

УДК 532.5.013.4:532.61:534.12

© 2005 г. А. А. АЛАБУЖЕВ, Д. В. ЛЮБИМОВ

## ПОВЕДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАПЛИ ПРИ МНОГОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЯХ

Исследуется поведение капли невязкой жидкости, окруженной другой жидкостью, при много-частотном вибрационном воздействии. Рассмотрены эффекты второго порядка по амплитуде вибраций. Обнаружен супергармонический резонанс. Исследована устойчивость вынужденных колебаний относительно малых возмущений. Найдено условие возникновения параметрического резонанса. Исследована осредненная форма капли. Рассмотрено двухчастотное воздействие как частный случай многочастотного.

*Ключевые слова:* цилиндрическая капля, многочастотные вибрации, супергармонический резонанс, параметрический резонанс.

Вибрации – один из наиболее распространенных способов воздействия на поведение неоднородных гидродинамических систем. Нетривиальное поведение системы в условиях вибрационного воздействия определяет актуальность теоретического и экспериментального изучения такого рода явлений. Необходимость исследований обусловлена также тем, что вибрации являются как следствием внешних, посторонних причин, так и могут быть использованы в управлении технологическими процессами.

Данная работа посвящена изучению влияния вибраций на поверхность раздела. Первые работы по этой тематике принадлежат Фарадею, который при рассмотрении влияния одночастотных вертикальных вибраций на горизонтальную границу раздела жидкость–газ экспериментально обнаружил и описал явления возбуждения параметрических колебаний границы раздела (так называемая “рябь Фарадея” или “волны Фарадея”) [1]. Теоретическое объяснение этого явления для данной системы было дано в [2] с использованием линейного анализа устойчивости для невязкого потенциального течения.

В последние годы интенсивно изучалось действие вибраций на искривленные поверхности раздела. В работе [3] изучалось поведение сферической капли несжимаемой жидкости, окруженной другой жидкостью, при высокочастотном воздействии. Основной эффект – среднее сжатие капли вдоль направления оси вибраций, причем этот эффект имеет место как для тяжелой, так и для легкой капли. Аналогичный результат был получен и для средней формы цилиндрической капли несжимаемой невязкой жидкости между двумя твердыми плоскостями при монохроматической вибрации, направленной перпендикулярно оси симметрии капли [4]. При акустическом взвешивании сферической капли [5, 6], когда существенна сжимаемость сред, наблюдались похожие явления: капля сжималась вдоль вертикальной оси и окончательно принимала форму яблока (dog-bone form), однако эта форма была неустойчивой. В работе [7], как и в [6], экспериментально исследовалось поведение капель жидкости в одночастотном акустическом поле. Особое внимание уделялось изменению равновесной формы капли при изменении величины акустического давления и механизма разрушения капли в интенсивном акустическом поле.

В [8] экспериментально исследовалось поведение сжатой цилиндрической капли, когда отношение толщины слоя к равновесному радиусу капли мало. Оказалось, что в среднем тяжелая капля вытягивается вдоль оси вибраций, а легкая сжимается.

Параметрический резонанс, обнаруженный в [1], наступает при равенстве частоты вибраций  $\omega$  удвоенной частоте собственных колебаний  $\omega = 2\Omega$ ,  $\Omega$  – частота собственных колебаний. В работе [9] в отличие от большинства работ рассматривалась амплитуда вибраций поверхности и объема, сравнимая с размерами газового пузыря, при одночастотном воздействии. Основная цель работы заключалась в исследовании взаимодействия между осцилляциями объема и формы поверхности пузыря, которые возникали из-за начальной неравновесной формы пузыря. Для пузырей сферической формы рассматривалось условие резонанса  $2 : 1$ , для имеющих несферическую форму  $1 : 1$  и  $2 : 1$ , т.е.  $\Omega_0 = \Omega_m$  или  $\Omega_0 = 2\Omega_m$  (предсказано в малоамплитудном приближении), где  $\Omega_0$  – собственная частота объемных осцилляций,  $\Omega_m$  – собственная частота  $m$ -ой моды колебаний формы. Параметрическая неустойчивость вынужденных колебаний формы сферической и цилиндрической капли появляется при выполнении условия синхронизма  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m+1}$ ,  $\omega$  – частота вибраций,  $\Omega_m, \Omega_{m+1}$  – частоты двух соседних мод собственных колебаний [10, 11].

При изучении вынужденных волн конечной амплитуды на поверхности идеальной жидкости в бесконечно глубоком канале рассматривались линейный  $\omega = \Omega$  и субгармонический  $\omega = 3\Omega$  резонансы [12]. Линейный резонанс оказался более опасным, чем субгармонический.

Подобные явления наблюдаются и в нелинейных механических системах с различным числом степеней свободы (см. обзоры [13, 14]). В [15] рассматривались случаи внутренних резонансов  $1 : 2$ ,  $1 : 3$ ,  $1 : 4$  для системы с двумя степенями свободы и обладающей гистерезисом. Параметрический  $\omega = 2\Omega$  и субгармонический  $\omega = 3\Omega_1$  резонансы рассматривались в [16] при изучении устойчивости нелинейной системы с одной степенью свободы. Было показано, что параметрический резонанс опаснее.

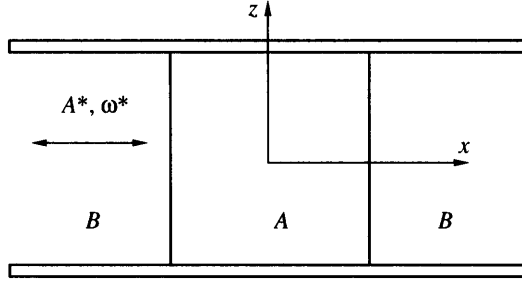
В [17] на примере уравнения Дuffинга рассматривалась устойчивость системы с двумя положениями равновесия при двухчастотном вибрационном воздействии с высокой и низкой частотами. При действии высокой частоты в системе с большим трением возможны специфические резонансы (так называемые вибрационные резонансы), хотя обычный линейный резонанс отсутствует. Параметрический резонанс в этом случае выражен очень слабо.

В [18] рассматривался нелинейный осциллятор при многочастотном воздействии. Рассматривались три случая, когда внешние частоты 1) далеки друг от друга и от собственной частоты осциллятора, 2) близки друг к другу, но далеки от собственной частоты, 3) близки друг к другу и собственной частоте. Найдено, что в первом случае внешнего воздействия собственные свободные колебания или затухают, или имеют постоянную величину. В других случаях возможно нарастание колебаний в зависимости от параметров расстройки.

Работа [19] посвящена основным формам нелинейных колебаний колебательной системы с одной степенью свободы и нелинейностью второго, третьего и четвертого порядка при внешнем многочастотном гармоническом воздействии. Рассмотрены линейный, параметрический и супергармонический резонансы. Изучено влияние нелинейностей на поведение системы. Результаты показывают, что в случае синхронизированных линейного и супергармонического резонансов, амплитудой колебаний системы можно управлять путем добавления новых внешних частот.

В [4] был обнаружен нелинейный резонанс, возникающий при равенстве частоты вибраций половине частоты основной моды собственных колебаний цилиндрической капли. Это явление супергармонического резонанса, возникающего при условии  $2\omega = \Omega_m$ , описано при исследовании механических систем [14, 20]. Супергармонический резонанс  $2\omega = \Omega_m$  при исследовании устойчивости в нелинейной механической системе с одной степенью свободы более опасен, чем линейный и параметрический  $\omega = 2\Omega_1$  [16].

В [21] использовалось рассеивание акустической модулированной волны с несущей частотой  $\omega_s$  и модуляционной частотой  $\omega_p$  на поверхности газового пузырька для



Фиг. 1. Геометрия задачи:  $A$  – капля,  $B$  – окружающая жидкость

измерения его размеров и плотности. Когда частота  $\omega_p$  близка к частоте собственных колебаний пузырька, происходит резонансное нарастание амплитуды колебаний стенок пузырька с частотой  $\omega_i \pm \omega_p$  (линейный резонанс). В [22] рассматривался параметрический резонанс на частоте  $\omega_i \pm \omega_p/2$  для подобной системы.

В данной работе рассматривается поведение зажатой между двумя плоскими стенками цилиндрической капли при многочастотном внешнем воздействии.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим поведение капли идеальной несжимаемой жидкости плотностью  $\rho_i^*$ , окруженной другой жидкостью плотностью  $\rho_e^*$ . Вся система ограничена двумя параллельными твердыми плоскостями (фиг. 1). В отсутствие вибраций капля имеет форму цилиндра радиуса  $R$ . Краевой угол между боковой поверхностью капли и твердыми плоскостями равен  $\pi/2$  и в процессе движения не изменяется.

Капля обтекается пульсационным потоком. Центр масс капли движется относительно лабораторной (неподвижной) системы отсчета вдоль оси  $x$  со скоростью  $U(t)$ , которая подлежит определению; жидкость на больших расстояниях от капли движется вдоль оси  $x$  со скоростью

$$\mathbf{v} = \mathbf{j} \frac{d}{dt} f(t), \quad f(t) = \sum_{k=1}^N A_k^* e^{i\omega_k^* t} + \text{с.с.}$$

где  $A_k^*$  и  $\omega_k^*$  – амплитуда и частота  $k$ -той компоненты вибраций,  $\mathbf{j}$  – орт оси  $x$ , символом “с.с.” здесь и далее обозначены комплексно сопряженные слагаемые. Амплитуды внешних воздействий  $A_k^*$  малы по сравнению с равновесным радиусом  $R$ .

Будем предполагать, что, с одной стороны, частоты вибраций достаточно велики, чтобы можно было пренебречь вязкостью, с другой стороны, частоты вибраций достаточно малы, чтобы можно было пользоваться приближением несжимаемости:  $l = \sqrt{\nu_{i,e}} / \omega_k^* \ll R$  и  $\omega_k^* R \ll c$ , где  $l$  – толщина вязкого пограничного слоя,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $c$  – скорость звука, индексы  $i$  и  $e$  обозначают величины, принадлежащие внутренней и внешней области капли соответственно.

Будем рассматривать только двумерное движение в плоскости  $(x, y)$ . Удобно ввести полярные координаты  $(r, \alpha)$ , в которых поверхность капли описывается соотношением  $r = R + \zeta(\alpha, t)$ , где  $\zeta(\alpha, t)$  – отклонение боковой поверхности капли от равновесного положения, угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $x$ . В работе [4] было показано, что в главном порядке разложения по малой амплитуде вибраций капля смещается как целое, а

изменение формы не происходит. Удобно поэтому перейти в систему отсчета центра масс. Условия его неподвижности и сохранения объема капли имеют вид

$$\int_0^{2\pi} (R + \zeta)^3 \cos \alpha d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} (R + \zeta)^2 d\alpha = 2\pi R^2$$

Уравнение Эйлера в системе центра масс имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho^*} \nabla p - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial t} U$$

На больших расстояниях от капли должно выполняться условие

$$r \rightarrow \infty: \mathbf{v} \rightarrow \left( \frac{df(t)}{dt} - U \right) \mathbf{j}$$

На поверхности капли выполняются условия непрерывности нормальной компоненты скорости, кинематическое и баланса нормальных напряжений

$$[v_n] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \zeta = v \nabla F, \quad [p] = -\sigma \operatorname{div} \mathbf{n}, \quad F = r - R - \zeta, \quad \mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к боковой поверхности капли,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения. Квадратные скобки обозначают скачок величины в скобках при переходе из внешней жидкости во внутреннюю.

Будем рассматривать безвихревое движение; введем потенциалы скоростей  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ . Выберем в качестве единиц измерения времени  $t_0$ , длины  $R$ , отклонения поверхности среднюю амплитуду вибраций  $A_0$ , скорости  $v_0$ , плотности  $\rho_0$ , давления  $p_0$ , где

$$t_0 = \sqrt{(\rho_i^* + \rho_e^*) \frac{R^3}{2\sigma}}, \quad A_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |A_k^*|, \quad v_0 = A_0 \sqrt{\frac{2\sigma}{(\rho_e^* + \rho_e^*) R^3}},$$

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\rho_i^* + \rho_e^*), \quad p_0 = \frac{A_0 \sigma}{R^2}$$

В безразмерных переменных имеем задачу

$$\Delta \phi_{i,e} = 0, \quad p = -\rho \phi_t - \frac{1}{2} \varepsilon \rho (\nabla \phi)^2 - \rho U_t r \cos \alpha \quad (1.1)$$

$$r \rightarrow \infty: \phi \rightarrow (f_t - U) r \cos \alpha \quad (1.2)$$

$$r = 1 + \varepsilon \zeta: [\phi_n] = 0, \quad \zeta_t = \nabla \phi \nabla F, \quad \varepsilon [p] = -\operatorname{div} \mathbf{n} \quad (1.3)$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \zeta)^3 \cos \alpha d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} \zeta d\alpha = -\frac{1}{2} \varepsilon \int_0^{2\pi} \zeta^2 d\alpha \quad (1.4)$$

Индексы  $t, r, \alpha$  обозначают дифференцирование по соответствующим переменным. Задача содержит следующие безразмерные параметры: относительные амплитуды  $a_k$ , частоты вибраций  $\omega_k$ , среднюю амплитуду вибраций  $\varepsilon$ , плотность внешней жидкости  $\rho_e$ , плотность жидкости в капле  $\rho_i$ , где

$$a_k = \frac{A_k^*}{A_0}, \quad \sum_{k=1}^N a_k = N, \quad \omega_k = \omega_k^* \sqrt{\frac{(\rho_i^* + \rho_e^*) R^3}{2\sigma}}, \quad \varepsilon = \frac{A_0}{R},$$

$$\rho_e = \frac{2\rho_e^*}{\rho_i^* + \rho_e^*}, \quad \rho_i = \frac{2\rho_i^*}{(\rho_i^* + \rho_e^*)}, \quad \rho_e + \rho_i = 2$$

**2. Вынужденные колебания.** Решение системы (1.1)–(1.4) будем искать в виде разложения по степеням  $\varepsilon$

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varepsilon\varphi^{(1)} + \dots, \quad p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \dots, \quad \zeta = \zeta^{(0)} + \varepsilon\zeta^{(1)} + \dots$$

В нулевом порядке получаем задачу

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = -\rho\varphi_t^{(0)} - \rho U_t r \cos\alpha$$

$$r \rightarrow \infty: \varphi_e^{(0)} \rightarrow (f_t - U) r \cos\alpha$$

$$r = 1: [\varphi_e^{(0)}] = 0, \quad \zeta_t^{(0)} = \varphi_r^{(0)}, \quad [p^{(0)}] = \zeta^{(0)} + \zeta_{\alpha\alpha}^{(0)}$$

решение которой имеет вид

$$\zeta^{(0)} = 0, \quad \varphi_i^{(0)} = 0, \quad \varphi_e^{(0)} = \Pi f_t \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos\alpha, \quad \Pi = \frac{1}{2}(\rho_i - \rho_e) \quad (2.1)$$

$$U(t) = \rho_e f_t$$

Условие неподвижности центра масс и условие сохранения объема (1.4) выполняются автоматически.

Скорость  $U$  движения центра масс относительно лабораторной системы отсчета обращается в нуль для очень тяжелой капли, совпадает со скоростью движения окружающей жидкости при  $\rho_i = \rho_e = 1$  и больше скорости жидкости на бесконечности для легкой капли (пузыря), что согласуется с результатом работы [4].

В первом порядке получаем задачу

$$\Delta\varphi^{(1)} = 0, \quad p^{(1)} = -\rho\varphi_t^{(1)} - \frac{1}{2}\rho(\nabla\varphi^{(0)})^2$$

$$r \rightarrow \infty: \varphi_e^{(1)} \rightarrow 0,$$

$$r = 1: [\varphi_r^{(1)}] = 0, \quad \zeta_t^{(1)} = \varphi_r^{(1)}, \quad [p^{(1)}] = \zeta^{(1)} + \zeta_{\alpha\alpha}^{(1)}$$

решение которой имеет вид

$$\varphi_i^{(1)} = \frac{1}{2}B_t r^2 \cos 2\alpha, \quad \varphi_e^{(1)} = -\frac{1}{2}B_t \frac{1}{r^2} \cos 2\alpha \quad (2.2)$$

$$\zeta^{(1)} = B \cos 2\alpha \quad (2.3)$$

Функция  $B(t)$  находится из решения дифференциального уравнения

$$B_{tt} + 3B = -\rho_e \Pi^2 f_t^2 \quad (2.4)$$

В решение (2.1) предыдущего порядка входят только слагаемые, содержащие  $\exp(\pm i\omega_k t)$ . В рассматриваемом порядке решение (2.2)–(2.3), как видно из неоднородного слагаемого уравнения (2.4), зависит от парных комбинаций (сумма или разность) частот вибраций  $\exp(\pm i(\omega_k \pm \omega_l)t)$ . Собственные частоты колебаний капли в используемых единицах даются выражением [23]

$$\Omega_n^2 = 1/2n(n^2 - 1), \quad n \geq 2 \quad (2.5)$$

Собственная частота общего решения однородного уравнения (2.4) равна частоте квадрупольной моды ( $n = 2$ ) собственных колебаний капли. Если какая-либо комбинация внешних частот в неоднородном слагаемом (2.4) будет близка к такой частоте, то возникнет явление резонанса. В случае монохроматических вибраций резонансное нарастание амплитуды колебаний капли происходит при частоте, которая вдвое меньше наименьшей частоты собственных колебаний (супергармонический или нелинейный, в терминах [20], резонанс). В случае многочастотных вибраций резонанс вынужденных колебаний может возникнуть, как видно из уравнения (2.4), также в случае, когда сумма или разность двух частот вибраций равны частоте квадрупольной моды.

Независящая от времени часть функции  $\zeta$  описывает эффект изменения средней формы капли:

$$\langle \zeta \rangle = -1/3\rho_e\Pi^2\langle f_t^2 \rangle \cos 2\alpha \tag{2.6}$$

Здесь угловые скобки означают осреднение соответствующей величины по времени. Как видно из (2.6), независимо от соотношения плотностей имеет место эффект сжатия капли вдоль оси вибраций, что согласуется с результатами работы [4]. В экспериментальной работе [8] обнаружено сжатие легкой капли и растяжение тяжелой. По-видимому, это явление обусловлено нестационарной динамикой краевого угла. Во всяком случае радиус капли в [8] очень большой по сравнению с толщиной слоя, при этом явления на контактной линии становятся определяющими. Учет динамики контактного угла для вырожденного случая равновесного угла, равного  $\pi/2$ , проведенный в [24], продемонстрировал принципиальную возможность вытягивания тяжелой капли.

**3. Устойчивость вынужденных колебаний.** Для исследования устойчивости вынужденных колебаний введем возмущения основного течения в виде

$$\varphi' = \varphi + \psi, \quad \zeta' = \zeta + \xi, \quad p' = p + q \tag{3.1}$$

где  $\varphi', \zeta', p'$  – возмущенные поля,  $\varphi, \zeta, p$  – основное решение,  $\psi, \xi, q$  – малые нестационарные возмущения. Подставляя возмущенные поля (3.1) в исходную систему (1.1)–(1.4) и линеаризуя, получим для возмущений систему уравнений и граничных условий:

$$\Delta\psi = 0, \quad q = -\rho(\psi_t + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi)$$

$$r \rightarrow \infty: \psi \rightarrow 0$$

$$r = 1: [\psi_n] = 0, \quad \xi_t = \nabla\psi \cdot \nabla F - \nabla\varphi \cdot \nabla\xi,$$

$$[q] = \xi^{(0)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(0)} - \varepsilon(\xi^{(1)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(1)}) + \dots$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2\varepsilon\xi + \varepsilon^2\xi^2)\xi \cos\alpha d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} \xi d\alpha = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \zeta\xi d\alpha$$

Решение этой задачи будем искать методом многих масштабов:

$$\psi_i = \sum_m C_1^{(m)} r^m e^{im\alpha}, \quad \psi_e = \sum_m C_2^{(m)} \frac{1}{r^m} e^{im\alpha}, \quad \xi = \sum_m T_m(t) e^{im\alpha}$$

$$C_{1,2}^{(m)} = C_{1,2}^{(m,0)} + \varepsilon C_{1,2}^{(m,1)} + \dots, \quad T_m = T_m^{(0)} + \varepsilon T_m^{(1)} + \dots$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots$$

где  $m$  – номер моды собственных колебаний.

Как отмечено выше, при монохроматическом вибрационном воздействии параметрическая неустойчивость для главных резонансов появляется при выполнении условия синхронизма  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m+1}$ . Это условие сохраняется и в многочастотном случае, поскольку связано лишь с тем, что основной модой для вынужденных колебаний является трансляционная, а для собственных колебаний – квадрупольная. Чтобы описать близость внешних частот к сумме  $\Omega_m + \Omega_{m+1}$  количественно, введем параметр расстройки  $\omega_k - (\Omega_m + \Omega_{m+1}) = \gamma = \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \dots$

Таким образом, в нулевом порядке разложения получаем задачу:

$$\Delta\Psi^{(0)} = 0, \quad q^{(0)} = -\rho\Psi_r^{(0)}$$

$$r \rightarrow \infty: \Psi^{(0)} \rightarrow 0$$

$$r = 1: [\Psi_r^{(0)}] = 0, \quad \xi_t^{(0)} = \Psi_r^{(0)}, \quad [q^{(0)}] = \xi^{(0)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(0)}$$

решение которой имеет вид

$$\Psi_i^{(0)} = \sum_{m=2} i \frac{\Omega_m}{m} B_m^{(0)}(t_1, \dots) r^m e^{i\Omega_m t_0} e^{im\alpha} + \text{с.с.}$$

$$\Psi_e^{(0)} = - \sum_{m=2} i \frac{\Omega_m}{m} B_m^{(0)}(t_1, \dots) \frac{1}{r^m} e^{i\Omega_m t_0} e^{im\alpha} + \text{с.с.}$$

$$\xi^{(0)} = \sum_{m=2} B_m^{(0)}(t_1, \dots) e^{i\Omega_m t_0} e^{im\alpha} + \text{с.с.}$$

В первом порядке получаем следующую задачу:

$$\Delta\Psi^{(1)} = 0, \quad q^{(1)} = -\rho(\Psi_{t_0}^{(1)} + \Psi_{t_1}^{(0)}) - \rho\nabla\Psi^{(0)} \cdot \nabla\Phi^{(0)}$$

$$r \rightarrow \infty: \Psi^{(1)} \rightarrow 0$$

$$r = 1: [\Psi_r^{(1)}] + \xi^{(0)}\Phi_{err}^{(0)} - \xi_{\alpha}^{(0)}\Phi_{e\alpha}^{(0)} = 0, \quad \xi_{t_0}^{(1)} + \xi_{t_1}^{(0)} = \Psi_{ir}^{(1)}$$

$$[q^{(1)}] + \xi^{(0)}[p_r^{(0)}] = \xi^{(1)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(1)}$$

Уничтожение секулярных членов дает дифференциальные уравнения для амплитуд:

$$i\Omega_m D_1 B_m^{(0)} e^{i\Omega_m t_0} - m\rho_e \Pi \bar{B}_{m+1}^{(0)} e^{-i\Omega_{m+1} t_0} (D_0^2 f_1 - i\Omega_{m+1} D_0 f_1) = 0 \quad (3.2)$$

$$\Omega_{m+1} D_1 \bar{B}_{m+1}^{(0)} e^{-i\Omega_{m+1} t_0} - (m+1)\rho_e \Pi \Omega_m B_m^{(0)} e^{i\Omega_m t_0} D_0 \bar{f}_1 = 0$$

$$f_1(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{i\omega_k t} \quad (3.3)$$

Подставим в систему (3.2), (3.3) функцию  $f_1(t)$  и учтем расстройку частоты  $\gamma$ :

$$D_1 B_m^{(0)} + i\gamma_1 B_m^{(0)} = \frac{m\rho_e \Pi \omega_k a_k}{2i\Omega_m} (\omega_k - \Omega_{m+1}) \bar{B}_{m+1}^{(0)}$$

$$D_1 \bar{B}_{m+1}^{(0)} - i\gamma_1 \bar{B}_{m+1}^{(0)} = \frac{(m+1)\rho_e \Pi \omega_k \Omega_m \bar{a}_k}{2i\Omega_{m+1}} B_m^{(0)}$$

Разыскивая решение для амплитуд  $B_m^{(0)}, B_{m+1}^{(0)}$  в виде  $\exp(\lambda t_1)$ , получаем уравнение для инкремента  $\lambda$

$$\lambda^2 = \frac{m(m+1)\rho_e^2 \Pi^2 \omega_k^2 \Omega_m |a_k|^2}{4\Omega_{m+1}} - \gamma_1^2 \quad (3.4)$$

Если собственные частоты  $\Omega_m, \Omega_{m+1}$  имеют разные знаки, то правая часть (3.4) отрицательна и возмущения не нарастают. В результате этого резонанс возможен только на сумме двух частот соседних мод, т.е. когда частоты имеют одинаковые знаки. При этом для достаточно больших амплитуд вибраций  $\lambda^2 > 0$ , т.е. существуют нарастающие возмущения. Отсюда находим пороговую амплитуду вибраций как функцию параметра расстройки  $\gamma_1$ . Вид нейтральной кривой  $\epsilon(\omega_k)$  определяется выражением

$$\omega_k = \Omega_m + \Omega_{m+1} \pm \epsilon \sqrt{\frac{m(m+1)\rho_e^2 \Pi^2 \omega_k^2 |a_k|^2 \Omega_m}{4\Omega_{m+1}}} \quad (3.5)$$

**4. Двухчастотное воздействие.** Рассмотрим полученные основные эффекты для конкретного случая внешнего воздействия. Представим функцию  $f(t)$  в виде

$$f(t) = A_1 e^{i\omega_1^* t} + A_2 e^{i\omega_2^* t} + \text{с.с.}$$

Скорость движения центра масс относительно лабораторной системы отсчета

$$U(t) = \rho_e (i\omega_1 a_1 e^{i\omega_1 t} + i\omega_2 a_2 e^{i\omega_2 t} + \text{с.с.})$$

Решение (2.2)–(2.3) в первом порядке разложения имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(1)} = & (i\omega_1 A e^{2i\omega_1 t} + i\omega_2 B e^{2i\omega_2 t} - 1/2i(\omega_2 - \omega_1) C e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + \\ & + 1/2i(\omega_2 + \omega_1) D e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} + \text{с.с.}) r^2 \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_e^{(1)} = & -(i\omega_1 A e^{2i\omega_1 t} + i\omega_2 B e^{2i\omega_2 t} - 1/2i(\omega_2 - \omega_1) C e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + \\ & + 1/2i(\omega_2 + \omega_1) D e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} + \text{с.с.}) r^{-2} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)} = & (A e^{2i\omega_1 t} + B e^{2i\omega_2 t} - C e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + D e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} + \text{с.с.}) \cos 2\alpha - \\ & - (1/3 \rho_e \Pi^2 (|a_1|^2 \omega_1^2 + |a_2|^2 \omega_2^2)) \cos 2\alpha \end{aligned}$$

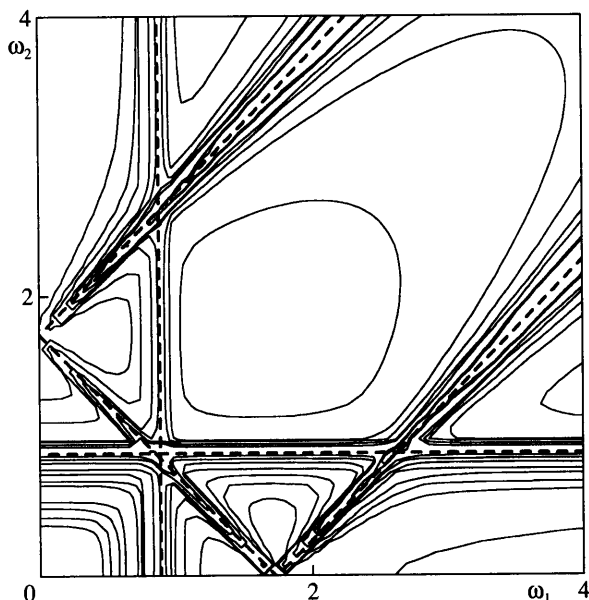
$$A = \frac{\rho_e \Pi^2 a_1^2 \omega_1^2}{3 - 4\omega_1^2}, \quad B = \frac{\rho_e \Pi^2 a_2^2 \omega_2^2}{3 - 4\omega_2^2}, \quad C = \frac{\rho_e \Pi^2 \bar{a}_1 a_2 \omega_1 \omega_2}{3 - (\omega_2 - \omega_1)^2}$$

$$D = \frac{\rho_e \Pi^2 a_1 a_2 \omega_1 \omega_2}{3 - (\omega_2 + \omega_1)^2}$$

Независящая от времени часть функции  $\zeta$  описывает эффект среднего изменения формы капли. Независимо от соотношения плотностей имеет место эффект сжатия капли вдоль оси вибраций.

Зависящая от времени часть функции  $\zeta$  имеет резонансный характер: амплитуда колебаний капли неограниченно нарастает при приближении внешних частот к резо-





Фиг. 2. Изолинии зависимости энергии колебаний от внешних частот ( $\Omega_2^2 = 3$ ). Максимумы обозначены штриховыми линиями и соответствуют резонансам  $\omega_1 \pm \omega_2 = \pm \Omega_2$ ,  $\omega_1 = \omega_2/2$ ,  $\omega_2 = \omega_2/2$

нансным значениям. Резонансное нарастание амплитуды колебаний может происходить не только на частоте вибраций, которая вдвое меньше частоты квадрупольной моды собственных колебаний (супергармонический или нелинейный резонанс), но и на сумме и разности частот вибраций, равных этой частоте. Напомним, что в монохроматическом случае слагаемые содержат только удвоенную частоту внешних колебаний.

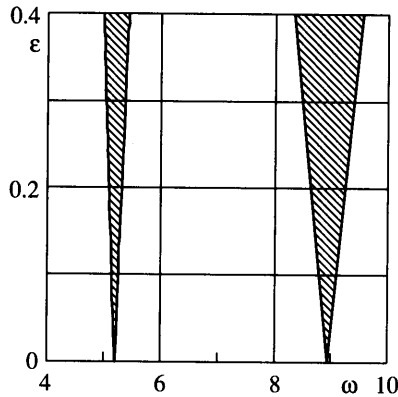
На фиг. 2 показаны изолинии энергии колебаний в зависимости от частот вибраций. При приближении частот к резонансным значениям амплитуда колебаний нарастает неограниченно, что связано с отсутствием диссипации. Штриховые линии соответствуют резонансам  $\omega_1 \pm \omega_2 = \pm \Omega_2$ ,  $\omega_1 = \Omega_2/2$ ,  $\omega_2 = \Omega_2/2$ . Параметрический резонанс наступает при выполнении условия синхронизма:  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m+1}$ , где частота вибраций  $\omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ . Нейтральная кривая (3.5) для рассматриваемого случая имеет вид

$$\omega = \Omega_m + \Omega_{m+1} \pm \varepsilon \sqrt{\frac{m(m+1)\rho_e^2 \Pi^2 \omega^2 |b|^2 \Omega_m}{4\Omega_{m+1}}}$$

где  $b = \{a_1, a_2\}$ . На фиг. 3 представлены две первые области параметрического резонанса.

**Закключение.** Рассмотрены колебания и осредненная деформация цилиндрической капли идеальной жидкости, окруженной другой идеальной жидкостью и находящейся между двумя твердыми поверхностями. Капля обтекается многочастотным пульсационным потоком. Предполагается, что среднее искажение капли мало, краевой угол равен  $\pi/2$  и не изменяется.

Обнаружено явление супергармонического резонанса. Супергармонический (нелинейный) резонанс появляется при частотах вибраций, равных половине частоты



Фиг. 3. Области параметрической неустойчивости (выделены штриховкой)

квадрупольной моды собственных колебаний или при равенстве суммы/разности частот вибраций собственной частоте. В монохроматическом случае резонанс возникает при совпадении частоты внешних вибраций с половиной собственной частоты.

Исследована устойчивость вынужденных колебаний относительно малых возмущений. Показано, что параметрический резонанс появляется при выполнении условия синхронизма: одна из частот вибраций равна сумме частот соседних мод собственных колебаний. Найден параметр расстройки и построены области неустойчивости.

Отклонение средней формы капли от цилиндрической пропорционально квадрату амплитуды вибраций, причем имеет место сжатие капли в направлении оси вибраций при любом соотношении плотностей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Faraday M.* On a peculiar class of acoustic figures // *Phyl. Trans. Roy. Soc. London.* 1831. V. 52. P. 299–340.
2. *Benjamin T.B., Ursell F.* The stability of a plane free surface of a liquid in vertical periodic motion // *Proc. Roy. Soc. A. London.* 1954. V. 225. P. 505–515.
3. *Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P., Roux B.* Deformation of gas or drop inclusion in high frequency vibrational field // *Microgravity Quart.* 1996. V. 6. N 2–3. P. 125–130.
4. *Алабужев А.А., Коновалов В.В., Любимов Д.В.* Деформация и нелинейный резонанс капли в вибрационном поле // *Вибрационные эффекты в гидродинамике.* Вып. 1. Пермь, 1998. С. 7–16.
5. *Marston P. L.* Shape oscillation and static deformation of drops and bubbles driven by modulated radiation stresses. Theory // *J. Acoust. Soc. Ame.* 1980. V. 67. № 1. P. 15–26.
6. *Marston P.L., Apfel R.E.* Quadrupole resonance of drops driven by modulated acoustic radiation pressure. Experimental properties // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. V. 67. № 1. P. 27–37.
7. *Anilkumar A.V., Lee C.P., Wang T.G.* Stability of an acoustically levitated and flattened drop: An experimental study // *Phys. Fluids.* 1993. V. 5. № 11. P. 2763–2774.
8. *Зорин С.В., Иванова А.А., Козлов В.Г.* Экспериментальное исследование формы фазовых включений в вибрационном поле // *Вибрационные эффекты в гидродинамике.* Вып. 1. Пермь, 1998. С. 109–120.
9. *McDougald N.K., Leal L.G.* Numerical study of the oscillations of a non-spherical bubble in an inviscid, incompressible liquid. Part I: free oscillation from non-equilibrium initial conditions // *Int. J. Multiphase Flow.* 1999. V. 25. № 5. P. 887–919.
10. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A., Meradji S., Roux B.* Equilibrium and stability of drop in a vibrational field // *Proc. Joint 10th European and 6th Russian Symp. Physical in Microgravity.* St. Petersburg, 1997. P. 66–73.

11. Любимов Д.В., Алабужев А.А. Резонансные воздействия при действии вибраций на цилиндрическую каплю // Тез. докл. 12 Междунар. зимней школы по механике сплошных сред. Пермь, 1999. С. 217.
12. Нестеров С.В. Задача Коши–Пуассона для вынужденных волн конечной амплитуды // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 4. С. 116–121.
13. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
14. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 538 с.
15. Masiani R., Capocchi D., Vestroni F. Resonant and coupled response of hysteretic two-degree-of-freedom systems using harmonic balance method // Intern. J. Non-Linear Mech. 2002. V. 37. № 8. P. 1421–1434.
16. El-Bassiony A.F., Eissa M. Dynamics of a single-degree-of-freedom structure with quadratic, cubic and quartic non-linearities to a harmonic resonance // Appl. Math. Comput. 2003. V. 139. № 1. P. 1–21.
17. Blekhtan I.I., Landa P.S. Conjugate resonances and bifurcations in nonlinear systems under biharmonic excitation // Intern. J. Non-Linear. Mech. 2004. V. 39. № 3. P. 421–426.
18. Maccari A. Non-linear oscillations with multiple resonant or non-resonant forcing terms // Int. J. Non-Linear Mech. 1999. V. 34. № 1. P. 27–34.
19. Abdelhafez H.M. Resonance of multiple frequency excited systems with quadratic, cubic and quartic non-linearity // Math. Comput. Simul. 2002. V. 61. № 1. P. 17–34.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 215 с.
21. Shankar P.M., Chapelon J.Y., Newhouse V.L. Fluid pressure measurement using bubbles insonified by two frequencies // Ultrasonics. 1986. V. 24. № 6. P. 333–336.
22. Maksimov A.O. On the subharmonic emission of gas bubbles under two-frequency excitation // Ultrasonics. 1997. V. 35. № 6. P. 79–86.
23. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
24. Alabuzhev A., Lyubimov D. Deformation of a cylindrical drop in a vibrational field // Proc. 29 Summer School “Advanced Problems in Mechanics” St. Petersburg, 2002. V. 1. P. 3–10.

Пермь

Поступила в редакцию  
19.VII.2004