

УДК 532.529:532.517.4

© 2005 г. В. М. АЛИПЧЕНКОВ, Л. И. ЗАЙЧИК

ДИСПЕРСИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ БИДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ В ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Представлена кинетическая статистическая модель для описания дисперсии и кластеризации частиц с разной инерционностью в однородной изотропной турбулентности. Развита модель используется для расчета относительной скорости, радиальной функции распределения и ядра столкновений частиц в стационарной бидисперсной суспензии. Выполнено сопоставление полученных результатов с данными прямого численного моделирования.

Ключевые слова: изотропная турбулентность, статистическая модель, радиальная функция распределения, кластеризация и столкновения частиц.

Один из наиболее интересных эффектов взаимодействия частиц с турбулентными вихрями – образование кластеров – компактных областей со значительно повышенной концентрацией дисперсной фазы, окруженных зонами с низкой концентрацией. Явление кластеризации (аккумуляции) частиц в неоднородных турбулентных потоках объясняется их турбулентной миграцией (турбофорезом) из области с высокой интенсивностью турбулентных пульсаций скорости в зону с низкой степенью турбулентности (например, в вязкий подслои на обтекаемой поверхности). Однако результаты недавних численных и теоретических исследований [1–10] свидетельствуют, что эффект кластеризации инерционных частиц может иметь место и в однородной турбулентности, где отсутствуют градиенты пульсаций скорости несущего потока. Следовательно, механизм транспорта частиц под действием турбофореза в его традиционном понимании не имеет места. Такое локальное повышение концентрации обусловлено взаимодействием частиц с мелкомасштабными вихревыми структурами. Наиболее явно кластеризация проявляется при совпадении времени динамической релаксации частиц и временного колмогоровского микромасштаба турбулентности. В [11, 12] явление аккумуляции интерпретируется как результат миграции частиц под действием силы турбофореза в пространстве относительного движения пары частиц. Эта сила стремится уменьшить расстояние между двумя частицами, т.е. вызывает “притяжение” частиц друг к другу вследствие их взаимодействия с турбулентными вихрями. Таким образом, несмотря на стохастическую природу турбулентности, распределение инерционных частиц в турбулентных потоках не является случайным. Кластеризация частиц может приводить к заметному возрастанию как скорости их осаждения [2, 13], так и ядер столкновений и коагуляции [4, 5, 14] в однородной турбулентности.

Все исследования [1–14] относятся к случаю монодисперсной суспензии, состоящей из одинаковых частиц. В [15] выполнено детальное исследование дисперсии и столкновений бидисперсных частиц в изотропной турбулентности на основе прямого численного моделирования (DNS). В [15] также представлена эмпирическая модель для ядра столкновений, основанная на аппроксимационных зависимостях результатов DNS для относительной скорости и радиальной функции распределения сталкивающихся частиц.

В настоящей статье дается развитие кинетической статистической модели, предложенной в [11, 12], на случай бидисперсных частиц, имеющих разные времена релаксации, т.е. различающихся размерами или плотностями. Модель основана на кинетиче-

ском уравнении для двухточечной функции плотности вероятности (ФПВ) скоростей двух частиц. Турбулентное поле предполагается изотропным, однородным, стационарным и несжимаемым. Концентрация частиц считается небольшой, так что их обратным влиянием на турбулентные характеристики сплошной несущей среды можно пренебречь. Полученные результаты сравниваются с данными DNS [15].

1. Кинетическое уравнение для ФПВ скоростей двух частиц. Рассмотрим движение частиц в однородном турбулентном поле при отсутствии силы тяжести. Плотность частиц считается много большей плотности сплошной среды, а размер не превышает колмогоровский пространственный микромасштаб. В этом случае уравнения, описывающие движение частиц, представляются в виде

$$\frac{d\mathbf{R}_{p\alpha}}{dt} = \mathbf{v}_{p\alpha}, \quad \frac{d\mathbf{v}_{p\alpha}}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R}_{p\alpha}, t) - \mathbf{v}_{p\alpha}}{\tau_{p\alpha}} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{R}_{p\alpha}$ и $\mathbf{v}_{p\alpha}$ – координата и скорость частицы группы α ($\alpha = 1, 2$), $\mathbf{u}(\mathbf{R}_{p\alpha}, t)$ – скорость сплошной среды в точке $\mathbf{x} = \mathbf{R}_{p\alpha}(t)$, $\tau_{p\alpha}$ – время релаксации частицы группы α .

Статистическое описание движения частиц основывается на двухточечной двухскоростной ФПВ, впервые введенной для решения задачи о столкновениях частиц в турбулентном потоке в [16]:

$$P(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t) = \langle p(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_{p1}(t))\delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{p1}(t))\delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{R}_{p2}(t))\delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{p2}(t)) \rangle \quad (1.2)$$

где $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция.

Операция осреднения в (1.2) выполняется по ансамблю случайных реализаций поля скорости сплошной среды. Дифференцируя (1.2) по времени с учетом (1.1) и представляя скорость сплошной среды в виде суммы осредненной и пульсационной компонент ($\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$), получим транспортное уравнение для двухточечной ФПВ распределений скоростей двух частиц

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 \left(v_{\alpha k} \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha k}} + \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial (U_k - v_{\alpha k}) P}{\partial v_{\alpha k}} \right) = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial \langle u'_k(\mathbf{x}_{\alpha}, t) p \rangle}{\partial v_{\alpha k}} \quad (1.3)$$

Для замыкания уравнения (1.3) необходимо определить корреляцию $\langle u'_i p \rangle$, характеризующую взаимодействие частиц с турбулентными вихрями сплошной среды. С этой целью поле скорости сплошной среды моделируется гауссовым случайным процессом с известными корреляционными моментами. Тогда с учетом формулы Фурутцу–Новикова для гауссовых случайных функций [17] получаем

$$\langle u'_i(\mathbf{x}_{\alpha}, t) p \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 \iint \langle u'_i(\mathbf{x}_{\alpha}, t) u'_k(\mathbf{x}_{\beta 0}, t_0) \rangle \left\langle \frac{\delta p(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_{\beta 0}, t_0) d\mathbf{x}_{\beta 0} dt_0} \right\rangle d\mathbf{x}_{\beta 0} dt_0 \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\delta p(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_{\beta 0}, t_0) d\mathbf{x}_{\beta 0} dt_0} \right\rangle = \\ & = - \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha j}} \left\langle p \frac{\delta R_{p\alpha j}(t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_{\beta 0}, t_0) d\mathbf{x}_{\beta 0} dt_0} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial v_{\alpha j}} \left\langle p \frac{\delta R_{p\alpha j}(t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_{\beta 0}, t_0) d\mathbf{x}_{\beta 0} dt_0} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Коэффициент $1/2$ в (1.4) введен для того, чтобы не учитывать дважды вклад частиц при их перестановке в пространстве. Для нахождения функциональных производных

в (1.5) привлекаются решения уравнений (1.1), записанные в виде интегралов вдоль траекторий частиц

$$\mathbf{R}_{p\alpha}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{v}_{p\alpha}(t_0) dt_0, \quad \mathbf{v}_{p\alpha}(t) = \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \int_{-\infty}^t \mathbf{u}(\mathbf{R}_{p\alpha}(t_0), t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{p\alpha}}\right) dt_0 \quad (1.6)$$

Применяя оператор функционального дифференцирования к (1.6), получаем выражения для функциональных производных

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{R}_{p\alpha j}(t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_{\beta 0}, t_0) d\mathbf{x}_{\beta 0} dt_0} &= \delta_{jk} \delta(\mathbf{R}_{p\alpha}(t_0) - \mathbf{x}_{\beta 0}) \left[1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{p\alpha}}\right) \right] H(t-t_0) \\ \frac{\delta v_{p\alpha j}(t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_{\beta 0}, t_0) d\mathbf{x}_{\beta 0} dt_0} &= \frac{\delta_{jk}}{\tau_{p\alpha}} \delta(\mathbf{R}_{p\alpha}(t_0) - \mathbf{x}_{\beta 0}) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{p\alpha}}\right) H(t-t_0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда: $H(x < 0) = 0$, $H(x > 0) = 1$.

С учетом (1.5) и (1.7) корреляция скорости пульсаций сплошной среды и двухточечной плотности вероятности частиц (1.4) представляется в виде

$$\begin{aligned} \langle u'_i(\mathbf{x}_\alpha, t) p \rangle &= - \sum_{\beta=1}^2 \left[\int_{-\infty}^t \langle u'_i(\mathbf{x}_\alpha, t) u'_k(\mathbf{R}_{p\beta}(t_0), t_0) \rangle \left(1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{p\beta}}\right) \right) dt_0 \frac{\partial P}{\partial x_{\beta k}} + \right. \\ &+ \left. \int_{-\infty}^t \langle u'_i(\mathbf{x}_\alpha, t) u'_k(\mathbf{R}_{p\beta}(t_0), t_0) \rangle \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{p\beta}}\right) dt_0 \frac{\partial P}{\partial v_{\beta k}} \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для вычисления интегралов в (1.8) необходимо определить лагранжеву двухточечную корреляционную функцию скоростей сплошной среды

$$B_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = \langle u'_i(\mathbf{R}_\alpha(t), t) u'_j(\mathbf{R}_\beta(t+\tau), t+\tau) \rangle, \quad \mathbf{R}_\alpha(t) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{R}_\beta(t) = \mathbf{x} + \mathbf{r}$$

где \mathbf{R}_α и \mathbf{R}_β – векторы, описывающие траектории элементов сплошной среды. Далее функция $B_{Lij}(\mathbf{r}, \tau)$ аппроксимируется, как и в [11, 12, 14],

$$B_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = \langle u'_i u'_j \rangle \Psi_L(\tau) - \frac{S_{ij}(\mathbf{r})}{2} \Psi_{Lr}(\tau|r) \quad (1.9)$$

где $\langle u'_i u'_j \rangle$ – одноточечные моменты пульсаций скорости сплошной среды (жидкости), $S_{ij}(\mathbf{r}) = \langle (u'_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u'_i(\mathbf{x}, t)) (u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u'_j(\mathbf{x}, t)) \rangle$ – двухточечная структурная функция Эйлера второго порядка, $\Psi_L(\tau)$ – автокорреляционная функция Лагранжа пульсаций скорости жидкости вдоль траектории частицы, $\Psi_{Lr}(\tau|r)$ – безразмерная лагранжева автокорреляционная функция инкремента пульсаций скоростей. Между моментами и автокорреляционными функциями пульсаций и инкрементов пульсаций скоростей имеют место соотношения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{ij}(\mathbf{r}) = 2 \langle u'_i u'_j \rangle \quad (1.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_{Lr}(\tau|r) = \Psi_L(\tau) \quad (1.11)$$

С учетом допущения об идентичности корреляций пульсаций скорости, определенных вдоль траекторий элементов сплошной среды и инерционных частиц, аппроксимация (1.9) позволяет представить (1.8) в виде

$$\begin{aligned} \langle u'_i(\mathbf{x}_\alpha, t) p \rangle = & -\langle u'_i u'_k \rangle \left(\tau_{p\alpha} g_{u\alpha} \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha k}} + f_{u\alpha} \frac{\partial P}{\partial v_{\alpha k}} \right) - \\ & - \tau_{p\beta} \left(\langle u'_i u'_k \rangle g_{u\beta} - \frac{S_{ik}}{2} g_{r\beta} \right) \frac{\partial P}{\partial x_{\beta k}} - \left(\langle u'_i u'_k \rangle f_{u\beta} - \frac{S_{ik}}{2} f_{r\beta} \right) \frac{\partial P}{\partial v_{\beta k}}, \quad \beta \neq \alpha \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$f_{u\alpha} = \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \int_0^\infty \Psi_L(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{p\alpha}}\right) d\tau, \quad g_{u\alpha} = \frac{T_L}{\tau_{p\alpha}} - f_{u\alpha} \quad (1.13)$$

$$f_{r\alpha} = \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \int_0^\infty \Psi_{Lr}(\tau|r) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{p\alpha}}\right) d\tau, \quad g_{r\alpha} = \frac{T_{Lr}}{\tau_{p\alpha}} - f_{r\alpha} \quad (1.14)$$

Здесь $T_L \equiv \int_0^\infty \Psi_L(\tau) d\tau$ – лагранжев интегральный временной масштаб турбулентности, $T_{Lr} \equiv \int_0^\infty \Psi_{Lr}(\tau|r) d\tau$ – интегральный временной масштаб инкремента пульсаций скоростей в точках, находящихся на расстоянии r .

Коэффициенты $f_{u\alpha}$ и $g_{u\alpha}$ определяют степень участия частицы группы α в пульсационном движении сплошной среды, а коэффициенты $f_{r\alpha}$ и $g_{r\alpha}$ характеризуют вовлечение пары частиц группы α , разделенных расстоянием r , в турбулентное движение жидкости. Согласно (1.11), между этими коэффициентами имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_{r\alpha} = f_{u\alpha}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g_{r\alpha} = g_{u\alpha} \quad (1.15)$$

Подставляя (1.12) в (1.3), получаем замкнутое кинетическое уравнение для двухточечной двухскоростной ФПВ пары частиц в однородной бессдвиговой турбулентности

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 \left(v_{\alpha k} \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha k}} + \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial (U_k - v_{\alpha k}) P}{\partial v_{\alpha k}} \right) = & \sum_{\alpha=1}^2 \left[\langle u'_i u'_k \rangle \left(g_{u\alpha} \frac{\partial^2 P}{\partial x_{\alpha i} \partial v_{\alpha k}} + \frac{f_{u\alpha}}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial^2 P}{\partial v_{\alpha i} \partial v_{\alpha k}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\tau_{p\beta}}{\tau_{p\alpha}} \left(\langle u'_i u'_k \rangle g_{u\beta} - \frac{S_{ik}}{2} g_{r\beta} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial x_{\beta i} \partial v_{\alpha k}} + \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \left(\langle u'_i u'_k \rangle f_{u\beta} - \frac{S_{ik}}{2} f_{r\beta} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial v_{\alpha i} \partial v_{\alpha k}} \right], \quad \beta \neq \alpha \end{aligned} \quad (1.16)$$

Члены в левой и правой частях уравнения (1.16) описывают соответственно конвективный и диффузионный переносы в двенадцатимерном фазовом пространстве $(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2)$. Моделирование турбулентных пульсаций скорости сплошной среды гауссовым случайным процессом позволило выразить взаимодействие “частицы–турбулентность” в кинетическом уравнении в виде диффузионного оператора второго порядка типа Фоккера–Планка. Из (1.16) с учетом (1.10) и (1.15) следует, что при увеличении расстояния между частицами ($r \rightarrow \infty$) двухчастичная ФПВ становится равной произведению двух одночастичных распределений $P(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t) = P_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t) P_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t)$, удовлетворяющих кинетическому уравнению [18–20]

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + v_{\alpha k} \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_{\alpha k}} + \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial (U_k - v_{\alpha k}) P_\alpha}{\partial v_{\alpha k}} = \langle u'_i u'_k \rangle \left(g_{u\alpha} \frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial x_{\alpha i} \partial v_{\alpha k}} + \frac{f_{u\alpha}}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial v_{\alpha i} \partial v_{\alpha k}} \right)$$

Для определения коэффициентов вовлечения $f_{u\alpha}$ и $g_{u\alpha}$ привлекается двухмасштабная биэкспоненциальная аппроксимация автокорреляционной функции [21]

$$\Psi_L(\tau) = \frac{1}{2(1-2z^2)^{1/2}} \left\{ (1 + \sqrt{1-2z^2}) \exp\left[-\frac{2\tau}{(1 + \sqrt{1-2z^2})T_L}\right] - (1 - \sqrt{1-2z^2}) \exp\left[-\frac{2\tau}{(1 - \sqrt{1-2z^2})T_L}\right] \right\}, \quad z = \frac{\tau_L}{T_L} \quad (1.17)$$

где τ_T – временной микромасштаб турбулентности Тейлора. Аппроксимация (1.17) приводит к зависимостям для коэффициентов вовлечения (1.13)

$$f_{u\alpha} = \frac{2\Omega_\alpha + z^2}{2\Omega_\alpha + 2\Omega_\alpha^2 + z^2}, \quad g_{u\alpha} = \frac{2\Omega_\alpha + z^2 - z^2\Omega_\alpha}{\Omega_\alpha(2\Omega_\alpha + 2\Omega_\alpha^2 + z^2)}, \quad \Omega_\alpha = \frac{\tau_{p\alpha}}{T_L} \quad (1.18)$$

По аналогии с (1.17) для определения $\Psi_{L_r}(\tau|r)$ используется двухмасштабная биэкспоненциальная аппроксимация с заменой T_L и τ_T соответственно на T_{L_r} и τ_{T_r} . Такая аппроксимация $\Psi_{L_r}(\tau|r)$ приводит к виду коэффициентов вовлечения (1.14), подобному (1.18)

$$f_{r\alpha} = \frac{2\Omega_{r\alpha} + z_r^2}{2\Omega_{r\alpha} + 2\Omega_{r\alpha}^2 + z_r^2}, \quad g_{r\alpha} = \frac{2\Omega_{r\alpha} + z_r^2 - z_r^2\Omega_{r\alpha}}{\Omega_{r\alpha}(2\Omega_{r\alpha} + 2\Omega_{r\alpha}^2 + z_r^2)}, \quad \Omega_{r\alpha} = \frac{\tau_{p\alpha}}{T_{L_r}}, \quad z_r = \frac{\tau_{T_r}}{T_{L_r}} \quad (1.19)$$

Если характеристики турбулентности $\langle u_i u_j' \rangle$, $S_{ij}(\mathbf{r})$, T_L , T_{L_r} , τ_T , τ_{T_r} известны, то кинетическое уравнение (1.16) с учетом (1.18) и (1.19) полностью определяет одноточечную и двухточечную статистику пары частиц в однородном бесдвиговом турбулентном потоке.

2. Уравнения для моментов. Непосредственное решение уравнения (1.16) представляет собой очень сложную задачу вследствие большой размерности фазового пространства. Более целесообразным, с вычислительной точки зрения, является решение уравнений для моментов кинетического уравнения, хотя при этом, естественно, происходит некоторая потеря статистической информации о поведении частиц.

Путем интегрирования (1.16) по подпространству скоростей (\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2) можно получить цепочку уравнений для двухточечных моментов ФПВ двух частиц. Так, уравнением для числовой плотности частиц в бидисперсной суспензии N_{12} будет

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial t} + \frac{\partial N_{12} V_{1k}}{\partial x_{1k}} + \frac{\partial N_{12} V_{2k}}{\partial x_{2k}} = 0 \quad (2.1)$$

$$N_{12} = \iint P d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2, \quad V_{\alpha i} = \frac{1}{N_{12}} \iint v_{\alpha i} P d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2$$

Уравнение для осредненной скорости частиц $V_{\alpha i}$ записывается как

$$\frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial t} + V_{\alpha k} \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial x_{\alpha k}} + V_{\beta k} \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial x_{\beta k}} = \frac{U_i - V_{\alpha i}}{\tau_{p\alpha}} - \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha k} \rangle}{\partial x_{\alpha k}} - \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha \beta} \rangle}{\partial x_{\beta k}} - \frac{D_{\alpha ik} \partial \ln N_{12}}{\tau_{p\alpha} \partial x_{\alpha k}} - \frac{D_{\alpha \beta ik} \partial \ln N_{12}}{\tau_{p\alpha} \partial x_{\beta k}}, \quad \beta \neq \alpha \quad (2.2)$$

$$D_{\alpha ij} = \tau_{p\alpha} (\langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle + g_{u\alpha} \langle u_i u_j' \rangle), \quad D_{\alpha \beta ij} = \tau_{p\alpha} \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} \rangle + \tau_{p\beta} (g_{u\beta} \langle u_i u_j' \rangle - g_{r\beta} S_{ij}/2)$$

Уравнение для вторых моментов пульсаций скоростей частиц одной группы представляется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle}{\partial t} + V_{\alpha k} \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle}{\partial x_{\alpha k}} + V_{\beta k} \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle}{\partial x_{\beta k}} + \frac{1}{N_{12}} \left(\frac{\partial N_{12} \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} v'_{\alpha k} \rangle}{\partial x_{\alpha k}} + \frac{\partial N_{12} \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} v'_{\beta k} \rangle}{\partial x_{\beta k}} \right) = \\ & = \frac{2}{\tau_{p\alpha}} (f_{u\alpha} \langle u'_i u'_j \rangle - \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle) - \frac{D_{\alpha i k} \partial V_{\alpha j}}{\tau_{p\alpha} \partial x_{\alpha k}} - \frac{D_{\alpha j k} \partial V_{\alpha i}}{\tau_{p\alpha} \partial x_{\alpha k}} - \frac{D_{\alpha \beta i k} \partial V_{\alpha j}}{\tau_{p\alpha} \partial x_{\beta k}} - \frac{D_{\alpha \beta j k} \partial V_{\alpha i}}{\tau_{p\alpha} \partial x_{\beta k}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\beta \neq \alpha$

Уравнение для вторых моментов пульсаций скоростей частиц разных групп записывается как

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} \rangle}{\partial t} + V_{\alpha k} \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} \rangle}{\partial x_{\alpha k}} + V_{\beta k} \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} \rangle}{\partial x_{\beta k}} + \frac{1}{N_{12}} \left(\frac{\partial N_{12} \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} v'_{\alpha k} \rangle}{\partial x_{\alpha k}} + \frac{\partial N_{12} \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} v'_{\beta k} \rangle}{\partial x_{\beta k}} \right) = \\ & = \left(\frac{f_{u\beta}}{\tau_{p\alpha}} + \frac{f_{u\alpha}}{\tau_{p\beta}} \right) \langle u'_i u'_j \rangle - \left(\frac{f_{r\beta}}{\tau_{p\alpha}} + \frac{f_{r\alpha}}{\tau_{p\beta}} \right) \frac{S_{ij}}{2} - \left(\frac{1}{\tau_{p\alpha}} + \frac{1}{\tau_{p\beta}} \right) \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} \rangle - \\ & - \frac{D_{\alpha i k} \partial V_{\beta j}}{\tau_{p\alpha} \partial x_{\alpha k}} - \frac{D_{\beta j k} \partial V_{\alpha i}}{\tau_{p\beta} \partial x_{\beta k}} - \frac{D_{\alpha \beta i k} \partial V_{\beta j}}{\tau_{p\alpha} \partial x_{\beta k}} - \frac{D_{\beta \alpha i k} \partial V_{\alpha i}}{\tau_{p\beta} \partial x_{\alpha k}}, \quad \beta \neq \alpha \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как в дальнейшем понадобятся уравнения, описывающие относительное движение пары частиц, введем переменные, характеризующие движение бидисперсной системы в целом (\mathbf{x} , \mathbf{v}) и относительное движение двух групп частиц (\mathbf{r} , \mathbf{w})

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

Переходя к новым координатам в (2.1)–(2.4) с учетом однородности турбулентности (в связи с чем могут быть опущены производные по \mathbf{x}), получим систему уравнений

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial t} + \frac{\partial N_{12} W_k}{\partial r_k} = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial t} + W_k \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial r_k} = \frac{U_i - V_{\alpha i}}{\tau_{p\alpha}} - (-1)^\alpha \left(\frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha k} \rangle}{\partial r_k} - \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta k} \rangle}{\partial r_k} \right) - \\ & - (-1)^\alpha \frac{D_{\alpha i k} - D_{\alpha \beta i k}}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial \ln N_{12}}{\partial r_k} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle}{\partial t} + W_k \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle}{\partial r_k} - \frac{(-1)^\alpha \partial N_{12} \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} (v'_{\beta k} - v'_{\alpha k}) \rangle}{N_{12} \partial x_{\alpha k}} = \\ & = \frac{2}{\tau_{p\alpha}} (f_{u\alpha} \langle u'_i u'_j \rangle - \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle) - (-1)^\alpha \frac{D_{\alpha i k} - D_{\alpha \beta i k}}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial V_{\alpha j}}{\partial x_{\alpha k}} - (-1)^\alpha \frac{D_{\alpha j k} - D_{\alpha \beta j k}}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial r_k} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} \rangle}{\partial t} + W_k \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} \rangle}{\partial r_k} - \frac{(-1)^\alpha \partial N_{12} \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} (v'_{\beta k} - v'_{\alpha k}) \rangle}{N_{12} \partial r_k} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{f_{u\beta}}{\tau_{p\alpha}} + \frac{f_{u\alpha}}{\tau_{p\beta}} \right) \langle u'_i u'_j \rangle - \left(\frac{f_{r\beta}}{\tau_{p\alpha}} + \frac{f_{r\alpha}}{\tau_{p\beta}} \right) \frac{S_{ij}}{2} - \left(\frac{1}{\tau_{p\alpha}} + \frac{1}{\tau_{p\beta}} \right) \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} \rangle - \\
&- (-1)^\alpha \frac{D_{\alpha ik} - D_{\alpha\beta ik}}{\tau_{p\alpha}} \frac{\partial V_{\beta j}}{\partial r_k} + (-1)^\alpha \frac{D_{\beta jk} - D_{\beta\alpha jk}}{\tau_{p\beta}} \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial r_k}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\beta \neq \alpha, \quad W_i = V_{2i} - V_{1i}$$

Далее рассмотрим стационарную покоящуюся суспензию в однородной стационарной турбулентности с нулевой средней скоростью. В этом случае имеют место равенства

$$U_i = V_{1i} = V_{2i} = W_i = 0 \tag{2.9}$$

и, следовательно, уравнение баланса для числовой плотности частиц в бидисперсной системе (2.5) может быть исключено из анализа, так как удовлетворяется тождественно. Из (2.6) с учетом (2.9) следует уравнение

$$\frac{\partial S_{pik}}{\partial r_k} + \frac{D'_{pik}}{\tau_p} \frac{\partial \ln \Gamma_{12}}{\partial r_k} = 0 \tag{2.10}$$

$$S_{pij} = \langle w'_i w'_j \rangle = \langle v'_{1i} v'_{1j} \rangle + \langle v'_{2i} v'_{2j} \rangle - \langle v'_{1i} v'_{2j} \rangle - \langle v'_{2i} v'_{1j} \rangle$$

$$\begin{aligned}
D'_{pij} &= \tau_p \left(\frac{D_{1ij} - D_{12ij}}{\tau_{p1}} + \frac{D_{2ij} - D_{21ij}}{\tau_{p2}} \right) = \\
&= \tau_p S_{pij} + \frac{2(\tau_{p2} - \tau_{p1})(\tau_{p1} g_{u1} - \tau_{p2} g_{u2})}{\tau_{p1} + \tau_{p2}} \langle u'_i u'_j \rangle + \frac{(\tau_{p1}^2 g_{r1} + \tau_{p2}^2 g_{r2})}{\tau_{p1} + \tau_{p2}} S_{ij}
\end{aligned}$$

$$\tau_p = \frac{2\tau_{p1}\tau_{p2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}, \quad \Gamma_{12} = \frac{N_{12}}{N_1 N_2}$$

Здесь S_{pij} – структурная функция второго порядка пульсаций скоростей частиц, D'_{pij} – коэффициент относительной диффузии двух частиц, τ_p – эффективное время релаксации двух частиц, Γ_{12} – радиальная функция распределения, N_α – средняя числовая концентрация частиц группы α . Уравнение (2.10) может быть интерпретировано как баланс между силой турбофореза, обусловленной градиентом интенсивности пульсаций относительной скорости двух частиц, и диффузионной силой в пространстве относительного движения пары частиц.

Уравнение для структурной функции S_{pij} получается из (2.7), (2.8) с учетом (2.9)

$$\frac{\partial \Gamma_{12} S_{pijk}}{\partial r_k} + \frac{2\Gamma_{12}}{\tau_p} \left[S_{pij} - \frac{(\tau_{p2} - \tau_{p1})(f_{u1} - f_{u2})}{\tau_{p1} + \tau_{p2}} \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{(\tau_{p1} f_{r1} + \tau_{p2} f_{r2})}{\tau_{p1} + \tau_{p2}} S_{ij} \right] = 0 \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
S_{pijk} &= \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{2\tau_{p2}} \langle v'_{1i} v'_{1j} (v'_{2k} - v'_{1k}) \rangle + \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{2\tau_{p1}} \langle v'_{2i} v'_{2j} (v'_{2k} - v'_{1k}) \rangle - \\
&- \langle (v'_{1i} v'_{2j} + v'_{2i} v'_{1j}) (v'_{2k} - v'_{1k}) \rangle
\end{aligned}$$

Для замыкания системы уравнений (2.10) и (2.11) необходимо определить корреляцию третьего порядка S_{pijk} . В монодисперсной системе частиц эта величина представляет собой структурную функцию третьего порядка $S_{pijk} = \langle w'_i w'_j w'_k \rangle$. В [11, 12] S_{pijk} на-

ходится из соответствующего дифференциального уравнения путем пренебрежения в нем членами, характеризующими эволюцию во времени, конвекцию и генерацию вследствие градиентов осредненной скорости. В результате получается алгебраическое соотношение для структурной функции третьего порядка пульсаций скоростей монодисперсных частиц

$$S_{pijk} = -\frac{1}{3} \left(D_{pin}^r \frac{\partial S_{pjik}}{\partial r_n} + D_{pjn}^r \frac{\partial S_{pik}}{\partial r_n} + D_{pkn}^r \frac{\partial S_{pij}}{\partial r_n} \right) \quad (2.12)$$

Примем, что соотношение (2.12) справедливо и для бидисперсной системы частиц. Тогда (2.10) и (2.11) с учетом (2.12) позволяют моделировать двухточечную статистику относительной скорости пары частиц в бидисперсной суспензии на уровне уравнений для вторых моментов.

3. Стационарная суспензия частиц в изотропной турбулентности. В изотропной турбулентности, благодаря сферической симметрии, подразумевающей независимость относительных скоростей и плотности распределения частиц от пространственной ориентации вектора \mathbf{r} , система уравнений (2.10)–(2.12) сводится к решению задачи

$$\frac{2(S_{pll}^\circ - S_{pnn}^\circ)}{r^\circ} + \frac{dS_{pll}^\circ}{dr^\circ} + \frac{D_{pll}^{r^\circ} d \ln \Gamma_{12}}{St dr^\circ} = 0 \quad (3.1)$$

$$St \frac{d}{dr^\circ} \left(\Gamma_{12} D_{pll}^{r^\circ} \frac{dS_{pll}^\circ}{dr^\circ} \right) + 2\Gamma_{12} \left[\frac{(St_2 - St_1)(f_{u1} - f_{u2})Re_\lambda}{15^{1/2}(St_1 + St_2)} + \frac{St_1 f_{r1} + St_2 f_{r2}}{St_1 + St_2} S_{ll}^\circ - S_{pll}^\circ \right] = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{St}{3r^{\circ 2}} \left\{ \frac{d}{dr^\circ} \left(r^{\circ 2} \Gamma_{12} D_{pll}^{r^\circ} \frac{dS_{pll}^\circ}{dr^\circ} \right) + 2 \frac{d}{dr^\circ} [r^\circ \Gamma_{12} D_{pnn}^{r^\circ} (S_{pll}^\circ - S_{pnn}^\circ)] \right\} + 2\Gamma_{12} \left[\frac{(St_2 - St_1)(f_{u1} - f_{u2})Re_\lambda}{15^{1/2}(St_1 + St_2)} + \frac{St_1 f_{r1} + St_2 f_{r2}}{St_1 + St_2} S_{nn}^\circ - S_{pnn}^\circ \right] = 0 \quad (3.3)$$

$$D_{pll}^{r^\circ} = St S_{pll}^\circ + \frac{2(St_2 - St_1)(St_1 g_{u1} - St_2 g_{u2})Re_\lambda}{15^{1/2}(St_1 + St_2)} + \frac{(St_1^2 g_{r1} + St_2^2 g_{r2}) S_{ll}^\circ}{St_1 + St_2}$$

$$D_{pnn}^{r^\circ} = St S_{pnn}^\circ + \frac{2(St_2 - St_1)(St_1 g_{u1} - St_2 g_{u2})Re_\lambda}{15^{1/2}(St_1 + St_2)} + \frac{(St_1^2 g_{r1} + St_2^2 g_{r2}) S_{nn}^\circ}{St_1 + St_2}$$

$$St = \frac{2St_1 St_2}{St_1 + St_2}$$

В (3.1)–(3.3) верхний символ “градус” обозначает обезразмеривание на колмогоровские масштабы длины $\eta \equiv (v^3/\varepsilon)^{1/4}$ и скорости $u_k \equiv (v\varepsilon)^{1/4}$; $St_\alpha \equiv \tau_{p\alpha}/\tau_k$ – число Стокса, характеризующее инерционность частиц; S_{pll} и S_{pnn} – продольная и поперечная компоненты структурной функции скоростей частиц S_{pij} ; $Re_\lambda \equiv (15u^4/\varepsilon\nu)^{1/2}$ – число Рейнольдса; $u^2 = \langle u'_k u'_k \rangle / 3$ – интенсивность пульсаций скорости сплошной среды; ε – скорость

диссипации турбулентной энергии; ν – кинематическая вязкость жидкости. Итак, рассматриваемая задача представляет собой нелинейную систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиальной функции распределения и продольной и поперечной структурных функций пульсаций скоростей частиц.

Граничные условия для уравнений (3.1)–(3.3) задаются в виде

$$\frac{dS_{pll}^\circ}{dr^\circ} = \frac{dS_{pnn}^\circ}{dr^\circ} = 0, \quad r^\circ = 0 \quad (3.4)$$

$$S_{pll}^\circ = S_{pnn}^\circ = \frac{(f_{u1} + f_{u2})\text{Re}_\lambda}{15^{1/2}}, \quad \Gamma_{12} = 1, \quad r^\circ \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

Условия (3.4) выражают баланс между потоками частиц, направленными к началу и из начала координат, и справедливы в случае, когда размер частиц много меньше колмогоровского микромасштаба η . Условия (3.5) отражают тот факт, что на больших расстояниях между частицами r их движение некоррелировано, т.е. относительные скорости перестают зависеть от r и частицы случайным образом (равномерно) распределены в пространстве.

Продольная и поперечная структурные функции Эйлера пульсаций скорости сплошной среды, а также двухточечный интегральный временной масштаб Лагранжа задаются такими же аппроксимациями, как и в [14]

$$\frac{1}{S_{ll}^{\circ k}} = \left(\frac{15}{r^{\circ 2}}\right)^k + \frac{1}{(Cr^{\circ 2/3})^k} + \left(\frac{15^{1/2}}{2\text{Re}_\lambda}\right)^k, \quad \frac{1}{S_{nn}^{\circ k}} = \left(\frac{15}{2r^{\circ 2}}\right)^k + \left(\frac{3}{4Cr^{\circ 2/3}}\right)^k + \left(\frac{15^{1/2}}{2\text{Re}_\lambda}\right)^k$$

$$\frac{1}{T_{Lr}^{\circ k}} = \frac{1}{A_1^k + (A_2 r^{\circ 2/3})^k} + \frac{1}{T_L^{\circ k}}, \quad C = 2, \quad A_1 = 5^{1/2}, \quad A_2 = 0.3, \quad k = 20$$

Лагранжев интегральный и тейлоровский дифференциальный масштабы турбулентности аппроксимируются зависимостями [14]

$$T_L^\circ = \frac{T_L}{\tau_k} = \frac{2(\text{Re}_\lambda + C_1)}{15^{1/2} C_{0\infty}}, \quad C_{0\infty} = 7, \quad C_1 = 32$$

$$\tau_T^\circ = \frac{\tau_T}{\tau_k} = \left(\frac{2\text{Re}_\lambda}{15^{1/2} a_0}\right)^{1/2}, \quad a_0 = \frac{a_0 + a_{0\infty}\text{Re}_\lambda}{a_{02} + \text{Re}_\lambda}, \quad a_{01} = 11, \quad a_{02} = 205, \quad a_{0\infty} = 7$$

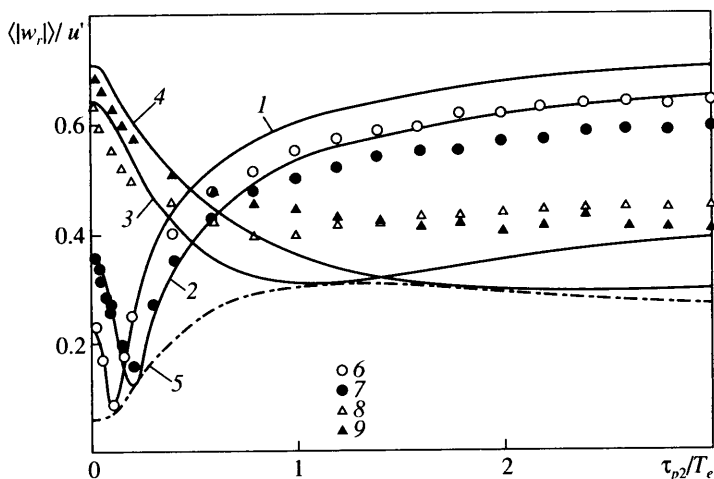
Тейлоровский временной микромасштаб инкремента пульсаций скорости в двух точках, необходимый для определения коэффициентов вовлечения (1.19), находится из допущения, что отношение между макро- и микромасштабами не зависит от расстояния между точками r , т.е. $\tau_{Tr} = \tau_T T_{Lr}/T_L$.

Уравнения (3.1)–(3.3) вместе с граничными условиями (3.4), (3.5) решались численно, и полученные результаты сравнивались с данными DNS [15]. Однако вначале рассмотрим асимптотические решения этой задачи в случае мало- и высокоинерционных частиц. Для безынерционных частиц группы 2 ($St_2 = 0, f_{u2} = f_{r2} = 1$) из (3.1)–(3.3) следует

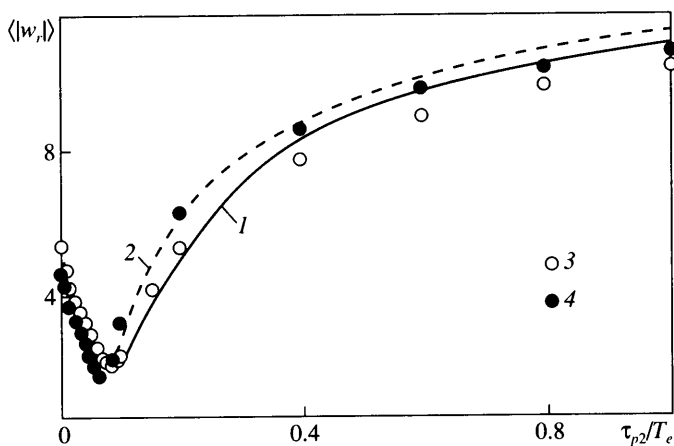
$$S_{pll}^\circ = \frac{(1 - f_{u1})\text{Re}_\lambda}{15^{1/2}} + f_{r1} S_{ll}^\circ, \quad S_{pnn}^\circ = \frac{(1 - f_{u1})\text{Re}_\lambda}{15^{1/2}} + f_{r1} S_{nn}^\circ, \quad \Gamma_{12} = 1 \quad (3.6)$$

Для высокоинерционных частиц группы 2 ($St_2 \rightarrow \infty, f_{u2} = f_{r2} \rightarrow 0$) из (3.1)–(3.3) получается

$$S_{pll}^\circ = S_{pnn}^\circ = \frac{f_{u1}\text{Re}_\lambda}{15^{1/2}}, \quad \Gamma_{12} = 1 \quad (3.7)$$



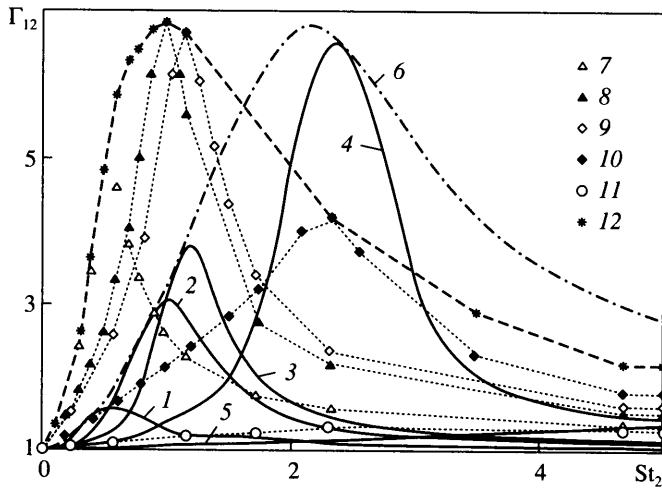
Фиг. 1. Радиальная относительная скорость частиц при $r^o = 1$ и $Re_\lambda = 45$: 1–5 – расчеты; 6–9 – DNS [15]; 1, 6 – $\tau_{p2} = 0.1$; 2, 7 – 0.2; 3, 8 – 1; 4, 9 – 2; 5 – монодисперсная система частиц



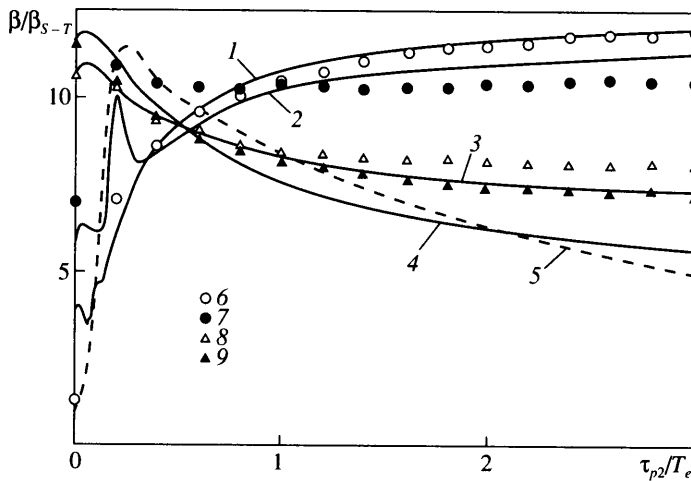
Фиг. 2. Влияние числа Рейнольдса на радиальную относительную скорость частиц при $St_1 = 1$: 1, 2 – расчеты; 3, 4 – DNS [15]; 1, 3 – $Re_\lambda = 45$; 2, 4 – 58

Сравнение представленной модели с данными численного моделирования [15] показано на фиг. 1–4. Результаты даны в виде зависимостей от времени релаксации частиц группы 2, отнесенного к временному макромасштабу турбулентности $T_e = u'^2/\epsilon$, при фиксированных значениях времени релаксации частиц группы 1.

Фигура 1 демонстрирует влияние инерционности частиц на среднюю относительную радиальную скорость, отнесенную к пульсационной скорости жидкости, при $Re_\lambda = 45$ и $r^o = 1$. Осредненная по модулю радиальная относительная скорость выражается через продольную структурную функцию при помощи соотношения $\langle |w_r| \rangle = (2S_{p11}/\pi)^{1/2}$, справедливого в предположении нормального закона распределения. Видно, что при $\tau_{p2} = 0$ в соответствии с (3.6) величина $\langle |w_r| \rangle / u'$ монотонно возрастает с увеличением τ_{p1} / T_e , что обусловлено уменьшением корреляции между скоростями частиц с ростом их инерционности. Напротив, при больших значениях τ_{p2} / T_e , согласно (3.7), $\langle |w_r| \rangle / u'$ мо-



Фиг. 3. Радиальная функция распределения при $r^0 = 1$ и $Re_\lambda = 45$: 1-6 – расчеты; 7-12 – DNS [15]; 1, 7 – $St_1 = 0.5$; 2, 8 – 1.0; 3, 9 – 1.17; 4, 10 – 2.34; 5, 11 – 11.7; 6, 12 – монодисперсная система частиц



Фиг. 4. Ядро столкновений при $Re_\lambda = 45$ и $R^0 = 1$: 1-5 – расчеты; 5-9 – DNS [15]; 1, 5 – $\tau_{p2}/T_e = 0.1$; 2, 6 – 0.2; 3, 7 – 1; 4, 8 – 2; 5 – монодисперсная система частиц

нотонно снижается с ростом τ_{p1}/T_e , что связано с уменьшением вовлечения более инерционных частиц в турбулентное движение окружающей сплошной среды.

Из фиг. 1 также видно, что в соответствии с DNS относительная радиальная скорость вначале снижается с ростом τ_{p2}/T_e , достигает минимума, а далее увеличивается, стремясь к постоянному значению, предсказываемому (3.7). Минимум в зависимости $\langle |w_r| \rangle / u'$ от τ_{p2}/T_e особенно ярко выражен при малых значениях параметра τ_{p1}/T_e . Как отмечено в [15], сравнение с результатами для монодисперсной системы показывает, что разница в инерционностях частиц повышает относительную скорость между ними, поэтому величина $\langle |w_r| \rangle / u'$ в бидисперсной системе всегда больше, чем в монодисперсной, т.е. ограничена снизу соответствующим значением для монодисперсной системы (кривая 5).

Таким образом, минимумы на фиг. 1 соответствуют значениям $\tau_{p2} = \tau_{p1}$. Полученные значения $\langle |w_r| \rangle / u'$ практически совпадают с результатами [15] для малоинерционных частиц ($St_1, St_2 \leq 1$). Согласие для высокоинерционных частиц ($St_1, St_2 \gg 1$) несколько хуже, что, по-видимому, связано с учетом влияния инерционности частиц на корреляционную функцию (1.9), т.е. с допущением об идентичности корреляций пульсаций скорости, определенных вдоль траекторий элементов сплошной среды и инерционных частиц. В целом представленная модель правильно предсказывает основные особенности поведения относительной радиальной скорости во всем диапазоне изменения времен релаксации частиц обеих групп.

Фигура 2 демонстрирует влияние числа Рейнольдса на радиальную относительную скорость частиц при $r^\circ = 1$ и $St_1 = 1$, показано сравнение с результатами [15] для двух различных чисел Re_λ . Как видно, имеет место хорошее соответствие с DNS, особенно для малоинерционных частиц. Следует отметить, что модель правильно предсказывает снижение и рост $\langle |w_r| \rangle$ с увеличением Re_λ соответственно при малых и больших значениях числа St_2 .

Результаты расчета радиальной функции распределения в зависимости от St_2 при фиксированных значениях St_1 вместе с данными DNS приведены на фиг. 3. Как следует из (3.6) и (3.7), в предельных случаях мало- и высокоинерционных частиц одной из групп относительное распределение частиц из разных групп в пространстве однородно и, следовательно, $\Gamma_{12} = 1$. В соответствии с данными прямого численного моделирования радиальная функция распределения проходит через максимум по мере возрастания St_2 , хотя полученные значения максимумов несколько сдвинуты в направлении более высоких значений St_2 по сравнению с DNS. Максимумы достигаются при совпадении времен релаксации частиц обеих групп, т.е. при $St_1 = St_2$. На фиг. 3 приведены радиальные функции распределения для монодисперсной системы частиц, соответствующие максимумам зависимостей $\Gamma_{12}(St_2)$ для бидисперсной суспензии и ограничивающие их сверху. Таким образом, явление кластеризации наиболее заметно проявляется в монодисперсной суспензии и становится менее заметным при увеличении разности в инерционностях частиц.

Ядро столкновений в бидисперсной системе частиц определяется соотношением

$$\beta = 2\pi R^2 \langle |w_r(R)| \rangle \Gamma_{12}(R) = (8\pi S_{pH}(R))^{1/2} R^2 \Gamma_{12}(R) \quad (3.8)$$

где $R = r_1 + r_2$ – радиус сферы столкновений, r_α – радиус частиц группы α . Из (3.8) следует, что ядро столкновений связано с двумя статистическими явлениями, обусловленными взаимодействием частиц с турбулентными вихрями, а именно с относительной скоростью между соседними частицами (так называемым турбулентным транспортным эффектом) и неоднородным распределением частиц в пространстве (эффектом аккумуляирования или кластеризации частиц), характеризуемым радиальной функцией распределения. При столкновениях безынерционных или очень инерционных частиц эффект аккумуляирования отсутствует, поскольку такие частицы независимо распределены в пространстве случайным образом. Однако влияние кластеризации на ядро столкновений оказывается очень существенным, когда времена релаксации сталкивающихся частиц оказываются близкими к колмогоровскому временному масштабу.

Сопоставление ядра столкновений, отнесенного к соответствующей величине для безынерционных частиц β_{S-T} [22], с результатами численного моделирования представлено на фиг. 4. Видно, что зависимость β/β_{S-T} от τ_{p2}/T_e имеет немонотонный характер, отражая наличие минимума и максимума в соответствующих зависимостях для $\langle |w_r| \rangle$ и Γ_{12} . В соответствии с результатами DNS [15] получено, что в случае, когда кластеризация частиц пренебрежимо мала ($St_1, St_2 \ll 1$ или $St_1, St_2 \gg 1$), благодаря увеличению средней относительной скорости между частицами, принадлежащими к разным

группам, ядро столкновений в бидисперсной суспензии оказывается большим, чем в монодисперсной. Напротив, когда эффект аккумулярования оказывается существенным ($St_1, St_2 \sim 1$), ядро столкновений в бидисперсной суспензии становится меньшим, чем в монодисперсной.

Заключение. Развита двухточечная статистическая модель для описания дисперсии и кластеризации бидисперсной системы частиц в однородной турбулентности. Предложенная модель основана на кинетическом уравнении для ФПВ распределений скоростей двух частиц. Получена замкнутая система уравнений для радиальной функции распределения и структурных функций второго порядка пульсаций скоростей частиц. Проведен анализ явления кластеризации бидисперсных частиц в стационарном изотропном турбулентном поле. На основе сопоставления с данными прямого численного моделирования можно сделать вывод, что предложенная двухточечная кинетическая модель правильно описывает основные особенности дисперсии и столкновений бидисперсных частиц в однородной изотропной турбулентности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Squires K.D., Eaton J.K.* Preferential concentration of particles by turbulence // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. № 5. P. 1169–1178.
2. *Wang L.-P., Maxey R.M.* Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 256. P. 27–68.
3. *Sundaram S., Collins L.R.* Collision statistics in an isotropic particle-laden turbulent suspension. Pt 1. Direct numerical simulations // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 335. P. 75–109.
4. *Wang L.-P., Wexler A.S., Zhou Y.* Statistical mechanical description and modelling of turbulent collision of inertial particles // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 415. P. 117–153.
5. *Reade W.C., Collins L.R.* Effect of preferential concentration on turbulent collision rates // *Phys. Fluids*. 2000. V. 12. № 10. P. 2530–2540.
6. *Février P., Simonin O., Legendre D.* Particle dispersion and preferential concentration dependence on turbulent Reynolds number from direct and large-eddy simulations of isotropic homogeneous turbulence // *Proc. 4th Intern. Conf. on Multiphase Flow*. New Orleans, 2001. P. 1–18.
7. *Hogan R.C., Cuzzi J.N.* Stokes and Reynolds number dependence of preferential particle concentration in simulated three-dimensional turbulence // *Phys. Fluids*. 2001. V. 13. № 10. P. 2938–2945.
8. *Sigurgeirsson H., Stuart A.M.* A model for preferential concentration // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. № 12. P. 4352–4361.
9. *Кляцкин В.И., Эльперин Т.* Кластеризация поля плотности числа малоинерционных частиц в случайных бездивергентных гидродинамических потоках // *ЖЭТФ*. 2002. Т. 122. Вып. 2. С. 328–340.
10. *Кляцкин В.И.* Кластеризация и диффузия частиц и плотности пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках // *Успехи физ. наук*. 2003. Т. 173. № 7. С. 689–710.
11. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Кластеризация частиц в изотропном турбулентном потоке // *Изв. РАН. МЖГ*. 2003. № 3. С. 78–95.
12. *Zaichik L.I., Alipchenkov V.M.* Pair dispersion and preferential concentration of particles in isotropic turbulence // *Phys. Fluids*. 2003. V. 15. № 6. P. 1776–1787.
13. *Aliseda A., Cartellier A., Hainaux F., Lasheras J.C.* Effect of preferential concentration on the settling velocity of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 468. P. 77–105.
14. *Zaichik L.I., Simonin O., Alipchenkov V.M.* Two statistical models for predicting collision rates of inertial particles in homogeneous isotropic turbulence // *Phys. Fluids*. 2003. V. 15. № 10. P. 2995–3005.
15. *Zhou Y., Wexler A.S., Wang L.-P.* Modelling turbulent collision of bidisperse inertial particles // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 433. P. 77–104.
16. *Деревич И.В.* Столкновения частиц в турбулентном потоке // *Изв. РАН. МЖГ*. 1996. № 2. С. 104–116.
17. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
18. *Деревич И.В., Зайчик Л.И.* Осаждение частиц из турбулентного потока // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1988. № 5. С. 96–104.

19. Деревич И.В., Зайчик Л.И. Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 767–774.
20. Reeks M.W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 3. P. 446–456.
21. Sawford B.L. Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 6. P. 1577–1586.
22. Saffman P.G., Turner J.S. On the collision of drops in turbulent clouds // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 1. P. 16–30.

Москва

Поступила в редакцию
22.IV.2004