращено внимание на аналитические возможности решения. Часто использовался подход [2] с реализацией метода Бубнова – Галёркина, с решениями для скорости V или функции тока ψ, лишь оптимальными в смысле приближения к точным, без возможности оценки погрешности в определении критических чисел Рэлея $\{Ra_{cr}\}$.

Здесь предпринимается определенная модернизация названного подхода с построением решений в форме рядов типа Фурье, с редуцируемой алгебраической системой уравнений для коэффициентов в разложениях и с выявлением значений $\mathrm{Ra_{cr}}$ из условий нетривиальности решений.

1. Постановка задачи. К уравнениям конвекции в приближении Буссинеска применена линейная теория устойчивости [2]. Полученные соотношения подстановкой значений V, $T_0 + T_1$, $p_0 + p_1$ для скорости (м/с), температуры (К) и давления (Па) соответственно приведены к безразмерному виду; в качестве масштабов приняты L, $\theta_0 L$, a/L, $L^2/(\nu a)^{0.5}$, $\nu\rho_0 a/L^2$ последовательно для расстояния, температуры , скорости, времени и давления. Здесь ν, a, ρ, θ_0 – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, плотности и константа равновесного градиента температуры соответственно; $L \cdot X$ и L – габаритные размеры в направлениях осей x и y.

Уравнения записаны с учетом возможности возникновения конвекции и в условиях, когда один из параметров, характеризующих равновесие, зависит от времени. Предусмотрены наиболее интересные случаи периодической модуляции параметра – равновесного градиента температуры или ускорения поля тяжести

$$g = g_0(1 + \chi\sin\Omega\tau); \quad \theta = \theta_0(1 + \Gamma\sin\Omega\tau), \quad \Gamma \ll a/L^2 \tag{1.1}$$

Здесь Γ – относительная амплитуда модуляции; Ω и χ – безразмерные частота и параметр модуляции; справа – условие, при выполнении которого можно пренебречь пространственной неоднородностью модуляции градиента температуры.

Использованы две возможности преобразования выведенных безразмерных уравнений относительно V, T_1 и p_1.

Для трехмерных течений из уравнений исключены давление p_1 и горизонтальные компоненты скорости V_x и V_z; для этого к векторному уравнению движения применены операция rotrot и проектирование на ось y. Для возмущения T_1 (с волновым числом n) и для вертикальной компоненты скорости V_y введена подстановка

$$T_1 = t\cos(nz), \quad V_y = \upsilon\cos(nz); \quad \upsilon = \upsilon(y, x, \tau), \quad t = t(y, x, \tau) \tag{1.2}$$

В итоге получены следующие два уравнения для амплитуд υ и t

$$\Delta\Delta\upsilon + \mathrm{Ra}\Delta_1 t(1 + \chi\sin\Omega\tau) = \frac{\partial(\Delta\upsilon)}{\partial\tau}\mathrm{Pr}^{-0.5}, \quad \Delta_1\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - n^2\varphi \tag{1.3}$$

$$\Delta t + (1 + \Gamma\sin\Omega\tau)\upsilon = \frac{\partial t}{\partial\tau}\mathrm{Pr}^{0.5}; \quad \Delta\varphi = \Delta_1\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \tag{1.4}$$

Здесь Pr – число Прандтля; φ и ϑ – общее обозначение величин или их комплексов.

Для анализа плоских течений вместо уравнений относительно V, T_1 и p_1 применена система с безразмерной функцией тока ψ

$$\Delta\Delta\psi + \mathrm{Ra}\frac{\partial T_1}{\partial y}(1 + \chi\sin\Omega\tau) = \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\tau}\mathrm{Pr}^{-0.5}, \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \tag{1.5}$$

$$\Delta T_1 + (1 + \Gamma\sin\Omega\tau)\frac{\partial\psi}{\partial x} = \mathrm{Pr}^{0.5}\frac{\partial T_1}{\partial\tau}; \quad V_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.6}$$

При постоянных g и θ правые части в (1.3), (1.4) или в (1.5), (1.6) принимались равными нулю. Рассматривалась область решения

$$x \in (x_1; x_2), \; y \in (y_1; y_2); \; x_1 = 0, \; x_2 = X; \; y_i = y_i(x), \; 0 \le y_2 - y_1 \le 1, \; i \in \{1; 2\}$$

Граничные условия выбирались из соотношений

$$y \in y_i:\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi = 0; \quad x \in x_1:\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = \varphi = 0; \quad \varphi \in \{\upsilon, \psi\}$$
$$y \in y_i, \quad x \in x_i, \quad \vartheta \in \{t, T_1\}:\ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^{\gamma-1} \vartheta^{2-\gamma} = 0 \tag{1.7}$$

где γ – род условий для температуры ($\gamma \in \{1; 2\}$). Основная цель анализа – отыскание действительных значений Ra > 0 (собственных чисел), обеспечивающих нетривиальное решение либо $\{\upsilon, t\}$ для системы (1.3), (1.4), (1.7), либо $\{\psi, T_1\}$ для системы (1.5)–(1.7). Именно к доказательству существования таких значений Ra и сводится доказательство неустойчивости равновесия жидкости.

2. Метод решения. Собственные функции – $\{\upsilon, t\}$, либо $\{\psi, T_1\}$ – целесообразно искать в виде линейных суперпозиций M базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям. При удачном выборе базиса хорошие результаты получаются уже при сравнительно небольшом числе M. Но в общем случае с конечным M применение метода приводит лишь к принципиально приближенному решению. Здесь использованы разложения типа

$$\upsilon = \sum_{w=0}^{J} \sum_{r=1}^{K} \sum_{s=1}^{N} (A_\phi \eta_w + U_\phi \zeta_w) H f_4 \Pi_y^2, \quad \psi = \upsilon \Pi_x$$
$$\vartheta = \sum_{w=0}^{J} \sum_{r=1}^{K} \sum_{s=1}^{N} (B_\phi \eta_w + V_\phi \zeta_w) f_2 \Pi_y \Pi_x^{\gamma-1}, \quad \vartheta \in \{t, T_1\}$$
$$H = \sin(\pi r x/X)\sin(\pi s y), \quad f_\phi = 1/(r^\varphi + s^\varphi), \quad \Pi_\varphi = \prod_i (\varphi - \varphi_i) \tag{2.1}$$
$$\eta_w = \cos(w\Omega\tau), \quad \zeta_w = \sin(w\Omega\tau), \quad \phi = wrs$$

Зависимости (2.1) подставлялись в уравнения (1.3), (1.4) или (1.5), (1.6); выполнялось дифференцирование и переразложение выражений в левых частях уравнений в ряды уже использованного типа, но с гораздо более сложной структурой коэффициентов. Наконец, приравнивание каждого из таких коэффициентов их значениям в правых частях (нулевым) привело к системам уравнений для коэффициентов $\{A_\phi, U_\phi, B_\phi, V_\phi\}$. Для каждой пары уравнений, (1.3),(1.4) или (1.5), (1.6), выведены две совокупности ($n = 1; 2$) соотношений. При $J = 0$ без индекса w получено, что

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{s=1}^{S} [B_{rs} E_{rs}^{kl} + A_{rs} F_{rs}^{kl}] = 0, \quad k = l = 1, \ldots, N, \quad R = S = N \tag{2.2}$$

$$F_{rs}^{kl} = f_4 \sum_{p,q} b_{pq}(G(M) + 2G(2,2)\delta_{n1}); \quad E_{rs}^{kl} = \mathrm{Ra} f_2 \sum_{p,q} d_{pq} G(W)$$
$$(M, W) = (4, 0; 1)\delta_{n1} + (1; 0, 2)\delta_{n2}; \quad G(j) = G(j; 0) + G(0; j) \tag{2.3}$$

В (2.3) использованы обозначения

$$G(i, j) = S_{kr}^{xp,i} S_{ls}^{yq,j}; \quad S_{kr}^{\varphi p,j} = -0.5 u_{0.5j} r \sum_I I H_{k+Ir}^p, \quad j \in \{0; 2; 4\}$$

$$S_{kr}^{\varphi p,1} = 0.5r\left(\sum_r (D_p - pH_{k+Ir}^{p-1})(k+Ir)^{-1}\right), \quad I \in \{1,-1\}, \quad u_j = (-1)^j$$

$$D_p = L_\varphi^p u_{k+r}(1-\delta_{p0}) + (u_{k+r}-1)\delta_{p0}, \quad L_\phi = \delta_{\varphi y} + X\delta_{\varphi x}$$

$$H_k^p = \int_0^{L_\varphi} \varphi^p \cos(k\varphi\pi L_\varphi^{-1})d\varphi, \quad H_k^p = (L_\varphi^{p+I}(p+1)^{-1} - h_k^{\varphi p})\delta_{k0} + h_k^{\varphi p}, \quad |h_k^{\varphi p}| < pL_\varphi^{p+1}(k\pi)^{-2};$$

$$\varphi = \vartheta \to \delta_{\varphi\vartheta} = 1; \quad \varphi \ne \vartheta \to \delta_{\varphi\vartheta} = 0$$

Для коэффициентов в (2.2) получены оценки:

$$rs \ne kl, \quad n = 1\colon |F_{rs}^{kl}| < C_1\left|\sum_{p,q} h_{pq}b_{pq}\right|, \quad |E_{rs}^{kl}| < C_2\mathrm{Ra}\left|\sum_{p,q} d_{pq}\Phi(r^2+s^2)^{-1}\right|$$

$$rs \ne kl, \quad n = 2\colon |F_{rs}^{kl}| < C_2\left|\sum_{p,q} b_{pq}(\Phi + h_{l-s}^{yq}rD_p(k-r))^{-1}(r^4+s^4)^{-1}\right|$$

$$|E_{rs}^{kl}| < C_1\mathrm{Ra}\left|\sum_{p,q} d_{pq}h_{pq}\right|; \quad \Phi = h_{k-r}^{xp}sD_q(l-s)^{-1} \tag{2.4}$$

$$rs = kl, \quad |F_{rs}^{kl}|_{n=1} > C_3 \approx \left|\sum_{p,q}\Psi_{pq}b_{pq}\right|, \quad |E_{rs}^{kl}|_{n=2} > C_4 \approx \mathrm{Ra}|\Psi_{pq}d_{pq}| \tag{2.5}$$

$$h_{pq} = h_{k-r}^{xp}h_{l-s}^{yq}; \quad \Psi_{pq} = L_y^{q+1}((p+1)(q+1))^{-1}; \quad C_1 \approx C_2 \approx 1$$

Соотношения (2.2) рассматриваются как система уравнений для

$$\{A_{rs}\}, \{B_{rs}\}; \quad \{r\} = \{s\} = 1, \dots, N \tag{2.6}$$

Удобно последовательно согласованное расположение двух множеств из (2.6) и двух множеств уравнений из (2.2) с $n \in \{1; 2\}$ – по возрастанию сумм $(r + s)$ и $(k + l)$ соответственно; в пределах же каждой группы с совпадающей суммой размещение возможно в порядке роста 1-го индекса (r или k). В частности $\{\{A_{rs}, s = 1, \dots, m-1\}, m = r + s = 2, \dots, 2N\} = \{A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{13}, A_{22}, A_{31}, A_{14}, A_{23}, A_{32} \dots\}$.

При таком подходе коэффициенты F_{rs}^{rs} или E_{rs}^{rs} оказываются диагональными и преобладающими по модулю в любой строке матрицы коэффициентов для уравнений из (2.2). И удается доказать неравенство, обеспечивающее возможность редукции [17]

$$\sum_{n,k,l,r,s} (Z_E^2 + Z_F^2)(1 - \delta_{(rs)(kl)})(\varphi_{rs}^{rs})^{-2} < \infty, \quad \varphi = F\delta_{n1} + E\delta_{n2} \tag{2.7}$$

Выполнение (2.7), где $Z_\varphi = \varphi_{rs}^{kl}$, – следствие ограниченности интеграла

$$\int\int_{k,l} \mathrm{dk\,dl} \int\int_{r,s} \mathrm{dr\,ds}((k-l)(r-s))^{-4}, \quad (k,l,r,s) \in \{1, \dots, \infty\}, \quad |k-l||r-s| \ge 1$$

Представленное здесь для случаев с $J = 0$ в (2.1) пояснение метода (2.2)–(2.7) обобщается и применительно к вариантам с $J > 0$.

Итак, решение задачи сведено к анализу определителей Θ (Ra) конечной системы типа (2.2). Значения таких определителей в силу нетривиальности решения обращаемых в нуль при искомых значениях Ra вычислялись с привлечением внешней памяти ПК – с последовательным исключением групп переменных, с применением обращения матриц. Функция Θ(Ra) – сложная, часто с большим диапазоном абсолютных значений в пределах даже весьма узкого интервала изменения ее знака. Функции ψ и t также чувствительны к изменению Ra , но в меньшей степени.

3. Результаты расчетов. Расхождение результатов в приведенных здесь таблицах 1–3 отражает различие расчетных вариантов – по геометрии области решения, характеру граничных условий для температуры и виду зависимости ускорения поля тяжести от времени. В каждой из строк представлено по две группы Ra – нулей функционального определителя, умноженных на 10^{-3} и записанных в порядке возрастания. Конечно, более надежны в вычислении и практически более интересны первые два – три из предлагаемых значений.

С целью компактности пояснений применены обозначения типа

$$\mathrm{Ra}_{ijk}, \mathrm{Ra}_{ijk*}; \quad i = 1, \ldots, 12, \quad j = 1, \ldots, 6, \quad k = 1, \ldots, 6 \tag{3.1}$$

где i – N группы Ra – нулей в таблице, j – N строки в составе группы, k – N значения Ra в порядке возрастания. Индекс * отмечает данные литературных источников; за исключением 12-й группы Ra – нулей, информация представлена лишь для вариантов, допускающих ее частичное сопоставление с такими данными.Цифры или буквы в индексах могут разделятся запятыми. Полное или неполное цифровое выражение индекса типа ijk относится к конкретному значению $\mathrm{Ra_{cr}}$ или к множеству $\{\mathrm{Ra_{cr}}\}$ с какой-либо общей характеристикой. Например, Ra_{92k*} – известное множество значений $\{\mathrm{Ra_{cr}}\}$ – при условиях однозначности для 2-й строки ($j = 2$) 9-й группы Ra – нулей ($i = 9$).

1). Зависимость результатов анализа от числа базисных функций. В табл. 1 представлена информация для течений в полостях с квадратным сечением при $g = \mathrm{const}$ ($i = 1$) и с прямоугольным сечением ($X = 10$, $i = 2$) при условиях: $\chi = 4.5$, $\Omega = 100$, $\mathrm{Pr} = 7$ в (1.1). Вертикальные и горизонтальные границы приняты идеально теплоизолированными и теплопроводными соответственно. Приведены по три первых значащих цифры для $\{\mathrm{Ra_{cr}} \cdot 10^{-3}\}$ – в порядке их возрастания – в строках 1–3 для плоских, а в строках 4–6 для пространственных ($n = 4$, см. (1.2)) течений. Последовательно размещены в 1-й группе результаты, полученные при $K = N \in \{4; 5; 7; 10; 12; (14 \text{ или } 16)\}$, а во 2-й группе – при $K = 14$, $N = 7$, $J + 1 = 2, \ldots, (4 \text{ или } 5)$ (см. (2.1)), затем при $N = 7$, $J + 1 = 4$, $K \in \{20; 8\}$. Видно, что оптимальное число базисных функций относительно невелико – $K \cdot N \cdot (1 + J) \in \in \{7 \cdot 7 \cdot 1, \ldots, 14 \cdot 7 \cdot 4\}$ и вполне реализуемо на ПК; в ответственных случаях оно может уточняться в процессе решения.

2). Анализ плоских возмущений. Двухстрочные подгруппы значений $\mathrm{Ra_{cr}} \cdot 10^{-3}$ при $i = 3$ (табл. 2) представлены последовательно для полостей с квадратным, круглым и прямоугольным (при отношении высоты к ширине 1:10) сечениями. Теплопроводность (идеальная) учитывалась при $j \in \{2, 4, 6\}$ для всей границы, а при $j \in \{1, 3, 5\}$ только для ее плоских горизонтальных участков.

Значение Ra_{322} согласуется с результатом [8] – $\mathrm{Ra_{cr}} = 5.03 \cdot 10^3$. Дополнительно к результатам с. 1 определены, в частности, значения $\mathrm{Ra}_{32.10} = 3.420 \cdot 10^3$ и $\mathrm{Ra}_{32.11} = 3.853 \cdot 10^3$. Вместе с Ra_{322} и с Ra_{323} эта подгруппа $\{\mathrm{Ra_{cr}}\}$ мало отличается от представленной в [9] – $\mathrm{Ra_{cr}} \cdot 10^{-3} \in \{5.099; 8.495; 30.080; 36.600\}$.

Очевидно практическое совпадение Ra_{311} и $\mathrm{Ra_{cr}} = 2.586 \cdot 10^3$ (см. [10]). Значения Ra_{33k} согласуются с приведенными в [11]–{1.352; с погрешностью до 1.4%: 5.62;

Таблица 1

j	$k = 1$	2	3	4	5	6	$k = 1$	2	3	4	5
	$\mathrm{Ra}_{1jk} \cdot 10^{-3}$						$\mathrm{Ra}_{2jk} \cdot 10^{-3}$				
1	2.76	2.68	2.54	2.50	2.46	2.48	4.99	5.57	5.43	5.43	5.37
2	3.91	4.10	4.14	4.03	4.02	3.99	13.8	12.1	12.6	12.7	12.4
3	6.85	6.76	6.82	6.90	6.83	6.80	15.8	16.5	16.5	16.5	16.4
4	2.72	2.85	2.95	2.94	2.91	2.91	5.76	5.48	5.43	5.45	5.35
5	3.72	3.77	3.74	3.74	3.85	3.85	6.92	6.96	6.94	6.96	6.92
6	5.28	5.38	5.53	5.34	5.45	5.45	17.7	17.8	17.9	17.8	17.9

Таблица 2

j	$k = 1$	2	3	4	5	6
	$\mathrm{Ra}_{3jk} \cdot 10^{-3}$					
1	2.4725	4.2704	7.0505	10.376	13.039	16.046
2	2.8023	5.0958	8.3753	9.3359	15.949	18.294
3	0.1334	0.5456	0.7466	1.3261	2.4925	3.1025
4	0.4217	0.7444	1.1033	1.9126	3.2156	3.5680
5	1.7375	2.7626	3.4688	7.1243	12.406	19.237
6	2.1613	4.0097	5.582	9.3375	13.13	17.313
	$\mathrm{Ra}_{4jk} \cdot 10^{-3}$					
1	2.9795	5.2178	7.0750	8.8369	10.032	17.260
2	2.8437	4.2641	6.0562	9.9594	11.650	18.258
3	3.505	5.2547	7.909	9.3602	13.809	18.053

13.55; 22.88} $\cdot\ 10^2$. Результаты, близкие к Ra_{34k}, опубликованы в [11]–{4.082; с погрешностью до 14%:7.43;32.58; 32.91} $\cdot\ 10^2$ – и [12] – $\mathrm{Ra}_{341*} = 4.069 \cdot 10^2$.

В связи с информацией в строках 5 и 6 уместно вспомнить результаты, полученные в [13] для плоских слоев, неограниченных в направлениях x и z. Для таких областей (слоев) возможны нейтральные возмущения типа

$$t = t(y)e(x,z), \quad \psi = \psi(y)e(x,z); \quad e(x,z) = \exp[(-1)^{1/2}(n_1x + n_2z)] \qquad (3.2)$$

Здесь $n^2 = n_1^2 + n_2^2$ и $t(y)$, $\psi(y)$ – вещественные волновые числа и амплитуды возмущений; $n \in \{n_m, m = 1, \ldots, \infty\}$. Для каждого из чисел n_m рассмотрено множество значений $\{\mathrm{Ra_{cr}}\}_m$ – с удовлетворением выражений (3.2) задаче типа (1.5)–(1.7). С учетом всех таких множеств для нижних десяти уровней неустойчивости приведены парные группы соответствующих значений

$$\{(\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}m};\, n_m),\, m \in 1, \ldots, 10\} = \{(1.71;\, 3.116), (17.61;\, 5.36), (75.71;\, 7.58), \ldots\} \qquad (3.3)$$

Таблица 3

j	$k=1$	2	3	$k=1$	2	3
		$\mathrm{Ra}_{5jk}\cdot 10^{-3}$			$\mathrm{Ra}_{6jk}\cdot 10^{-3}$	
1	0.0921	0.3972	0.7953	0.2530	0.6714	1.1329
2	0.2516	0.4949	0.8159	0.2780	0.7835	1.1756
3	0.2973	0.5108	1.0115	0.3969	0.5982	0.9530
		$\mathrm{Ra}_{7jk}\cdot 10^{-3}$			$\mathrm{Ra}_{8jk}\cdot 10^{-3}$	
1	1.6762	2.1185	4.1997	1.8349	3.2090	5.6959
2	1.7063	2.8062	5.2324	1.8250	3.1875	6.0273
3	1.9136	3.3212	5.8603	2.8244	4.2253	5.8060
		$\mathrm{Ra}_{9jk}\cdot 10^{-3}$			$\mathrm{Ra}_{10,jk}\cdot 10^{-3}$	
1	2.3344	11.113	17.103	3.9375	4.6625	12.4450
2	3.3477	7.1771	19.990	4.3092	7.2435	12.8282
3	2.2871	12.336	20.211	3.9961	6.6875	11.4375
4	2.5039	9.2538	19.066	4.5461	7.6331	11.3937
5	2.5597	10.142	16.175	3.6613	7.0156	11.0938
		$\mathrm{Ra}_{11,jk}\cdot 10^{-3}$			$\mathrm{Ra}_{12,jk}\cdot 10^{-3}$	
1	5.4287	12.606	16.475	2.7891	4.30078	7.75049
2	4.2142	9.9570	18.509	2.8788	6.61115	13.9062
3	3.6980	8.9059	18.067	2.6843	4.83594	8.61711
4	3.6350	7.7881	15.532	2.6004	4.08252	8.78517
5	5.4316	6.9438	17.881	3.5498	7.39990	9.10937

Среди чисел $\{\mathrm{Ra}_{3jk};\ j = 5, 6\}$ при $k = 1$ и $k = 6$ есть и значения, достаточно близкие к $\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}1}$ и $\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}2}$ из (3.3) соответственно. Сопоставление множества $\{\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}m},\ m \in \{3, \ldots, 10\}\}$ из (3.3) с подгруппой выборочных значений $\{\mathrm{Ra}_{3jk};\ j = 5, 6\}$ при $k > 6$ выявляет уже практическое совпадение.

Значит для рассмотренных каналов (с $X = 10$) в основе нейтральных возмущений, удовлетворяющих (1.5)–(1.7) при поясненных выборочных значениях $\{\mathrm{Ra}_{3jk};\ j = 5, 6\}$, лежат гармоники с однозначно соответствующими числами (n_m из (3.3) для $\mathrm{Ra}_{3jk} \approx \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}m}$). Но в чистом виде эти гармоники задаче (1.5)–(1.7) уже не удовлетворяют.

Представляют интерес следующие взаимосвязи при

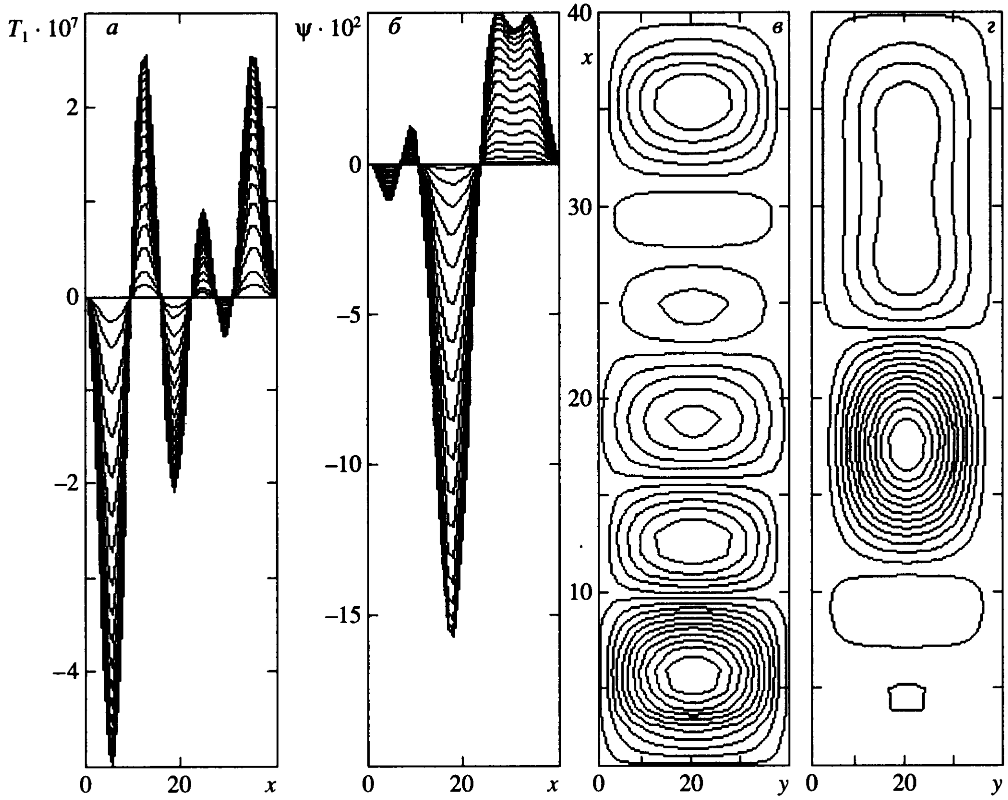
$$k = 1, \ldots, 5, \quad j \in \{1, 3, 5\}:\ \mathrm{Ra}_{3jk} < \mathrm{Ra}_{3,\,j+1,\,k} < \mathrm{Ra}_{3j,\,k+1} \tag{3.4}$$

а именно перемежаемость значений $\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$ для вариантов с $n = 0$ и с различием только условий для температуры. Соотношения типа (3.4) подтвердились и во всех других рассмотренных автором вариантах.

3). Анализ пространственных возмущений. Четвертая группа Ra – нулей (табл. 2) и группы 5–8 (табл. 3) последовательно соответствуют тем же вариантам, для которых в строках 2–6 3-й группы (табл. 2) приведены значения $\{\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}\}$ при $n = 0$. Здесь номер строки – значение n в (1.2), т.е. $n = j$.

Числа $\{\mathrm{Ra}_{i11},\ i \in \{5, 6\}\}$ в качестве минимальных по n значений $\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$ вполне сопоставимы с данными в [14]–{ 96; 260 }.

Можно добавить, что числа Ra_{821} и Ra_{321} неплохо согласуются и со значениями $\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} \approx 1.9 \cdot 10^3$ и $\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} \approx 3.5 \cdot 10^3$, полученными в [15] для полостей в виде прямоугольных параллелепипедов единичной высоты с размерами в основании 6×6 и 6×1. Следует учитывать, что $\{\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}\}$ с увеличением размеров основания плавно убывают к значению $\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} = 1.708 \cdot 10^3$ ((3.3)).



Фиг. 1. Зависимости $T_1 \cdot 10^7$ (*а*), $\psi \cdot 10^{12}$ (*б*) от x и изолинии для T_1 (*в*), ψ (*г*) при $\mathrm{Ra_{cr}} = \mathrm{Ra}_{321} = 2802$

Анализ представленных для групп 3– 8 и других полученных результатов приводит к выводу об отсутствии пересечений интервалов для $\{\mathrm{Ra_{cr}}\}$ даже близлежащих столбцов:

$$\max_j \mathrm{Ra}_{ijk} < \min_j \mathrm{Ra}_{ij,\,k+1}, \quad j = n \geq 1, \quad k \geq 1 \tag{3.5}$$

4). Анализ возмущений при модуляции ускорения поля тяжести. Значения Ra – нулей в группах 9–12 (табл. 3) получены для полостей с прямоугольным ($X = 10$; $i = 9, \ldots, 11$) и с квадратным ($i = 12$) сечениями. Вертикальные участки границы полости при $i = 9, \ldots, 11$ идеально теплоизолированы. В остальных случаях – идеальная теплопроводность. Здесь $j = n + 1$ (см. (1.2)), а в (1.1) принято,что

$$(\chi;\, i) \in \{(3;\, 9),\, (4.5;\, 10,\ldots,12)\}, \quad (\Omega;\, i) \in \{(50;\, 9{,}10),\, (100;\, 11{,}12)\}$$

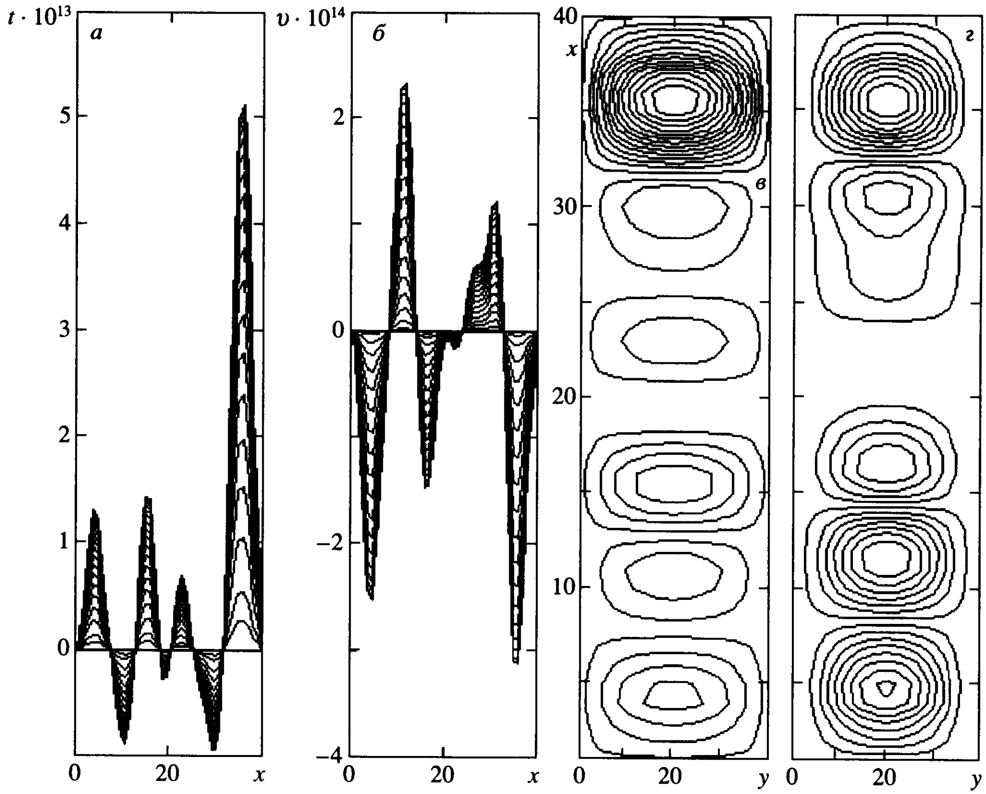
$$\mathrm{Pr} = N = 7,\ K = 14,\ J = 4$$

В группах 9–11 выявлены следующие взаимосвязи минимальных $\mathrm{Ra_{cr}}$ и волновых чисел (учтено,что $3635 \approx 3698$)

$$\{(\mathrm{Ra_{cr,\,min}};\, n),\quad i \in 9, \ldots, 11\} = \{(2287;\, 2),\, (3661;\, 4),\, (3698;\, 2)\}$$

В [16] получены аналогичные результаты для горизонтального слоя с твердыми границами

$$\{(\mathrm{Ra_{cr,\,min}};\, n)_*\} \approx \{(2500;\, 2),\, (3600;\, 4.1),\, (4000;\, 2)\}$$



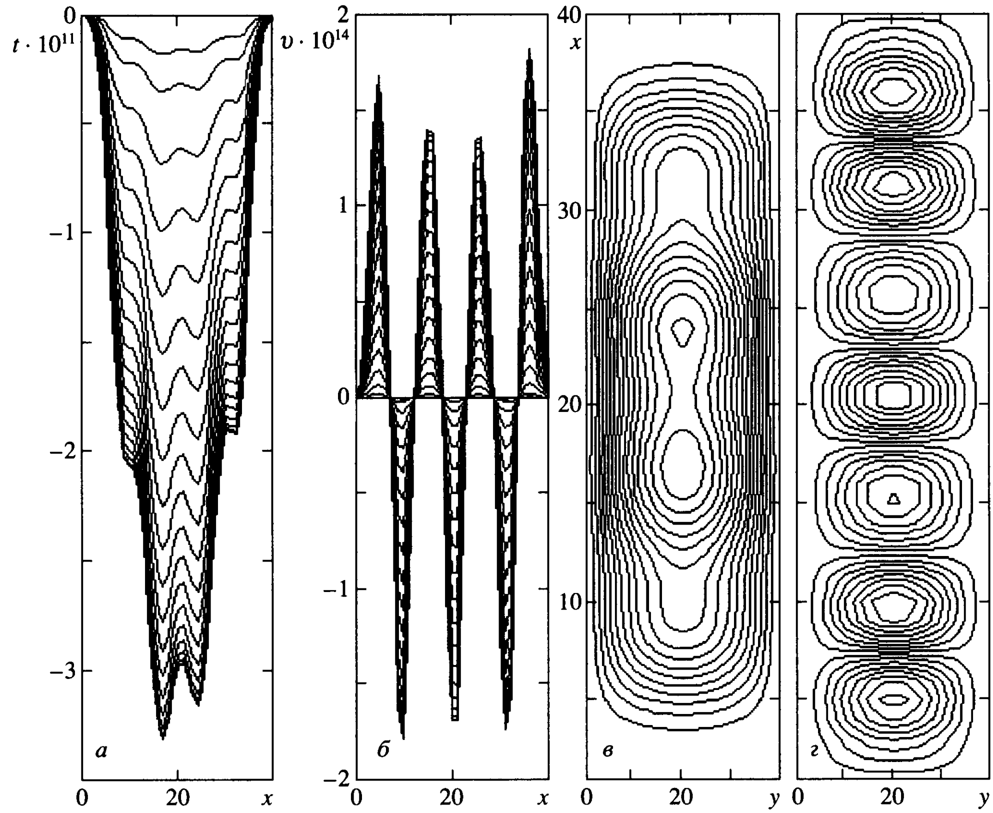
Фиг. 2. Зависимости $t \cdot 10^{13}$ (*а*), $v \cdot 10^{14}$ (*б*) от x и изолинии для t (*в*), v (*г*) при $\mathrm{Ra_{cr}} = \mathrm{Ra}_{711} = 1676$

Из таблиц видно, что значениям $\{\mathrm{Ra_{cr,\,min}},\ i = 4, \ldots, 12\}$ последовательно соответствуют индексы

$$\{ij\} = \{32;\ 51;\ 61;\ 71;\ 82;\ 93;\ 10.5;\ 11.4;\ 12.4\},\ k = 1 \qquad (3.6)$$

Фигуры 1–3 включают по четыре рисунка с температурными (*а*, *в*) и скоростными (*б*, *г*) характеристиками движений, возникающих при значениях $\mathrm{Ra_{cr}}$ с $\{ij\} = \{32;\ 71;\ 11.4\}$, $k = 1$. Справа представлены изолинии T_1, ψ (фиг. 1), либо t, v; слева – кривые зависимостей тех же функций от x для множества $\{y\}$. При вычислении значений функций применено равномерное разбиение с шагом $d\varphi = L_\varphi : 40$ при $\varphi \in \{x, y\}$. Нумерация сечений использована в качестве значений x и y на графиках. К изображенным на фиг. 1, 3 близки картины изолиний при $\{\mathrm{Ra_{cr}}\} = \{\mathrm{Ra}_{635}, \mathrm{Ra}_{811}\}$. Для $\{\mathrm{Ra_{cr}}\}$ с индексами из (3.6), кроме значений с $\{ij\} = \{32;\ 71;\ 11.4\}$ (фиг. 1–3), картины изолиний – семейства одноцентровых кривых эллиптического типа. Замечено, что картины изолиний при $\mathrm{Ra_{cr,\,min}}$, как правило, относительно проще для пространственных течений ($n > 0$) – в сравнении с плоскими.

Заключение. При решении задачи об устойчивости равновесия жидкости применен подход, близкий к строго аналитическому, с получением бесконечной системы линейных уравнений, алгебраических относительно числа Рэлея Ra. Доказана редуцируемость этой системы и вычисление критических значений Ra ($\mathrm{Ra_{cr}}$) связано с условиями обращения в ноль конечного определителя. Показано хорошее согласование результатов расчета с известными данными для полостей с круглыми, квадрат-



Фиг. 3. Зависимости $t \cdot 10^{11}$ (*а*), $v \cdot 10^{14}$ (*б*) от x и изолинии для t (*в*), v (*г*) при $Ra_{cr} = Ra_{10,51} = 3635$

ными и прямоугольными сечениями. Получена новая информация по Ra_{cr}, картинам изолиний температур, функций тока для плоских и пространственных течений, в частности, и для вариантов с периодической модуляцией ускорения поля массовых сил. В случаях плоских течений замечена перемежаемость значений Ra_{cr} для вариантов с различием только условий для температуры. При сопоставлении возрастающих последовательностей $\{Ra_{cr}\}$ для различающихся волновых чисел – для интервалов значений $\{Ra_{cr}\}$ с совпадающим номером пересечений не выявлено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уховский М. Р., Юдович В. И.* Об уравнениях стационарной конвекции // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 295–300.
2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
4. *Полежаев В.И., Сазонов В.В.* Механика невесомости и гравитационно-чувствительные системы // Аннот. докл. научн.-иссл. семинара. М.: ИПМ РАН, 1998. 36 с.
5. *David B.* The planform and onset of convection wit a temperature-dependent viscosity // J. Fluid Mech. 1988.V. 191. P. 247–288.
6. *Edwards B.F.* Crossed rolls at onset of convection in a rigid box // J. Fluid Mech. 1988.V. 191. P. 583–597.

7. *Crespo del Arco E., Bontoux P., Sani R.L., Hardin G., Extremet G. P.* Steady and oscillatory convection in vertical cylinders heated from below. Numerical simulation of asymmetric flow regimes // Adv. Space Res. 1988.V. 8, № 12. P. 281–292.
8. *Velte W.* Stäbilitätsverhalten und verzweigung stationarer lösungen der Navier -Stokesschen Gleichungen // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964.V. 16. № 2. P. 97–125.
9. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е. Л.* Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу // Изв.АН СССР. МЖГ. 1966. № 6. С. 93–99.
10. *Kurzweg U.H.* Convective instability of a hydromagnetic fluid within a rectangular cavity // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1965. V. 8. № 1. P. 35–41.
11. *Жуховицкий Е.М.* Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости неравномерно нагретой жидкости // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 2. С. 205–211.
12. *Sherman M.* Onset of thermal instability in a horizontal cirkular cylinder // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 11. P. 2095.
13. *Catton I.* Natural convektion in horizontal liquid layers // Phys. Fluids. 1966.V. 9. № 12. P. 2521.
14. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Устойчивость равновесия жидкости в горизонтальном цилиндре, подогреваемом снизу //ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1035–1040.
15. *Davis S. H.* Convection in a box: linear theory // J. Fluid Mech. 1967. V. 39. Pt 3. P. 465–478.
16. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Юрков Ю.С.* О численном определении границ конвективной устойчивости в системе с периодически меняющимся параметром // Учен. зап. Перм. ун-та. 1971. № 248. Гидродинамика. Вып. 3. С. 29–37.
17. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 696 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.V.2004