

УДК 532.59

© 2005 г. И. В. СТУРОВА, Ч. СЮЙ

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

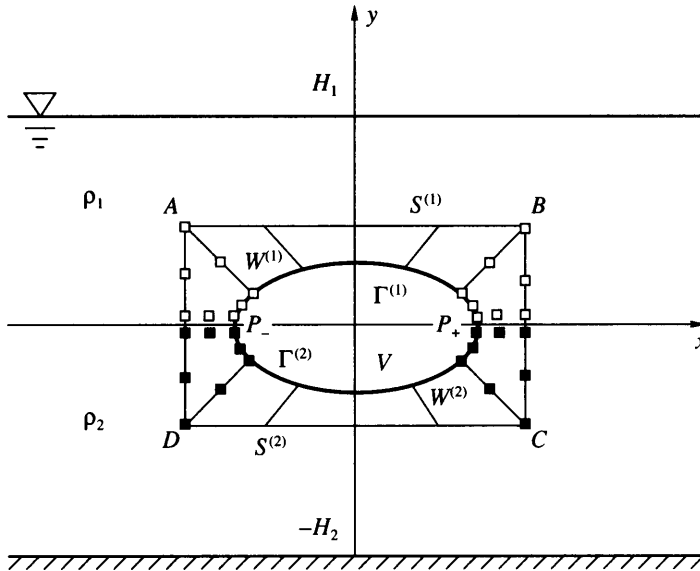
Представлены результаты численного решения линейной задачи об установившихся малых колебаниях горизонтального цилиндра, помещенного на границе раздела двух жидкостей разной плотности. Использован метод гибридных элементов, в котором потенциалы скоростей представляются с помощью метода конечных элементов в узкой области, окружающей тело, и с помощью граничных интегральных уравнений во внешней области. Выведены функции Грина для пульсирующего источника в двухслойной жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью, а снизу – ровным горизонтальным дном. Выполнены численные расчеты коэффициентов присоединенной массы и демпфирования для погруженного под свободной поверхностью эллиптического цилиндра и для плавающего на ней цилиндра с сечением в виде шпангоутного контура Льюиса.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, линейная теория волн, колебания цилиндра, гидродинамическая нагрузка.

Двухслойная жидкость, имеющая постоянные плотности в каждом из слоев и скачок плотности на границе раздела, является наиболее простой моделью стратифицированной жидкости. Эта модель позволяет исследовать влияние резкого пикноклина, обусловленного изменениями температуры и/или солености, а также слоя нефти, разлитого по поверхности воды, или илистого слоя вблизи дна канала на движение плавающего или погруженного тела. Имеющиеся в настоящее время теоретические исследования этой задачи выполнены в основном для случая, когда тело полностью расположено в верхнем или нижнем слое жидкости (см., например, [1]).

Значительный интерес представляет также исследование движения тела, пересекающего границу раздела. Задача о волновых движениях, вызванных колебаниями горизонтального кругового цилиндра в двухслойной безграничной жидкости, решена в [2] методом мультипольных разложений. Выполненные расчеты гидродинамической нагрузки (коэффициентов присоединенной массы и демпфирования) показали, что даже при относительно слабой стратификации наличие границы раздела приводит к появлению значительных волновых нагрузок, поведение которых существенно отличается от случая погружения цилиндра полностью в одном из слоев. Отмечено также, что при моделировании колеблющегося тела поверхностными источниками их распределение может иметь степенную особенность в точках пересечения контуром границы раздела. Это затрудняет применение при численном решении широко используемого метода распределенных особенностей.

В данной работе численное решение задачи о колебаниях плавающего или погруженного горизонтального цилиндра произвольного сечения получено методом гибридных элементов, который достаточно эффективен и универсален при рассмотрении как плоских, так и пространственных задач. Ранее этот метод был использован в ряде исследований по гидродинамической качке тела в однородной и стратифицированной жидкости при условии, что тело полностью находится в слое постоянной плотности. Например, в [3] решена плоская задача о колебаниях контура, полностью



Фиг. 1. Схема течения и конечные элементы

погруженного в нижнем бесконечно глубоком слое двухслойной жидкости. Применение этого метода для определения присоединенных масс цилиндра, пересекающего границу раздела двухслойной жидкости конечной глубины и совершающего высокочастотные колебания (т.е. в пределе невесомой жидкости), представлено в [4].

Одновременно с данной работой в [5] получено численное решение плоской задачи о гидродинамической качке тела, плавающего на свободной поверхности и пересекающего границу раздела двухслойной жидкости конечной глубины. Используется метод граничных элементов для потенциалов скоростей на смоченной поверхности тела. Как отмечают авторы [5], их метод может приводить к появлению нерегулярных частот, при которых решение рассматриваемой задачи становится неединственным. В окрестности этих частот возникают большие вычислительные погрешности. Подобным дефектом обладают многие численные методы, применяемые при расчете гидродинамических нагрузок для плавающих тел. Метод гибридных элементов не имеет этого дефекта.

1. Постановка задачи. Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость, состоящая из двух слоев постоянной плотности. Оба слоя в горизонтальных направлениях считаются безграничными, в вертикальном направлении верхний слой ограничен свободной поверхностью, а нижний – ровным горизонтальным дном (фиг. 1). Исследуется задача об установившихся волновых движениях, вызванных в первоначально покоящейся жидкости вынужденными малыми колебаниями твердого тела с частотой ω . Колеблующееся тело представляет собой горизонтальный цилиндр бесконечной протяженности, поэтому рассматриваемая задача является плоской.

В отсутствие тела верхний слой жидкости плотности ρ_1 и толщины H_1 занимает область $L^{(1)}(|x| < \infty, 0 < y < H_1)$, а нижний слой плотности $\rho_2 = \rho_1(1 + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$) область $L^{(2)}(|x| < \infty, -H_2 < y < 0)$, где x – горизонтальная, а y – вертикальная координаты. Индексы 1, 2 соответствуют верхнему и нижнему слоям. Плавающее или погруженное под свободной поверхностью тело, пересекающее границу раздела, занимает область $V = V^{(1)} \cup V^{(2)}$. Представленные ниже численные расчеты выполнены как для плавающего, так и для погруженного тела, но для простоты в описании постановки задачи и

метода ее решения ограничимся случаем погруженного тела. Формулировку задачи для плавающего тела можно найти в [5].

Замкнутый контур погруженного тела $\Gamma = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$ имеет с границей раздела ($y = 0$) две общие точки $P_{\pm} = (\pm c, 0)$. Течение жидкости в каждом слое предполагается потенциальным. Считая возмущенное движение жидкости установившимся, полный потенциал скоростей запишем в виде

$$\Phi^{(s)}(x, y, t) = \operatorname{Re} \left[i\omega \sum_{j=1}^3 \eta_j \phi_j^{(s)}(x, y) \exp(i\omega t) \right]$$

где $\phi_j^{(s)}(x, y)$ – радиационные потенциалы, соответствующие колебаниям тела по трем степеням свободы с амплитудами η_j ($j = \overline{1, 3}$) для горизонтальных, вертикальных и вращательных колебаний.

Согласно линейной теории волн, потенциалы $\phi_j^{(s)}(x, y)$ удовлетворяют следующей краевой задаче

$$\Delta \phi_j^{(s)} = 0, \quad (x, y) \in L^{(s)} \setminus V^{(s)}, \quad s = 1, 2$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial y} = v \phi_j^{(1)} \quad (y = H_1), \quad v = \frac{\omega^2}{g} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial y}, \quad (1 + \varepsilon) \phi_j^{(2)} - \phi_j^{(1)} = \frac{\varepsilon}{v} \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial y} \quad (y = 0, |x| > c) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial y} = 0 \quad (y = -H_2) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(s)}}{\partial n} = n_j \quad (x, y) \in \Gamma^{(s)} \quad (1.4)$$

Здесь g – ускорение силы тяжести, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ – внутренняя нормаль к контуру Γ и для удобства введены обозначения

$$n_1 = n_x, \quad n_2 = n_y, \quad n_3 = (y - y_0)n_1 - (x - x_0)n_2 \quad (1.5)$$

где x_0, y_0 – координаты точки, относительно которой совершаются вращательные колебания тела. В дальнем поле следует потребовать выполнения условия излучения, которое означает, что генерируемые волны являются расходящимися.

Гидродинамическая нагрузка, действующая на колеблющееся тело, определяется силой $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ и моментом F_3 , которые без учета гидростатической составляющей имеют вид

$$F_k = \sum_{j=1}^3 \eta_j \tau_{kj}, \quad \tau_{kj} = \omega^2 \sum_{s=1}^2 \rho_s \int_{\Gamma^{(s)}} \phi_j^{(s)} n_k d\Gamma = \omega^2 \mu_{kj} - i\omega \lambda_{kj} \quad (1.6)$$

$$k = \overline{1, 3}$$

где μ_{kj} и λ_{kj} – коэффициенты присоединенной массы и демпфирования соответственно.

Для построения численного решения этой задачи с помощью метода гибридных элементов необходимо определить функции Грина.

2. Функции Грина. Эти функции вычисляются как потенциалы скоростей движения жидкости в верхнем и нижнем слоях, вызванного пульсирующим источником единичной интенсивности, который расположен либо в верхнем, либо в нижнем слоях.

Для нахождения функций Грина $G^{(s,l)}(x, y; \xi, \eta)$ необходимо решить следующую систему уравнений с граничными условиями, аналогичными (1.1)–(1.3), и условием излучения в дальнем поле:

$$\Delta_{x,y} G^{(s,l)} = 2\pi\delta(x - \xi, y - \eta)$$

Здесь $s = 1$ (2) – номер слоя $L^{(s)}$, содержащего точку наблюдения (x, y) для верхнего (нижнего) слоя. Источник (ξ, η) помещен в $L^{(l)}$ и $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Используя интегральные преобразования Фурье, получим следующие представления:

$$G^{(1,1)} = \ln \frac{r}{r_1} + \text{pv} \int_0^\infty \frac{B_{11}(k, y, \eta)}{D(k)} \cos k(x - \xi) dk - i\pi \sum_{n=1}^2 \frac{B_{11}(k_n, y, \eta)}{D'(k_n)} \cos k_n(x - \xi) \quad (2.1)$$

$$G^{(2,1)} = \text{pv} \int_0^\infty \frac{B_{21}(k, y, \eta)}{D(k)} \cos k(x - \xi) dk - i\pi \sum_{n=1}^2 \frac{B_{21}(k_n, y, \eta)}{D'(k_n)} \cos k_n(x - \xi) \quad (2.2)$$

$$G^{(1,2)} = \text{pv} \int_0^\infty \frac{B_{12}(k, y, \eta)}{D(k)} \cos k(x - \xi) dk - i\pi \sum_{n=1}^2 \frac{B_{12}(k_n, y, \eta)}{D'(k_n)} \cos k_n(x - \xi) \quad (2.3)$$

$$G^{(2,2)} = \ln \frac{r}{r_2} + \text{pv} \int_0^\infty \frac{B_{22}(k, y, \eta)}{D(k)} \cos k(x - \xi) dk - i\pi \sum_{n=1}^2 \frac{B_{22}(k_n, y, \eta)}{D'(k_n)} \cos k_n(x - \xi) \quad (2.4)$$

где символы pv показывают, что интегралы вычисляются в смысле главного значения

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta - 2H_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}$$

$$B_{11}(k, y, \eta) = (1 + t_1) \left\{ \frac{T_1(k)}{2k} [e^{k(\eta - 2H_1)} - e^{-k\eta}] [(v - k)e^{-ky} - (v + k)e^{k(y - 2H_1)}] + e^{k(\eta - 2H_1)} [T_2(k)e^{ky} + T_1(k)e^{-ky}] \right\}$$

$$B_{21}(k, y, \eta) = \frac{v}{2k} (1 + t_1)(1 + t_2) [e^{ky} + e^{-k(y + 2H_2)}] [(k - v)e^{-k\eta} + (k + v)e^{k(\eta - 2H_1)}]$$

$$B_{12}(k, y, \eta) = (1 + \varepsilon) B_{21}(k, \eta, y)$$

$$B_{22}(k, y, \eta) = \frac{(1 + t_2)}{k} \{ 2v(1 + \varepsilon)(kt_1 - v) \text{sh} ky \text{sh} k\eta e^{-2kH_2} - [vk(1 + \varepsilon) - t_1(\varepsilon k^2 + v^2)] [2 \text{ch} ky \text{sh} k\eta e^{-2kH_2} - e^{k\eta}(e^{ky} + e^{-k(y + 2H_2)})] \}$$

$$t_1 = \text{th}kH_1, \quad t_2 = \text{th}kH_2, \quad T_{1,2}(k) = v(1 + \varepsilon) - (\varepsilon k \pm v)t_2$$

$$D(k) = v^2(1 + \varepsilon) + (v^2 + \varepsilon k^2)t_1 t_2 - vk(1 + \varepsilon)(t_1 + t_2)$$

$$D'(k_n) \equiv dD/dk|_{k=k_n}$$

Уравнение $D(k) = 0$ всегда имеет два простых вещественных положительных решения k_1 и k_2 ($k_1 < k_2$). Волновая мода k_1 соответствует поверхностной волне, а мода k_2 – внутренней волне. Предельные значения функций Грина при $|x - \xi| \rightarrow \infty$ представляют собой сумму двух слагаемых, описывающих расходящиеся поверхностные волны, аналогично [3].

Для безграничной двухслойной жидкости ($H_1, H_2 \rightarrow \infty$) выражения (2.1)–(2.4) совпадают с представлениями функций Грина в [2]. В этом случае волновое движение жидкости является одномодовым, так как существуют только внутренние волны.

Самостоятельный интерес представляют также выражения для функций Грина при высокочастотных колебаниях ($\omega \rightarrow \infty$). В этом случае силой тяжести можно пренебречь. Для невесомой жидкости волновые движения отсутствуют, выражения для функций Грина даны в [4].

3. Метод решения. Вывод граничных интегральных уравнений подобен приведенному в [6] для плоской задачи Ньюмана–Кельвина о стационарном обтекании погруженного тела равномерным потоком двухслойной жидкости. Используя тождество Грина, граничные условия для радиационных потенциалов и функций Грина, получим систему двух интегральных уравнений

$$\rho_m \phi_j^{(m)}(\zeta) = \frac{1}{\alpha} \sum_{l=1}^2 \rho_l \int_{S^{(l)}} \left[\phi_j^{(l)}(z) \frac{\partial G^{(l,m)}(z, \zeta)}{\partial n_z} - G^{(l,m)}(z, \zeta) \frac{\partial \phi_j^{(l)}}{\partial n} \right] ds \quad (3.1)$$

$$m = 1, 2, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

где $S = S^{(1)} \cup S^{(2)}$ – некоторый замкнутый контур, охватывающий заданное тело и расположенный полностью внутри жидкости. Обычно используется прямоугольный контур S , стороны которого параллельны осям координат (см. прямоугольник $ABCD$ на фиг. 1). Тогда при обходе контура S против часовой стрелки в (3.1) коэффициент $\alpha = 3\pi/2$ в угловых точках и $\alpha = \pi$ во всех других точках. Область $W = W^{(1)} \cup W^{(2)}$, заключенная между контурами S и Γ , покрывается четырехугольными элементами. При этом горизонтальные стороны контура S разбиваются на NX равных участков, вертикальные стороны, попадающие в верхний слой, – на $NY1$ участков, а в нижний слой – на $NY2$ участков. Полное количество элементов в области W составляет $M = 2(NX + NY1 + NY2)$. В каждом элементе вводится восемь узловых точек, четыре из которых расположены в углах элемента, а остальные – в срединной точке каждой из сторон. Пример расположения узловых точек для элементов, примыкающих к границе раздела, показан на фиг. 1. Светлыми и темными квадратиками отмечены узлы, в которых вычисляется соответственно $\phi_j^{(1)}$ и $\phi_j^{(2)}$.

Используя теорему Грина, получим

$$\sum_{l=1}^2 \left[\iint_{W^{(l)}} \nabla \phi_j^{(l)} \nabla \psi dx dy - \int_{S^{(l)}} \frac{\partial \phi_j^{(l)}}{\partial n} \psi ds \right] = \sum_{l=1}^2 \int_{\Gamma^{(l)}} \frac{\partial \phi_j^{(l)}}{\partial n} \psi ds \quad (3.2)$$

где $\psi(x, y)$ – произвольно выбранная весовая функция. При выполнении интегрирования в (3.2) для каждого элемента области W вместо исходной системы координат x, y

Таблица 1

k	X_k	Y_k	$N_k(X, Y)$
1	-1	-1	$(1 - X)(Y - 1)(1 + X + Y)/4$
2	0	-1	$(1 - X^2)(1 - Y)/2$
3	1	-1	$(1 + X)(Y - 1)(1 - X + Y)/4$
4	1	0	$(1 + X)(1 - Y^2)/2$
5	1	1	$(1 + X)(1 + Y)(X + Y - 1)/4$
6	0	1	$(1 - X^2)(1 + Y)/2$
7	-1	1	$(1 - X)(1 + Y)(Y - X - 1)/4$
8	-1	0	$(1 - X)(1 - Y^2)/2$

вводится новая система координат X, Y таким образом, что данный элемент становится квадратом $|X|, |Y| \leq 1$. Значения координат X_k, Y_k ($k = \overline{1, 8}$) каждого узла и соответствующие им восьмиточечные квадратичные изопараметрические функции формы $N_k(X, Y)$ приведены в табл. 1. Функции $N_k(X, Y)$ используются в качестве ψ в (3.2). Производные $\partial \phi_j^{(l)} / \partial n$ в правой части уравнения (3.2) известны из граничного условия (1.4), в левой части определяются из системы граничных интегральных уравнений (3.1) на S . В узловых точках, расположенных на границе раздела, неизвестными являются значения потенциалов как в верхнем слое, так и в нижнем. В итоге для каждого значения $j = 1, 2, 3$ следует решить систему линейных уравнений порядка $5M + 6$ для определения значений $\phi_j^{(l)}$ во всех узловых точках. Преимуществом метода гибридных элементов является то, что интегрирование по контуру тела, форма которого может быть довольно сложной, заменяется в (3.1) интегрированием по границе прямоугольника, которое можно выполнить аналитически. Гидродинамическая нагрузка определяется после вычисления интегралов в (1.6).

Известно, что для коэффициентов присоединенной массы и демпфирования выполняется условие симметрии, а также существуют соотношения эквивалентности, вытекающие из закона сохранения энергии, которые выражают коэффициенты демпфирования через амплитуды поверхностных и внутренних волн в дальнем поле. Соотношения эквивалентности для двухслойной жидкости с бесконечно глубоким нижним слоем приведены в [3, 7], а для двухслойной жидкости конечной глубины – в [5].

4. Гидродинамическая нагрузка (результаты расчетов). Численные расчеты выполнены для погруженного эллиптического цилиндра и для плавающего цилиндра с сечением в виде шпангоутного контура Льюиса.

Сечение эллиптического цилиндра задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$

где a и b – большая и малая полуоси эллипса, h – вертикальная координата центра цилиндра.

Компоненты гидродинамической нагрузки τ_{12} и τ_{23} в (1.6) равны нулю для контуров, симметричных относительно вертикальной оси y [8].

В предельном случае $\epsilon \rightarrow \infty$ рассматриваемая задача сводится к определению гидродинамической нагрузки для цилиндра, плавающего на свободной поверхности одно-

Таблица 2

Ω	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.5	2
M_{11} [2]	1.5093	1.3386	0.9917	0.7985	0.7172	0.6834	0.7081
M_{11} (МГЭ)	1.4981	1.3410	0.9944	0.7995	0.7166	0.6820	0.7060
L_{11} [2]	0.2261	0.6219	0.6714	0.5533	0.4317	0.2344	0.1352
L_{11} (МГЭ)	0.2246	0.6232	0.6756	0.5587	0.4370	0.2366	0.1369

Таблица 3

Кривые	H_1/b	H_2/b	h/b	NX	$NY1$	$NY2$
1	2	5	0	12	3	3
2	1.5	5.5	-0.5	14	2	5
3	2.5	4.5	0.5	14	5	2

родной жидкости конечной глубины. Этой проблеме посвящено большое количество расчетов, сравнение с некоторыми из них представлено в [9].

Задача о колебаниях кругового цилиндра, пересекающего границу раздела безграничной двухслойной жидкости, решена в [2] методом мультипольных разложений. В табл. 2 представлены результаты для $M_{11} = \mu_{11}/(\pi\rho_2 a^2)$, $L_{11} = \lambda_{11}/(\pi\rho_2 \omega a^2)$ в зависимости от $\Omega = va(2 + \epsilon)/\epsilon$ при $h/a = -0.5$, $\epsilon = 0.3$. Мультипольное решение получено с учетом 55 мультиполей, в численном решении методом гибридных элементов использованы параметры $NX = 7$, $NY1 = 2$, $NY2 = 5$. Область S представляла собой квадрат со стороной $2.2a$, симметрично расположенный относительно круга радиуса a . Относительное расхождение результатов двух методов, представленных в таблице, не превосходит 1.5%.

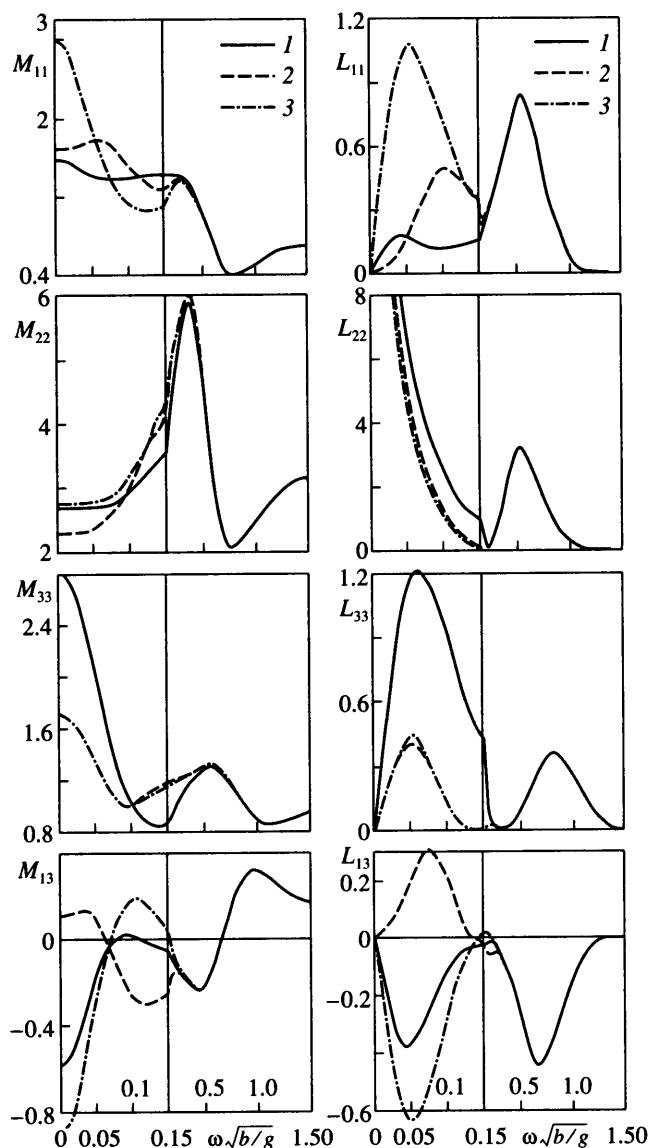
Полная гидродинамическая нагрузка для эллиптического контура $a/b = 2$, вычисленная с помощью метода гибридных элементов, представлена на фиг. 2, где

$$(M_{11}, M_{22}) = \frac{(\mu_{11}, \mu_{22})}{\pi\rho_2 b^2}, \quad M_{33} = \frac{\mu_{33}}{\pi\rho_2 b^4}, \quad M_{13} = \frac{\mu_{13}}{\pi\rho_2 b^3}$$

$$(L_{11}, L_{22}) = \frac{(\lambda_{11}, \lambda_{22})}{\pi\rho_2 \omega b^2}, \quad L_{33} = \frac{\lambda_{33}}{\pi\rho_2 \omega b^4}, \quad L_{13} = \frac{\lambda_{13}}{\pi\rho_2 \omega b^3}$$

Рассмотрены три случая расположения границы раздела, данные для которых представлены в табл. 3. При этом для всех случаев полная глубина жидкости $H = H_1 + H_2 = 7b$ оставалась постоянной, и центр цилиндра находился на глубине $2b$ от свободной поверхности. Перепад плотности на границе раздела составлял $\epsilon = 0.03$. Координаты центра вращательных колебаний в (1.5) равны $x_0 = 0$, $y_0 = h$. На фиг. 2 ось абсцисс представлена в двух масштабах, которые разделены вертикальной прямой.

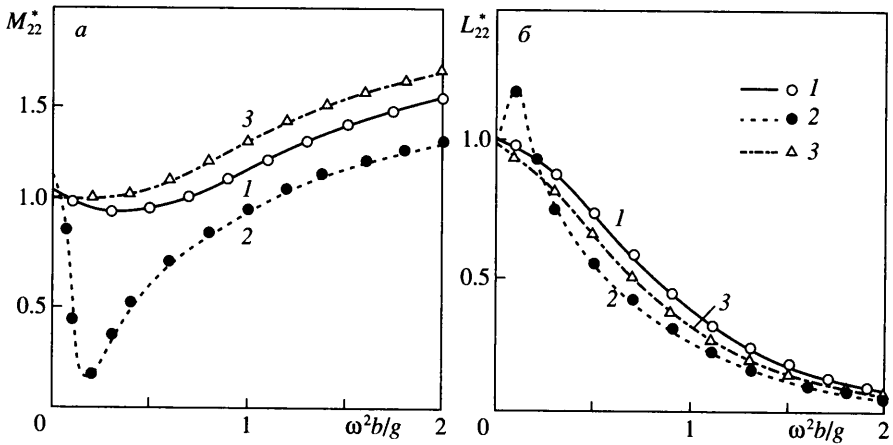
При малых значениях частоты вынужденных колебаний $\omega\sqrt{b/g} < 0.15$ в основном возбуждаются внутренние волны, характеристики которых существенно зависят от положения границы раздела. В этом частотном диапазоне некоторые коэффициенты гидродинамической нагрузки значительно превышают их значения в однородной жидкости. С увеличением частоты генерация внутренних волн ослабевает и



Фиг. 2. Зависимость коэффициентов присоединенной массы M_{ij} и демпфирования L_{ij} от безразмерной частоты для эллиптического контура $a/b = 2$, $\varepsilon = 0.03$. Значения параметров и соответствие кривых в табл. 3

при $\omega\sqrt{b/g} > 0.5$ преобладающими становятся поверхностные волны, на характеристики которых наличие слабой стратификации практически не оказывает влияния.

Отметим существенное отличие в поведении коэффициента присоединенной массы M_{22} при низкой частоте колебаний для жидкости конечной и бесконечной глубины. Этот коэффициент логарифмически растет при $\omega \rightarrow 0$ для безграничной двухслойной жидкости [2], но остается конечным при ограниченной глубине (подробнее см. [10]).



Фиг. 3. Коэффициенты присоединенной массы и демпфирования при вертикальных колебаниях контура Льюиса: 1 – $H_1 = 6$ см, $H_2 = 34$ см, 2 – $H_1 = 15$ см, $H_2 = 25$ см, 3 – однородный слой глубины $H = 40$ см. Кривые – результаты [5], символы – результаты метода гибридных элементов

Для плавающего тела рассмотрен шпангоутный контур Льюиса. В [5] представлено сопоставление экспериментальных и численных результатов некоторых коэффициентов гидродинамической нагрузки для контура со следующими характеристиками: ширина $B = 20$ см, осадка $d = 12$ см, коэффициент полноты $\beta = A/(Bd) = 0.9$, где A – площадь контура. Координаты контура Льюиса определяются следующими параметрическими соотношениями

$$x = a_0[(1 + a_1)\cos\theta + a_3\cos 3\theta], \quad y = H_1 - a_0[(1 - a_1)\sin\theta - a_3\sin 3\theta]$$

$$\theta = \arctg[(H_1 - y)/x]$$

При заданных значениях B , d , β можно однозначно определить коэффициенты a_0 , a_1 , a_3 [11]. В рассмотренном случае $a_0 \approx 1.1866b$, $a_1 \approx -0.0845$, $a_3 \approx -0.0728$, где $b = B/2$.

В эксперименте использовались две несмешивающиеся жидкости: изопарафиновое масло (isozole 300) с плотностью $\rho_1 = 0.764$ г/см³ и вода – $\rho_2 = 0.999$ г/см³, перепад плотности $\epsilon \approx 0.3076$. Полная глубина жидкости во всех экспериментах составляла $H = 40$ см. Рассматривались два случая, когда контур либо пересекает границу раздела ($H_1 = 6$ см, $H_2 = 34$ см), либо полностью находится в верхнем слое ($H_1 = 15$ см, $H_2 = 25$ см). Для сравнения представлен также третий случай, когда контур колеблется в слое однородной жидкости плотности ρ_2 при том же значении глубины H . Выполненное в [5] сопоставление экспериментальных и численных результатов показало их хорошее согласование.

На фиг. 3 представлено сравнение численных результатов [5] с результатами метода гибридных элементов для безразмерных значений коэффициентов присоединенной массы и демпфирования при вертикальных колебаниях

$$M_{22}^* = \frac{\mu_{22}}{\rho_2 b^2}, \quad L_{22}^* = \frac{\lambda_{22}}{\rho_2 \sqrt{g} b^3}$$

Кривыми 1–3 показаны результаты [5], полученные методом граничных элементов и соответствующие случаям 1–3, а символами 1–3 – аналогичные результаты

метода гибридных элементов. Использовались следующие расчетные параметры: $NX = 4$, $NY1 = 3$, $NY2 = 2$ (случай 1) и $NX = 6$, $NY1 = 6$ (случаи 2, 3). Прямоугольный контур S пересекал свободную поверхность в точках $\pm 1.1b$ и его вертикальный размер составлял $d + 0.1b$. Видно, что численные результаты обоих методов достаточно хорошо согласуются между собой.

Заключение. Предложен эффективный метод численного решения задачи о колебаниях плавающего или погруженного цилиндра, пересекающего границу раздела двухслойной жидкости. Выявлено существенное влияние стратификации и положения тела относительно границы раздела на коэффициенты гидродинамической нагрузки.

Представленный метод может быть использован также для решения дифракционной задачи о рассеянии набегающей поверхностной или внутренней волны на неподвижном горизонтальном цилиндре. Дифракционная нагрузка может быть определена уже из решения радиационной задачи о вынужденных колебаниях тела при использовании соотношений эквивалентности, существующих между решениями радиационной и дифракционной задач [3, 5, 7].

Изложенный метод может быть распространен на пространственный случай при введении соответствующих функций Грина и трехмерных конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда по естественным наукам Китая (грант № 40276008), Исследовательского фонда высшего образования Китая (грант № 2000042309), а также при частичном финансировании первого автора (И.В. Стуровой) в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-902. 2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yeung R., Nguyen T.* Radiation and diffraction of waves in a two-layer fluid // Proc. 22nd Symp. Naval Hydrodynamics. 1998. P. 154–169.
2. *Мотыгин О.В., Стурова И.В.* Волновые движения в двухслойной жидкости, вызванные малыми колебаниями цилиндра, пересекающего границу раздела // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 105–119.
3. *Стурова И.В.* Плоская задача о гидродинамической качке погруженного тела без хода в двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 144–155.
4. *Стурова И.В.* Присоединенные массы цилиндра, пересекающего границу раздела двухслойной невесомой жидкости конечной глубины // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 4. С. 76–82.
5. *Kashiwagi M., Ten I.* Radiation and diffraction problems of a floating body in a two-layer fluid of finite depth // Proc. 14th Int. Offshore and Polar Eng. Conf. Toulon, France. 2004. 8 p.
6. *Klimenko A.V.* The two-dimensional Neumann–Kelvin problem for an interface-intersecting body in a two-layer fluid // Day on Diffraction: Proc. Intern. Seminar. St. Petersburg. 1999. P. 103–112.
7. *Linton C.M., McIver M.* The interaction of waves with horizontal cylinders in two-layer fluids // J. Fluid Mech. 1995. V. 304. P. 213–229.
8. *Хаскинд М.Д.* Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. 328 с.
9. *Sturova I.V.* Radiation loads on interface-piercing cylinder in a two-layer fluid of finite depth by a coupled element technique // Proc. 8th Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics. Busan, Korea. 2003. P. 80–91.
10. *McIver P.* Low-frequency asymptotics of hydrodynamic forces on fixed and floating structures // Ocean Waves Engineering / Ed. M. Rahman. Southampton: Comput. Mech. Publ., 1994. P. 1–49.
11. *Короткин А.И.* Присоединенные массы судна: Справочник. Л.: Судостроение, 1986. 312 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
14.V.2004