

УДК 532.527

© 2005 г. В. А. АНТОНОВ, А. С. БАРАНОВ, Б. П. КОНДРАТЬЕВ

ЛОКАЛЬНЫЕ ВИХРИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОТОКЕ

Рассмотрен нестационарный локальный эллиптический вихрь в дифференциальном двумерном потоке несжимаемой жидкости. Описаны нелинейные колебания вихрей типа циклонов и антициклонов. Найден первый интеграл уравнений колебаний. Установлено, что эволюционные треки могут быть как замкнутыми, так и незамкнутыми. Первые соответствуют азимутальным колебаниям главной оси, а вторые – полному вращательному состоянию эллиптического вихря. Получены также стационарные решения; они представлены эллипсами, вытянутыми или сжатыми вдоль потока. Исследованы малые колебания фигур равновесия вихрей и выведено общее дисперсионное уравнение для возмущений произвольного типа. Найден критерий устойчивости.

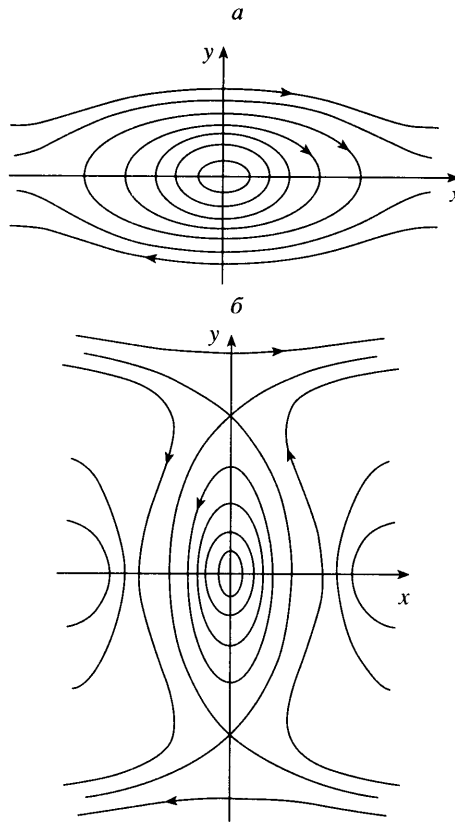
Ключевые слова: вихрь, несжимаемая жидкость, дифференциальный поток, циклон, антициклон.

Вопросы эволюции протяженных вихревых структур, весьма существенные для ряда задач технической механики, геофизики и астрофизики, интенсивно изучаются в наше время: современное состояние этой тематики отражено, в частности, в [1, 2]. Примечательно, что опыты с вращением тонкого слоя жидкости в сосуде обнаруживают много общих черт с явлением циркуляции в атмосферах планет [3, 4] и со сходными явлениями в дисках галактик [5]. Математическая сторона дела отражена, в частности, в [6–8]. Нелинейная постановка задачи при этом заставляет в какой-то мере привлекать численные эксперименты и не совсем строгие качественные соображения. Здесь используется несколько другой путь: анализируются точно решаемые модели, способные служить достаточно надежными отправными точками для проверки иных, приближенных методов.

Представим себе двумерный поток идеальной жидкости, сводящийся на бесконечности к простому дифференциальному, т.е. с постоянной завихренностью, течению. Пусть внутри потока существует относительно автономный вихрь конечного размера. В таком окружении вихрь будет уже не чисто круговым, как в случае отсутствия движений на бесконечности, а более или менее сжатым (см. фиг. 1). Как впервые показал С.А. Чаплыгин [9], существует решение для идеальной жидкости с эллиптической формой локального вихря, если значения завихренности внутри и снаружи такого локального образования постоянны (но не равны друг другу). Однако в [9] остались неизученными сами стационарные состояния (фигуры равновесия вихрей) и их устойчивость.

Здесь даются некоторые дополнения к упомянутой работе: независимым от развитого в [9] методом выводятся уравнения колебаний вихря, получен их первый интеграл, исследуются стационарные состояния и их устойчивость относительно произвольных возмущений (см. фиг. 2), находятся три режима вращения вихря.

1. Постановка задачи. Введем обозначения: x, y – декартовы координаты, u, v – соответствующие компоненты скорости, p^* – давление, ρ – плотность жидкости (постоян-



Фиг. 1. Схематическое расположение линий тока:
 $a - a > b$ (случай антициклона); $b - a < b$ (случай циклона)

ная), ψ – функция тока, через которую компоненты скорости несжимаемой жидкости выражаются обычным образом

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.1)$$

В идеальной жидкости завихренность $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ сохраняется для каждой частицы. Она равна $-\alpha$ внутри вихря и $-\beta$ во всей внешней области. Последнее предположение согласуется на больших расстояниях с асимптотикой

$$\psi \approx \frac{\beta y^2}{2}, \quad u \approx \beta y, \quad v \approx 0 \quad (1.2)$$

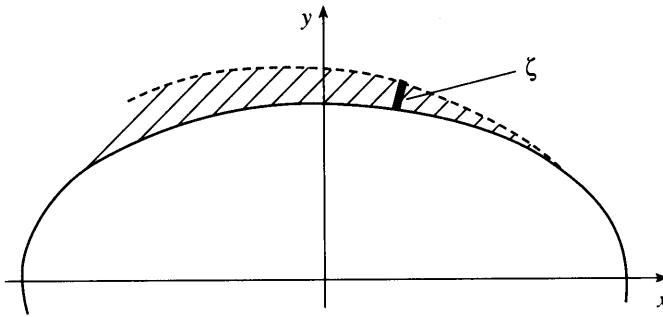
С учетом формулы (1.1) получается, что ψ удовлетворяет уравнению Пуассона в одной из форм

$$\Delta \psi = \beta, \quad \Delta \psi = \alpha \quad (1.3)$$

соответственно для внешней среды и самого вихря.

Введем вспомогательную функцию тока

$$\varphi = \psi - \frac{\beta y^2}{2} \quad (1.4)$$



Фиг. 2. Возмущение границы эллипса

Функция φ может возрастать на бесконечности только логарифмическим образом. Во внешней области она удовлетворяет уравнению Лапласа, а во внутренней – модифицированному уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = \alpha - \beta \quad (1.5)$$

Заметим, что предполагается непрерывность компонент скорости u и v на границе вихря. Физически это обосновано по крайней мере в большинстве практически важных случаев. В частности, в галактиках солитон должен быть как бы сращен с окружающей массой газа. Но нельзя совсем сбрасывать со счета и другие возможные приложения, когда солитон возникает из какой-то инородной массы [10]. Присутствие инородной массы в отличие от рассматриваемой здесь модели не меняет значения циркуляции в окружающей среде, но создает скачок тангенциальной скорости на границе локального вихря. В [1], кстати, не проведено четкое различие между этими двумя случаями.

2. Стационарный вихрь. Рассмотрим сначала, как в [9], стационарное состояние. Тогда одна из линий тока просто совпадает с границей солитона, т.е. $\psi = \text{const}$ на его границе. Нужное решение уравнения (1.5) для эллипса в более позднее время было тщательно изучено в связи с вопросами о тяготении однородного эллиптического цилиндра [11]. Если ввести обозначения $A = \sqrt{a^2 + \lambda}$ и $B = \sqrt{b^2 + \lambda}$, то

$$\varphi = \frac{(\alpha - \beta)ab}{2} \left[\ln \frac{A+B}{a+b} + \frac{x^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{B}{A} \right) + \frac{y^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{A}{B} \right) \right], \quad (2.1)$$

$$\varphi = \frac{(\alpha - \beta)ab}{2(a+b)} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right)$$

соответственно во внешней и внутренней областях, причем a и b – значения полуосей эллипса, а λ – положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 \quad (2.2)$$

существующий во всей внешней области. На самой границе эллипса имеем $\lambda = 0$, а функция ψ вместе с ее производными должна быть непрерывной. Для (2.1) автома-

тически выполняется и асимптотика на бесконечности. Остается только потребовать условие $\psi = \text{const}$ на границе. Используя (1.4) и вторую формулу (2.1), находим

$$\frac{(\alpha - \beta)ab}{2(a+b)} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) + \frac{\beta y^2}{2} = \text{const} \quad (2.3)$$

на эллипсе, так что левая часть (2.3) должна быть пропорциональна таковой для эллипса. Это дает искомое условие равновесия

$$v = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a(a-b)}{a^2 + b^2} = \frac{1-\mu}{1+\mu^2} \left(\mu = \frac{b}{a} \right) \quad (2.4)$$

Отсюда ясно, что вихрь никогда не бывает круговым, кроме как в отсутствие дифференциальности потока $\beta = 0$. При совпадении знаков α и β получаем сплюснутые эллипсы ($b < a$), и при их различии – вытянутые ($b > a$). Заметим, что в первом случае есть одно стационарное решение только при $0 < v < 1$, а во втором случае – два решения при

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} < \frac{\beta}{\alpha} < v < 0 \quad (2.5)$$

(левая часть (2.5) – минимум дроби $(1-\mu)/(1+\mu^2)$), но ни одного решения при $v < v_1$.

3. Эволюция эллиптических вихрей. Рассмотрим теперь случай, когда в начальный момент равновесия нет, а форма вихря – эллиптическая с произвольным наклоном его главных осей к осям координат. При условии несжимаемости сохраняется площадь сечения вихря $ab = \text{const}$, причем уравнение эллипса берется в системе координат, наклоненной к исходной на угол θ . Сохранение импульсов относительно x и y описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= 2\Omega v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \Omega^2 x + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -2\Omega u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \Omega^2 y + \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где учтено вращение системы с угловой скоростью Ω и гравитационное поле с потенциалом $V(x, y, t)$, t – время.

Подстановка соотношений (1.1) в (3.1) дает

$$\begin{aligned} \psi_{yt} + \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} &= -2\Omega \psi_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \Omega^2 x + \frac{\partial V}{\partial x} \\ -\psi_{xt} - \psi_y \psi_{xx} + \psi_x \psi_{xy} &= -2\Omega \psi_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \Omega^2 y + \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В (3.2) заменяем производные от ψ по одной и той же переменной с помощью той или другой формулы (1.3). Тогда получается

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.3)$$

со вспомогательной функцией $T(x, y, t)$

$$T = \gamma \psi + \frac{\psi_x^2 + \psi_y^2}{2} + 2\Omega \psi + \frac{p^*}{\rho} - \frac{\Omega^2 (x^2 + y^2)}{2} - V \quad (3.4)$$

где $\gamma = \beta$ и α соответственно для внешней и внутренней областей.

Из (3.3) следует, что функция T удовлетворяет уравнению Лапласа по отдельности в каждой области. Составляя разность значений функции (3.4) по обеим сторонам границы вихря, находим

$$T_e - T_i = (\alpha - \beta)\psi \quad (3.5)$$

где индексы e и i – значения данной функции с внешней и внутренней сторон разрыва. При выводе (3.5) использовали тот факт, что все остальные члены правой части (3.4), включая и давление p^* , непрерывны при переходе через границу. С другой стороны, массы жидкости, входящей в слой и выходящей из него, должны совпадать. Согласно определению (1.1) и формулам (3.3), это эквивалентно непрерывности нормальной производной от T при переходе через границу

$$\frac{\partial T_e}{\partial n} = \frac{\partial T_i}{\partial n} \quad (3.6)$$

Строим теперь простейшие гармонические функции в области внутри и вне эллипса [12]. Временно пользуемся системой координат x', y' , связанной с главными осями эллипса, переопределив в ней соответственно λ . Внутренние гармонические функции строятся таким образом:

$$V_{i1} = 1, \quad V_{i2} = x'^2 - y'^2, \quad V_{i3} = x'y' \quad (3.7)$$

(нечетные функции по смыслу задачи нам не нужны). Внешние функции:

$$V_{e1} = \frac{A-B}{A+B} + 2\left(\frac{b^2 y'^2}{B} - \frac{a^2 x'^2}{A}\right)(A+B)^{-2} \quad (3.8)$$

$$V_{e2} = \frac{x'y'}{\sqrt{AB}(A+B)^2}, \quad V_{e3} = \ln(A+B)$$

Можно даже непосредственно проверить, что функции (3.8) стремятся к нулю на больших расстояниях ($\lambda \rightarrow \infty$) или по крайней мере ведут себя логарифмически (V_{e3}) и удовлетворяют уравнению Лапласа. Соответственно имеем T_i и T_e в виде

$$T_i = c_1 + c_2(x'^2 - y'^2) + c_3 x'y' \quad (3.9)$$

$$T_e = h_1 V_{e1}(x', y') + h_2 V_{e2}(x', y') + h_3 V_{e3}(x', y')$$

с подлежащими определению параметрами $c_1, c_2, c_3, h_1, h_2, h_3$. При раскрытии (3.5) надо подставить граничное значение $\lambda = 0$. Это дает

$$h_1 \left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{2(y'^2 - x'^2)}{(a+b)^2} \right] + \frac{h_2 x'y'}{ab(a+b)^2} + h_3 \ln(a+b) - c_1 - c_2(x'^2 - y'^2) - c_3 x'y' -$$

$$- (\alpha - \beta) \left[\frac{(\alpha - \beta)ab}{2(a+b)} \left(\frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} \right) + \frac{\beta}{2} (x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 \right] = 0 \quad (3.10)$$

Аналогично из (3.6) находим

$$2c_2 \left(\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right) + c_3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) x'y' =$$

$$= h_1 \left[\frac{4(bx^2 - ay^2)}{a^2 b^2 (a+b)} - \frac{2(a-b)}{ab(a+b)} + \frac{4}{(a+b)^2} \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right) \right] + \quad (3.11)$$

$$+ h_2 \left[\frac{1}{ab(a+b)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{1}{a^2 b^3} \right] x' y' + \frac{h_3}{ab}$$

Из сравнения членов с x^2 , y^2 , $x'y'$ в (3.10) и (3.11), причем x' , y' на границе связаны стандартным уравнением эллипса, получается шесть уравнений для коэффициентов. В дальнейшем оказывается достаточно знать только два из них

$$c_2 = \frac{(\alpha - \beta)^2 ab(b-a)}{2(a+b)^3} + \frac{\beta(\beta - \alpha)}{2(a+b)^2} (a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta) \quad (3.12)$$

$$c_3 = - \frac{2\beta(\alpha - \beta)ab \sin \theta \cos \theta}{(a+b)^2} \quad (3.13)$$

Сопоставление (3.3) с (3.9) дает $\partial u / \partial t = -2c_2 x' - c_3 y'$, $\partial v / \partial t = 2c_2 y' - c_3 x'$ (u , v здесь связаны с осями x' , y') и, таким образом, полные скорости по прошествии малого интервала времени определяются через функцию тока

$$\psi + d\psi = \frac{(\alpha - \beta)ab}{2(a+b)} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) + \quad (3.14)$$

$$+ \frac{\beta}{2} (x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + \left[\frac{c_3 (x'^2 - y'^2)}{2} - 2c_2 x' y' \right] dt$$

Система координат в (3.14) используется неподвижная. Если же ввести систему координат x'' , y'' , следящую за поворотом осей эллипса, то в линейном приближении

$$x' = x'' - y'' d\theta, \quad y' = y'' + x'' d\theta \quad (3.15)$$

где $d\theta$ – дополнительный угол поворота большой оси за время dt .

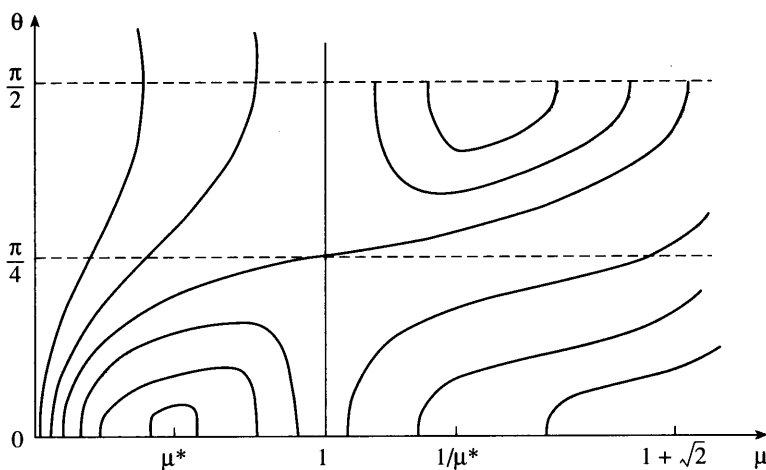
При подстановке (3.15) в (3.14) с той же точностью происходит замена $x' \sin \theta + y' \cos \theta \rightarrow x'' \sin(\theta + d\theta) + y'' \cos(\theta + d\theta)$. Член с этой комбинацией остается неизменным, а остальные члены после замены (3.15) должны совпадать с таким же выражением в составе ψ без приращения $d\psi$, но с учетом превращения a , b в $a + da$, $b + db$. Пользуясь еще сохранением площади солитона $ab = \text{const}$, находим искомые эволюционные уравнения для θ и μ

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{(\alpha - \beta)\mu}{(1 + \mu)^2} - \frac{\beta(\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta)}{1 - \mu^2}, \quad \frac{d\mu}{dt} = -2\beta\mu \sin \theta \cos \theta \quad (3.16)$$

причем учтены явные выражения (3.12), (3.13) для c_2 и c_3 . В частном случае $\beta = 0$ получается эллиптический вихрь Кирхгофа [13] $d\theta/dt = \Omega = \alpha\mu/(1 + \mu)^2$. Уравнения нелинейных колебаний (3.16) впервые выведены в [9], но без исследования устойчивости стационарных состояний.

Прежде всего находим интеграл уравнений (3.16)

$$H = \frac{\alpha - \beta}{\beta} \ln \frac{(1 + \mu)^2}{4\mu} + \mu \cos^2 \theta + \frac{1}{\mu} \sin^2 \theta \quad (3.17)$$



Фиг. 3. Эволюционные линии, $\alpha - \beta > 0$ ($\beta = 1$)

Система (3.16) приводится к каноническому виду, если в качестве переменных взять θ и $\mu + 1/\mu$. Фактически это свойство, однако, не использовано.

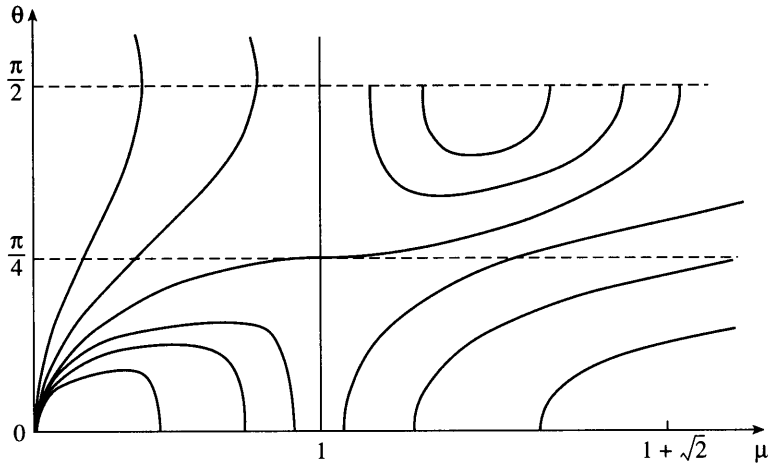
Анализ уравнений (3.16) подтверждает, что стационарные состояния существуют только при совпадении ориентации главных осей солитона и исходных осей координат. Но можно рассмотреть и колебания произвольной амплитуды относительно стационарного состояния. Фактически, не ограничивая общности, принимаем $\beta > 0$. Тогда надо различать три случая.

1) Если $\alpha - \beta > 0$, из (2.4) видно, что $0 < \mu < 1$ для стационарного состояния. Изобразим схематически расположение кривых $H = \text{const}$, по которым и происходит движение. В частности, при $\theta = 0$ у H имеется единственный минимум – при стационарном состоянии $\mu = \mu^*$. Заметим еще, что при $\mu = 1$ всегда $H = 1$. Несколько сложнее выглядит поведение H вблизи $\mu = 0, \theta = 0$. Асимптотически (3.17) можно тогда переписать в виде

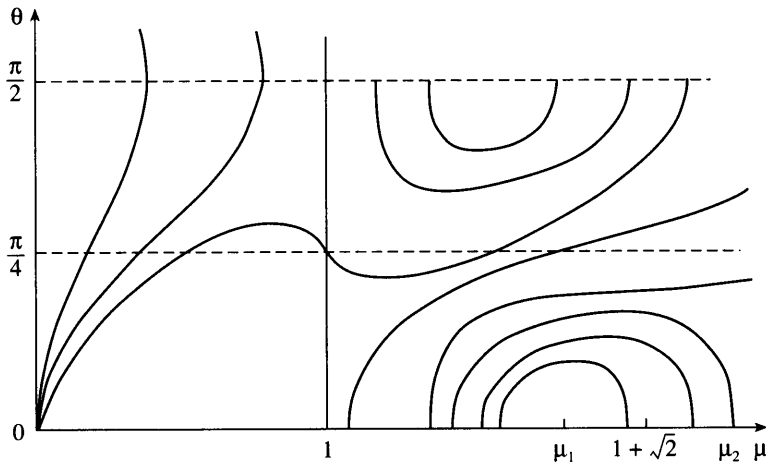
$$\theta^2 \mu^{-1} - [(\alpha - \beta)\beta^{-1}] \ln 4\mu \approx H \tag{3.18}$$

Из последнего уравнения видно, что при отклонении θ от нуля значение μ увеличивается, т.е. кривые $H = \text{const}$ после пересечения оси μ загибаются направо. Учитываем еще геометрически очевидные инвариантность H по отношению к замене $\mu \rightarrow 1/\mu$ и $\theta \rightarrow \theta + \pi/2$ и периодичность этой функции с периодом π . По этим указаниям можно наметить ход уровнейных кривых H (см. фиг. 3). Траектории $H = \text{const}$ распадаются на два класса: замкнутые и незамкнутые. Первое означает, что значение угла θ колеблется не более, чем $\pi/4$, в ту и другую стороны, и в целом получается колебание направления большой оси эллипса вокруг устойчивого состояния. Второй тип поведения означает, что вихрь крутится прогрессивно: угол θ все время возрастает или убывает. Частным случаем этого типа оказывается упомянутый выше вихрь Кирхгофа ($\beta = 0$).

2) В случае $0 > (\alpha - \beta)/\beta > -3 - \sqrt{8}$ нахождение экстремума H приводит к уравнению $\beta\mu^2 + \alpha\mu + \beta - \alpha = 0$ с отрицательными или же комплексными корнями, физически несостоятельными. Из формулы (3.18) видно, что вблизи $\mu = 0, \theta = 0$ кривые $H = \text{const}$ заворачиваются влево и, следовательно, приходят в самую эту точку, образуя узел.



Фиг. 4. Эволюционные линии, $0 > \alpha - \beta > -3 - \sqrt{8}$ ($\beta = 1$), пример $\alpha = 0$



Фиг. 5. Эволюционные линии, $\alpha - \beta < -3 - \sqrt{8}$ ($\beta = 1$)

Все кривые $H = \text{const}$ стремятся к $\mu = 0$ и ∞ , так что солитон вытягивается в тонкую нить и в дальнейшем исчезает (прогрессивно “раздавливается”). Расположение кривых показано на фиг. 4.

3) При $(\alpha - \beta)/\beta < -3 - \sqrt{8}$ вновь появляются экстремумы H при $\theta = 0$, но уже в правой половине фигуры при $\mu > 1$. Проверка знака второй производной от H показывает, что кривые $H = \text{const}$ окружают точку с $\mu = \mu_1$, а $\mu = \mu_2$ дает седло (μ_1 и μ_2 – меньший и больший корни уравнения (2.4), причем всегда $\mu_1 < 1 + \sqrt{2}$, $\mu_2 > 1 + \sqrt{2}$). Расположение кривых показано на фиг. 5. Налицо траектории как замкнутого типа, так и соответствующие раздавливанию вихря.

4. Энергетические соотношения. К тем же самым качественным выводам можно прийти, определив кинетическую энергию возмущенного состояния (потенциальная

энергия не играет роли, поскольку в любом потенциальном поле она не может измениться ввиду несжимаемости). Точнее, из полной кинетической энергии, взятой по какой-то широкой области M , надо вычитать энергию основного движения без вихря. Таким образом, определяется

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho}{2} \iint_M (u^2 + v^2 - \beta^2 y^2) dx dy = \\ &= \frac{\rho}{2} \iint_M \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - \beta^2 y^2 \right] dx dy = \\ &= \frac{\rho}{2} \iint_M \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 2\beta y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned}$$

Первые члены преобразуются стандартным образом

$$\iint_M \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \oint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx \right) - \iint_M \Phi \Delta \Phi dx dy \quad (4.1)$$

В качестве области M естественно выбрать полосу $|y| < B$ с достаточно большим B . (Круговая, например, область физически менее удобна из-за выноса энергии вместе с течением за пределы области). Контурный интеграл в (4.1) имеет порядок $1/B$ и им можно пренебречь. Остается интеграл по площади эллипса E

$$\iint_M \Phi \Delta \Phi dx dy = (\alpha - \beta) \iint_E \Phi dx dy = \frac{\pi(\alpha - \beta)^2 a^2 b^2}{2} \left[\ln(a + b) + \frac{1}{4} \right] \quad (4.2)$$

Формула (4.2) не меняется при повороте эллипса. Наоборот, в оставшемся интеграле от $y(\partial\Phi/\partial y)$ этот поворот надо учитывать. Удобно представлять себе функцию $\Phi(x, y)$ суммой многих аналогично построенных функций $\Phi(x, y|x_i, y_i)$, различающихся тем, что уравнение Пуассона (1.5) действует в малой области с площадью ΔS_i вокруг точки x_i, y_i . Тогда, руководствуясь формулой (2.1), находим асимптотику

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \approx \frac{(\alpha - \beta) \Delta S_i (y - y_i)}{2\pi[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} dx = \frac{(\alpha - \beta) \Delta S_i}{2} y \operatorname{sign}(y - y_i)$$

$$\iint_M \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} dx dy = \frac{\alpha - \beta}{2} (B^2 - y_i^2) \Delta S_i$$

Объединяя эти результаты для всех малых площадок, получаем

$$\iint_M \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy = \frac{\alpha - \beta}{2} \iint_E (B^2 - y^2) dx dy$$

и тогда с учетом наклона эллипса

$$\frac{2T}{\rho} = - \frac{\pi(\alpha - \beta)^2 a^2 b^2}{2} \left[\ln(a + b) + \frac{1}{4} \right] + \pi a b \beta (\alpha - \beta) \left(B^2 - \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{4} \right)$$

что после выражения a и b через μ и постоянную величину ab приводит, с точностью до некоторого линейного преобразования, к уже встречавшейся функции H (см. формулу (3.17)). Итак, подтверждается сохранение дополнительной энергии при колебаниях вихря любой амплитуды.

5. Произвольные малые колебания. Рассмотрим произвольные колебания вихря, не сохраняющие уже эллиптическую форму, но ограничимся при этом линейным приближением. Пусть сначала $a > b$. Введем на плоскости эллиптические координаты ξ, η посредством формул

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \quad (5.1)$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – фокусное расстояние, а граница соответствует некоторому $\xi = \xi_0$, так что $a = c \operatorname{ch} \xi_0$, $b = c \operatorname{sh} \xi_0$.

Известны элементарные гармонические функции [12], выражающиеся в эллиптических координатах: внутренние и внешние

$$\begin{aligned} V_{i1} &= \operatorname{ch} k \xi \cos k \eta, & V_{i2} &= \operatorname{sh} k \xi \sin k \eta, \\ V_{e1} &= e^{-k \xi} \cos k \eta, & V_{e2} &= e^{-k \xi} \sin k \eta \end{aligned} \quad (5.2)$$

Индекс k может принимать значения $0, 1, 2, \dots$, причем в каждом конкретном случае (в линейном приближении) можно обойтись функциями только с одним значением k , исключая нулевое, которое дало бы просто переход к вихрю большего масштаба.

Функция φ удовлетворяет уравнению Пуассона внутри деформированной области, а ее приращение $\delta\varphi$ – уравнению Лапласа, как и во внешней области, так что можно положить внутри и вне деформированного эллипса соответственно

$$\delta\varphi_i = p_k V_{i1} + q_k V_{i2}, \quad \delta\varphi_e = P_k V_{e1} + Q_k V_{e2} \quad (5.3)$$

Функции ψ и φ должны быть непрерывными на границе вихря. К измененному значению $\psi + \delta\psi$ функции ψ на эллипсе при переходе к возмущенной границе добавляется $\zeta(\partial\psi/\partial n)$, где ζ – смещение границы, отсчитываемое по нормали n . Разность обеих таких сумм, изнутри и извне, с учетом непрерывности $\partial\psi/\partial n$ в стационарном состоянии в линейном приближении просто сводится к разности соответствующих $\delta\psi = \delta\varphi$, т.е. одно граничное условие имеет вид $\delta\varphi_i = \delta\varphi_e$ ($\xi = \xi_0$). В раскрытом виде, если собрать отдельные члены с $\cos k \eta$ и $\sin k \eta$, оно означает

$$p_k \operatorname{ch} k \xi_0 = P_k e^{-k \xi_0}, \quad q_k \operatorname{sh} k \xi_0 = Q_k e^{-k \xi_0} \quad (5.4)$$

Для связи между нормальными производными обратимся к фиг. 2. Интегрирование $\Delta\varphi$ по выделенному участку слоя между исходной и возмущенной границами дает, с учетом уравнения Лапласа во внешней области

$$\iint \Delta\varphi dx dy = \int_E \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds - \int_E \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$$

(E – площадь деформированного эллипса), и в линейном приближении

$$(\alpha - \beta)\zeta = \left[\frac{\partial\delta\varphi}{\partial n} \right]_i \quad (5.5)$$

На границе, как следует из (5.1), $dx^2 + dy^2 = c^2(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)(d\xi^2 + d\eta^2)$ и

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (5.6)$$

Ищем смещение границы в виде

$$\zeta = \frac{L \cos k\eta + N \sin k\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta}} \quad (5.7)$$

Подставляя в (5.5) выражения (5.3) и (5.7), с учетом (5.6) опять находим после разделения \cos и \sin

$$(\beta - \alpha)L = \frac{k}{c}(P_k e^{-k\xi_0} + p_k \operatorname{sh} k\xi_0), \quad (\beta - \alpha)N = \frac{k}{c}(Q_k e^{-k\xi_0} + q_k \operatorname{ch} k\xi_0) \quad (5.8)$$

Обратимся теперь к функциям T_i, T_e , возмущения которых – тоже гармонические функции. Линеаризация (3.5) дает

$$[\delta T]_i^e = (\alpha - \beta) \left(\delta\varphi + \zeta \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) \quad (5.9)$$

Ищем эти возмущения вспомогательных функций в виде

$$T_i = fV_{i1} + gV_{i2}, \quad T_e = FV_{e1} + GV_{e2} \quad (5.10)$$

Процедура разделения \cos и \sin , совершенно аналогичная предыдущей, позволяет получить из (5.7) и (5.9)

$$\begin{aligned} Fe^{-k\xi_0} - f \operatorname{ch} k\xi_0 &= (\alpha - \beta) [p \operatorname{ch} k\xi_0 - ke^{-\xi_0} (Pe^{-k\xi_0} + p \operatorname{sh} k\xi_0)] \\ Ge^{-k\xi_0} - g \operatorname{sh} k\xi_0 &= (\alpha - \beta) [q \operatorname{sh} k\xi_0 - ke^{-\xi_0} (Qe^{-k\xi_0} + q \operatorname{ch} k\xi_0)] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Из-за конформности отображения $x, y \rightarrow \xi, \eta$ формулы (3.3) можно переписать в виде $-\Psi_{\eta t} = \partial T / \partial \xi$, $\Psi_{\xi t} = \partial T / \partial \eta$ и аналогично для внешней области. Та же самая связь останется между приращениями $\delta\varphi$ и δT , в силу чего прежняя процедура разделения \cos и \sin дает

$$\frac{dq}{dt} = -f, \quad \frac{dp}{dt} = g, \quad \frac{dQ}{dt} = F, \quad \frac{dP}{dt} = -G \quad (5.12)$$

Уравнений (5.4), (5.8), (5.11) и (5.12) достаточно для определения эволюции вихря. Вводя инкремент v , находим после несложных выкладок

$$v^2 = -\beta^2 \sigma_1(\xi_0) \sigma_2(\xi_0) \quad (5.13)$$

где

$$\sigma_{1,2}(\xi_0) = \frac{1}{2} e^{2\xi_0} \operatorname{th} \xi_0 (1 \mp e^{-2k\xi_0}) - ke^{\xi_0} \operatorname{sh} \xi_0 \quad (5.14)$$

В тривиальном случае $k = 1$ имеем дело просто со смещением вихря как целого, поэтому $\sigma_2(\xi_0) = 0$ и $v = 0$. Из (5.14) следует, что σ_2 убывает по отношению к k , так что при k_2 имеем $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$ и $v^2 < 0$, т.е. сжатые вихри всегда устойчивы, как видно на примере $k = 2$.

Для случая $b > a$ видоизменяются начальные формулы (5.1) и связанные с ними. Вместо них будет $x = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta$, $y = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $a = c \operatorname{sh} \xi_0$, $b = c \operatorname{ch} \xi_0$, а формулы (5.2) сохраняют прежний вид. Выкладки точно по тому же плану опять приводят к (5.13) с несколько иным определением σ_1, σ_2

$$\sigma_{1,2}(\xi_0) = \frac{1}{2} e^{2\xi_0} \operatorname{cth} \xi_0 (1 \pm e^{-2k\xi_0}) - k e^{\xi_0} \operatorname{ch} \xi_0$$

Опять-таки при $k = 1$ тождественно $\sigma_2 = 0$, а дальнейший анализ показывает $\sigma_2 < 0$ при $k > 1$. Значение же σ_1 убывает с ростом k . Различаются два случая:

1) $\sigma_1 > 0$ при $k = 2$, тогда $v^2 > 0$ и получается неустойчивость по отношению к эллиптическим деформациям. Нахождение критического ξ_0 и связанного с ним μ дает результат, уже известный как критическое $\mu = 1 + \sqrt{2}$ в полном согласии с анализом для эллиптических деформаций;

2) $\sigma_1 < 0$ при $k = 2$, тогда и при больших k имеем $\sigma_1 < 0$. Неустойчивость проявляется, когда и без того система неустойчива по отношению к возмущениям с $n = 2$.

Подчеркнем приоритет С.А. Чаплыгина [9] в данном вопросе. Имеются более поздние работы без ссылки на [9], главная из которых – [14]. Однако в [14] приведенные формулы явно ошибочны из-за того, что внешний дифференциальный поток берется в неизменном виде, тогда как необходимо было учитывать его вариацию вместе с деформацией самого вихря. Та же ошибка перенесена в [15], где изучается вопрос об устойчивости вихря, но из-за указанной неточности результаты, отличающиеся от наших, просто неверны.

Заключение. Рассмотрены нелинейные колебания, равновесие и устойчивость эллиптического вихря с однородной завихренностью, вложенного в дифференциальный поток несжимаемой жидкости. Общее вращение системы с постоянной угловой скоростью Ω физически выпадает и не сказывается на результатах (из-за постулата несжимаемости), но фактически оно может присутствовать. Результаты можно прилагать к газовым подсистемам достаточно сплюснутых галактик. Если принять $\Omega > 0$, то при обычном в галактиках замедлении вращения при удалении от их центра движение в стационарном состоянии будет как раз соответствовать $\beta > 0$. По общепринятой в геофизике терминологии, вихри с $\alpha > 0$ следует называть антициклоническими, а с $\alpha < 0$ – циклоническими. Анализ устойчивости показывает, что антициклонические вихри всегда устойчивы. Это согласуется с выводами, сделанными лишь в квазилинейном рассмотрении. Напротив, при достаточной сплюснутости циклонические вихри могут быть и неустойчивыми. Заметим, что циклонические вихри появляются, начиная с конечного значения разности $\beta - \alpha$ и недоступны для квазилинейного приближения. Подчеркнем также, что вихрь “материален”. Он состоит из захваченных частиц. Более того, вокруг самого эллиптического вихря обнаруживается зона захвата (четкая для циклонического вихря, но расплывчатая для антициклонического). Аналогичные приложения возможны для атмосфер планет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. М.: Науч. мир, 2000. 375 с.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколовский М.А. Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 704 с.
3. Незлин М.В. Солитоны Россби (Экспериментальные исследования и лабораторная модель природных вихрей типа Большого Красного Пятна Юпитера) // Успехи физ. наук. 1986. Т. 150. № 1. С. 3–60.

4. *Незлин М.В., Снежкин Е.Н.* Вихри Россби и спиральные структуры: Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. М.: Наука, 1990. 237 с.
5. *Корчагин В.И., Петвиашвили В.И.* Солитоны Россби в галактическом диске // Письма в Астрон. журн. 1985. Т. 11. № 4. С. 298–301.
6. *Сутьрин Г.Г.* К теории уединенных антициклонов во вращающейся жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 5. С. 1101–1005.
7. *Сутьрин Г.Г.* Уединенные осесимметричные волны Россби конечной амплитуды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 119–121.
8. *Сутьрин Г.Г., Юшина И.Г.* Формирование вихревого солитона // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 3. С. 580–584.
9. *Чаплыгин С.А.* О пульсирующем цилиндре. // Собр. соч. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. Т. 2. С. 138–154.
10. *Антонов В.А., Железняк О.А.* О происхождении кольцевых структур в галактиках // Астрон. журн. 1988. Т. 65. № 3. С. 461–467.
11. *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. Москва; Ижевск: Ин.-т компьютер. исслед., 2003. 624 с.
12. *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холиевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 269 с.
13. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
14. *Kida S.* Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 10. P. 3517–3520.
15. *Dritschel D.G.* The stability of elliptical vortices in an external straining flow // J. Fluid Mech. 1990. V. 210. P. 223–261.

Санкт-Петербург
Ижевск

Поступила в редакцию
22.1.2004