

УДК 532.526.2.013.4:533.6.011.34

© 2005 г. А. В. КАЗАКОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В СПУТНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ПРИ ОБЪЕМНОМ ПОДВОДЕ ЭНЕРГИИ В ВЯЗКОМ ЯДРЕ ВИХРЯ

Приведены результаты численных расчетов устойчивости осесимметричных закрученных течений в вязком вихре в спутном сверхзвуковом потоке с постоянной циркуляцией окружной составляющей скорости. Характеристики устойчивости закрученного вязкого трехмерного течения в продольном вихре определялись на основе линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса для вязкого теплопроводного газа в предположении локальной плоскопараллельности основного невозмущенного течения. Устойчивость возмущенного течения рассматривалась во временной постановке относительно как симметричных, так и несимметричных трехмерных волн, распространяющихся вдоль оси вихря и соответствующих как положительным, так и отрицательным значениям азимутального волнового числа. Показано, что подвод тепловой энергии в малой области вблизи оси вихря при числах Маха внешнего невязкого потока $M = 2$ и $M = 3$ приводит к существенной перестройке основного невозмущенного течения вблизи ядра вихря, росту неблагоприятного градиента давления вдоль оси вихря и существенному изменению устойчивости и характера поведения малых возмущений.

Ключевые слова: закрученные течения, линейная теория устойчивости.

Закрученные трехмерные течения жидкости и газа представляют большой интерес для исследований в области аэродинамики. Закрутка потока и распределение осевой и окружной составляющих вектора скорости – наиболее важные параметры, определяющие как пространственно-временную эволюцию закрученного течения в целом, так и его устойчивость. В большинстве выполненных ранее исследований закрученные течения и их устойчивость рассматривались в рамках модели несжимаемой жидкости [1–8].

В работах [6, 7] были детально исследованы характеристики устойчивости несжимаемого закрученного течения жидкости и поведение скоростей нарастания малых возмущений в зависимости от чисел Рейнольдса и величины азимутального волнового числа. В [6, 8] приведены результаты численных расчетов закрученных течений при большой интенсивности закрутки потока, в том числе и в случае, когда неблагоприятный продольный градиент давления, возникающий из-за интенсивной закрутки потока, приводит к появлению возвратного течения вблизи оси вихря.

В [9–12] было показано, что учет сжимаемости и теплопроводности может приводить к существенным изменениям характеристик устойчивости закрученных внутренних и внешних течений по сравнению с аналогичными характеристиками течений несжимаемой жидкости даже при условии идентичности распределений полей скоростей в вихре. Характеристики устойчивости закрученных течений чрезвычайно чувствительны к изменениям распределения окружной составляющей скорости, которые могут быть вызваны как перестройкой течения во внешней невязкой области, так и изменениями течения в самом вязком ядре вихря. Даже при постоянной величине циркуляции во внешнем невязком дозвуковом потоке значительное влияние на распределение окружной составляющей скорости в вязком ядре вихря может оказать объемное выделение тепловой энергии и как следствие этого существенно изменить характеристики устойчивости течения [13].

Настоящая работа посвящена исследованию влияния подвода энергии вблизи ядра линейного вихря на закрученное течение вязкого теплопроводного газа в спутном сверхзвуковом потоке и его устойчивость.

1. Постановка задачи. Рассматривается влияние объемного подвода энергии на устойчивость осесимметричного закрученного течения вязкого теплопроводного газа в линейном вихре в спутном сверхзвуковом потоке с постоянной циркуляцией окружной составляющей вектора скорости. Будем использовать цилиндрические координаты (x, r, φ) и соответствующие им компоненты скорости v_x, v_r, v_φ . Ось X совпадает с осью ядра линейного вихря. В дальнейшем будем использовать только безразмерные величины, для чего все линейные размеры отнесем к характерной продольной длине течения l^* : $x^* = l^*x, r^* = l^*r$, компоненты скорости – к характерной продольной скорости вдоль оси вихря u_0^* : $v_x^* = u_0^* v_x, v_r^* = u_0^* v_r, v_\varphi^* = u_0^* v_\varphi$, для плотности, коэффициента динамической вязкости, давления и энтальпии введем следующие обозначения: $\rho^* = \rho_0^* \rho, \mu^* = \mu_0^* \mu, p^* = \rho_0^* u_0^{*2} p, h^* = u_0^{*2} h$. Характерное число Рейнольдса может быть представлено в виде $Re_0 = \rho_0^* u_0^* l^* / \mu_0^*$.

Поперечный размер вязкой области течения вблизи оси вихря (вязкого ядра вихря) при больших числах Рейнольдса обычно оказывается малой величиной по сравнению с продольным масштабом течения и может определяться, например, толщиной пограничного слоя на теле, генерирующем вихрь. Вне вязкого ядра вихря, а именно в области $x \sim O(1), r \sim O(1)$, течение представляет собой невозмущенный изэнтропический невязкий поток с постоянной циркуляцией окружной составляющей скорости и постоянной продольной составляющей скорости вдоль оси вихря. Для описания невозмущенного течения в основной вязкой области (вязкое ядро вихря), следуя [13], удобно ввести новую переменную $V_\varphi = v_\varphi r$, которая фактически с точностью до множителя (2π) представляет собой циркуляцию окружной составляющей вектора скорости.

Полагая, что поперечный размер вихря мал по сравнению с продольным масштабом течения, для построения основного невозмущенного течения в вихре можно воспользоваться квазцилиндрическим приближением и получить в переменных $x_1 = x, r_1 = rRe^{1/2}, V_r = Re^{1/2}v_r, V_1 = Re^{1/2}V_\varphi$ систему уравнений, подробно описанную в [13].

Полученная система параболических уравнений решалась численно с использованием конечно-разностного метода, причем в качестве начальных и краевых условий в начальном сечении $x_1 = 0$ задавались распределения скоростей, аналогичные распределениям, используемым в [3, 10, 13], а число Прандтля $\sigma = 0.7$ и показатель адиабаты $\gamma = 1.4$ полагались постоянными. На оси вихря используются условия симметрии для энтальпии и продольной составляющей скорости и соответственно нулевые значения для поперечной и окружной составляющих скорости, а на внешней границе (при $r_1 \rightarrow \infty$) краевые условия определяются сращиванием соответствующих функций течения с внешним невязким потоком. Коэффициент динамической вязкости предполагается зависящим от температуры по степенному закону $\mu/\mu_0 = (h/h_0)^\omega$. Объемный подвод энергии в вязком ядре вихря, который в реальном физическом течении может быть связан с процессом испарения или конденсации пара, моделировался дополнительным членом в уравнении энергии – $Q(x_1, r_1)$.

Характеристики устойчивости, как и в [10, 13], будут определяться из численного решения линейной задачи устойчивости закрученных вязких течений сжимаемого газа, сформулированной и подробно описанной в [9–11, 13]. В отличие от работ [2, 3, 6, 7], задача устойчивости формулируется в рамках локально плоскопараллельного приближения на основе полной системы уравнений Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа в цилиндрической системе координат, причем в качестве характерных величин скоростей, плотности, вязкости используются соответствующие величины параметров на внешней границе вязкой области. Безразмерные функции возмущенного

течения представляются, как и в [10, 13], в виде суммы функций основного течения, зависящих в рассматриваемом сечении вихря только от поперечной координаты и функций возмущенного течения $v'_x, v'_\varphi, v'_r, \rho', \mu', h', p'$, зависящих от независимых переменных (t, x, r_1, φ) , причем $t^* = \delta^*/v_{x0}^* t, x^* = \delta^* x, r^* = \delta^* r_1, a \delta^* = l^* \delta$ – характерная толщина вязкого ядра вихря в данном сечении. Функции возмущенного течения представляются в виде волн, распространяющихся вдоль оси вихря:

$$(v'_x, v'_\varphi, v'_r, h', p', \rho') = (v''_x, v''_\varphi, v''_r, h'', p'', \rho'') \exp(i(\alpha x + n\varphi - \omega t))$$

где $v''_x, v''_\varphi, v''_r, h'', p'', \rho''$ – комплексные амплитуды возмущенных функций течения, зависящие только от поперечной координаты r_1 , α, n – действительные продольное и азимутальное волновые числа соответственно, а $\omega = \omega_r + i\omega_i$ – комплексная частота возмущения, мнимая часть которой определяет скорость нарастания $\omega_i > 0$ или затухания возмущения во времени, когда $\omega_i < 0$.

Положительные значения азимутального волнового числа $n > 0$ соответствуют возмущениям, направление вращения которых совпадает с направлением вращения основного невозмущенного потока в вихре, в то время как отрицательные ($n < 0$) соответствуют противоположному направлению вращения. Полученная в результате подстановки система линейных уравнений с соответствующими краевыми условиями представляет собой задачу на собственные значения линейной теории устойчивости сжимаемых закрученных течений [10, 11, 13]. Во временной постановке задача сводится к определению комплексной функции $\omega = \Omega(\alpha, n, R)$ для соответствующих действительных значений волновых чисел α, n и характерного числа Рейнольдса R , рассчитанного по толщине вязкой области и параметрам на внешней границе вихря, при которых существует нетривиальное решение возмущенной системы уравнений. Метод решения системы уравнений и отыскания корней получаемого дисперсионного соотношения описан в [10].

2. Результаты расчетов. Для определения параметров основного невозмущенного течения в вязком ядре вихря в качестве начальных распределений продольной и окружной составляющих скоростей были взяты известные распределения скоростей в вихре Ламба–Озеена

$$V_{x0} = 1 + \Delta \exp(-\beta r_1^2); \quad V_{\varphi 0} = \Gamma(1 - \exp(-\beta r_1^2)) \quad (2.1)$$

Эти начальные распределения скоростей аналогичны распределениям, используемым в работах [3, 7, 10–13]. Параметр $\Delta \geq 0$ соответствует закрученному течению струйного типа, а $\Delta \leq 0$ – течению следового типа, которое обычно реализуется в концевых вихрях на достаточном удалении от области сворачивания вихревой пелены. Параметры Γ, β определяют интенсивность закрутки потока и характерный радиус вязкого ядра вихря.

Для анализа влияния подвода энергии распределение источников энергии в вязком ядре вихря в области подвода тепла задавалось в виде

$$Q(x_1, r_1) = Q_{V0}(x_1 - x_b)(x_e - x_1) \cos\left(\frac{\pi r_1}{2r_q}\right) \quad (2.2)$$

при $r_1 \leq r_q$ и $x_b \leq x_1 \leq x_e$; $x_b = 0.05$; $x_e = 0.25$

Такое распределение источников тепла соответствует тепловыделению в ограниченной по пространству области вблизи оси вихря. Температура в начальном сечении вихря полагалась равной температуре набегающего потока $T(x = 0, r_1) = T_\infty$. Рассмотр-

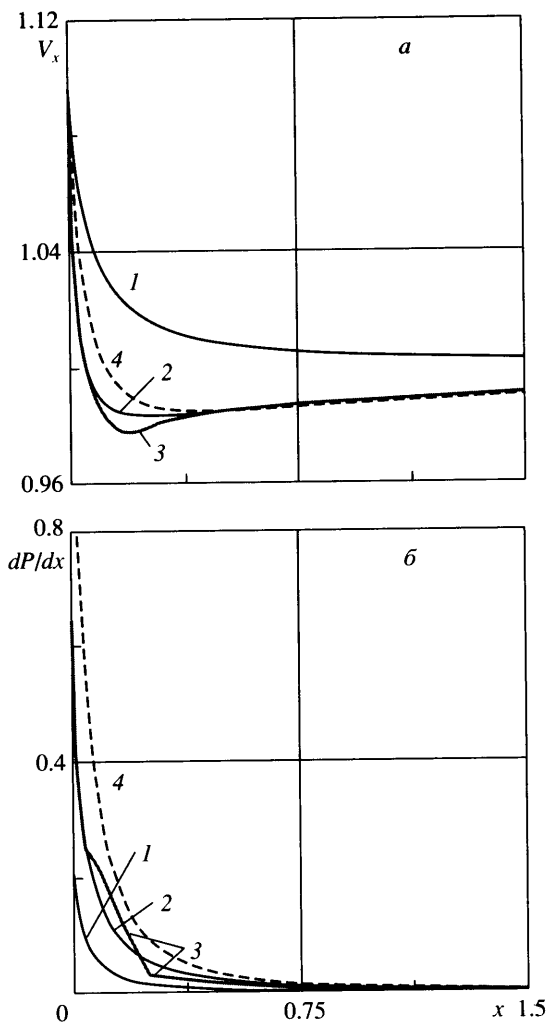
рим поведение характеристик основного невозмущенного течения и влияние подвода тепла на распределение параметров основного течения в вихре. Полученные профили функций течения потока будут в последующем использованы в расчетах характеристик устойчивости этого течения.

Для иллюстрации на фиг. 1 приведены зависимости продольной составляющей скорости (фиг. 1, а) и градиента давления (фиг. 1, б) на оси вихря от продольной координаты для двух значений числа Маха спутного потока ($M_\infty = 3$ и $M_\infty = 0.9$ – пунктирная кривая 4) и нескольких значений циркуляции окружной составляющей скорости. Параметры, определяющие распределение скорости в начальном сечении вихря, полагались равными $\Delta = 0.1$, $\beta = 3$. Как показывают расчеты и сравнение кривых 1 и 2, соответствующих циркуляции $\Gamma = 0.1$ и $\Gamma = 0.25$, увеличение циркуляции потока приводит к росту неблагоприятного градиента, возникающего в окрестности оси вихря и приводящего к существенному торможению течения и уменьшению продольной составляющей скорости. Увеличение числа Маха при фиксированном значении циркуляции приводит к возрастанию градиентов продольной составляющей скорости и давления вдоль оси вихря в начальной области $x \leq 0.5$. Протяженность области, где наблюдаются значительные продольные градиенты, определяется в значительной степени величиной циркуляции и профилем окружной скорости, задаваемых параметрами Γ и β . При фиксированных значениях числа Маха и параметров закрутки потока Γ и β подвод энергии в области $0.05 < x < 0.25$ приводит к увеличению неблагоприятного градиента давления на оси вихря в области подвода энергии (кривая 3) и незначительному уменьшению градиента непосредственно за областью подвода тепла.

Изменение продольного градиента давления на оси вихря при $r_1 = 0$ в начале и конце области подвода энергии связано с тем, что источниковый член в уравнении энергии (2.2) приводит к значительному изменению температуры и плотности газа в соответствующем сечении вихря. Так как давление в поперечном сечении вихря не задано, а определяется в процессе решения из поперечного уравнения импульса $\rho V_{\phi 1}^2 / r_1^3 = \partial p / \partial r_1$, изменения температуры и плотности приводят к соответствующему изменению давления в поперечном сечении и на оси вихря и, как следствие этого, изменению продольного градиента давления вдоль оси вихря.

На фиг. 2, а и б представлены распределения соответственно продольной и окружной составляющих скорости в начальном сечении при $x = 0$ (пунктирные кривые 1) и в сечении $x = 0.2$, причем кривые 2 и 3 соответствуют распределениям скоростей при $M_\infty = 3$ без подвода энергии в поток и с подводом тепла. Результаты, приведенные на фиг. 2, а и соответствующие числам Маха $M_\infty = 2$ (кривые 4) и $M_\infty = 0.9$ (кривая 5), показывают, что уменьшение числа Маха приводит к более медленному уменьшению продольной скорости на оси вихря в результате уменьшения неблагоприятных градиентов давления вдоль оси вихря одновременно с уменьшением числа Маха.

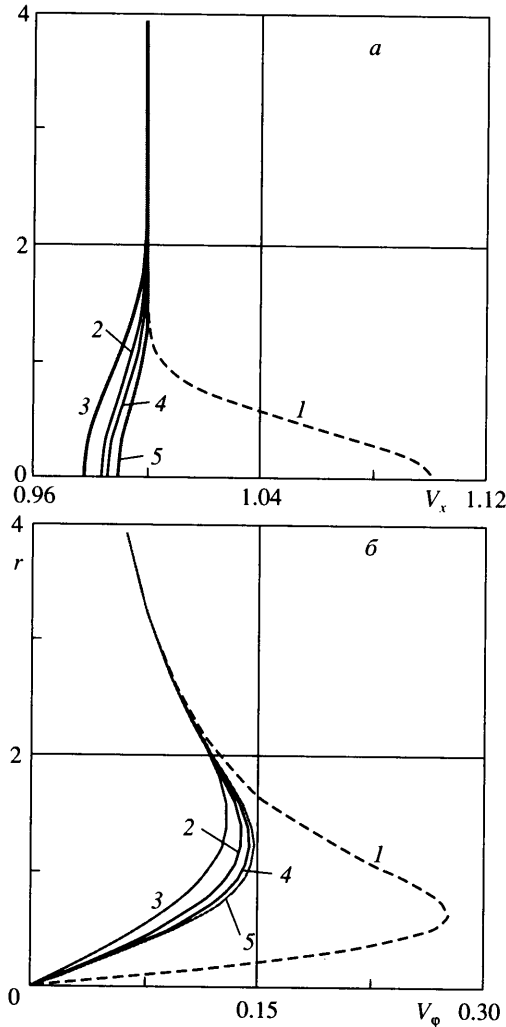
Неблагоприятный продольный градиент давления в начальной области является следствием интенсивной закрутки потока и существенной диссипации завихренности в начальном сечении вихря, обусловленной большими поперечными градиентами (фиг. 1). Именно в этой области наблюдается существенная перестройка течения и наиболее значительные изменения профилей скорости в вязкой области вблизи ядра вихря. Наличие неблагоприятного градиента давления наиболее сильно влияет на распределение продольной составляющей вектора скорости, распределение которой (при выбранных в расчетах начальных параметрах) превращается из распределения струйного типа в распределение с дефицитом скорости. Подвод тепла приводит к существенному изменению продольных градиентов в области подвода энергии и, как следствие этого, к существенному утолщению вязкой области вблизи оси вихря, уменьшению максимальных значений окружной составляющей скорости, реализующихся в вязкой



Фиг. 1. Распределения продольной составляющей скорости на оси вихря (а) и распределения давления (б) вдоль продольной координаты. Кривая 1 – $M_\infty = 1$, $\Gamma = 0.1$, кривые 2–3 – $M_\infty = 3$, $\Gamma = 0.25$ соответственно без подвода тепла и с объемным подводом энергии (кривая 3). Кривая 4 – распределение давления при дозвуковой скорости внешнего потока $M_\infty = 0.9$, $\Gamma = 0.25$

области вихря, и довольно значительному уменьшению продольной скорости на оси вихря.

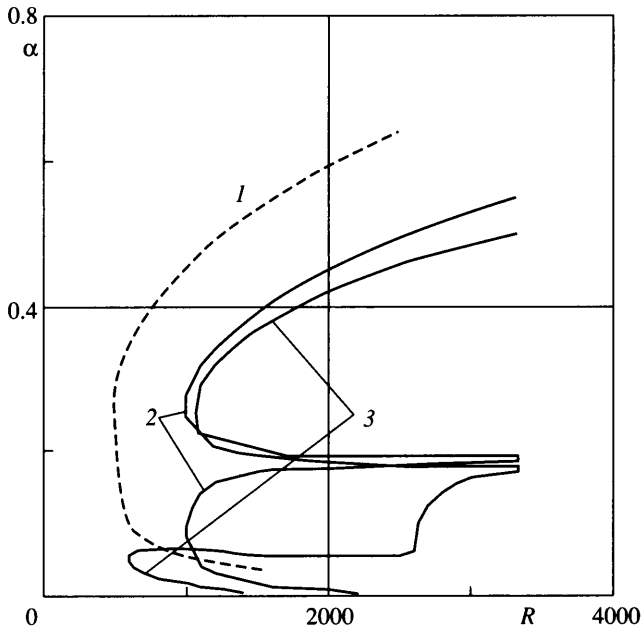
Обратимся к анализу характеристик устойчивости рассмотренных выше закрученных течений с распределениями продольной и окружной составляющих скорости в начальном сечении $x = 0$, соответствующих параметрам $\Delta = 0.1$; $\Gamma = 0.25$; $\beta = 3$ и заданных согласно (2.1). В начале обратимся к анализу влияния числа Маха на устойчивость течений и поведение нейтральных возмущений для заданных в начальном сечении вихря профилей скоростей (пунктирные кривые 1 на фиг. 2). На фиг. 3 представлены кривые нейтральной устойчивости, полученные для фиксированного значения азимутального волнового числа $n = -1$ для чисел Маха спутного потока $M_\infty = 0.9$, $M_\infty = 2$ и $M_\infty = 3$.



Фиг. 2. Распределения продольной (а) и окружной составляющих скорости (б) для вихря с параметрами $\Delta = 0.1$; $\Gamma = 0.25$; $\beta = 3$ и $M_\infty = 3$. Кривые 1 – профили скоростей в начальном сечении вихря при $x = 0$; кривые 2, 3 профили скорости при $x = 0.2$ без подвода и с подводом тепла в поток согласно (2.2) при $x_b = 0.05$; $x_e = 0.25$; $Q_{10} = 50$. Кривые 4 и 5 – профили скоростей при $x = 0.2$ для $M_\infty = 2$ и $M_\infty = 0.9$

Возмущения с азимутальным волновым числом $n = -1$ и соответствующие вращению противоположному по отношению к основному потоку обладают наименьшими критическими числами Рейнольдса потери устойчивости по сравнению с возмущениями с другими значениями азимутального волнового числа. Приведенные результаты показывают, что увеличение числа Маха M_∞ от 0.9 до 2 приводит к росту критического числа Рейнольдса потери устойчивости и, следовательно, повышению устойчивости течения. Одновременно наблюдается сужение области неустойчивых волновых чисел, что является следствием смещения верхней ветви кривой нейтральной устойчивости в сторону меньших значений продольного волнового числа α .

В то же время при переходе от $M_\infty = 2.0$ до $M_\infty = 3.0$ наблюдается уже противоположная тенденция, а именно минимальное значение критического числа Рейнольдса поте-



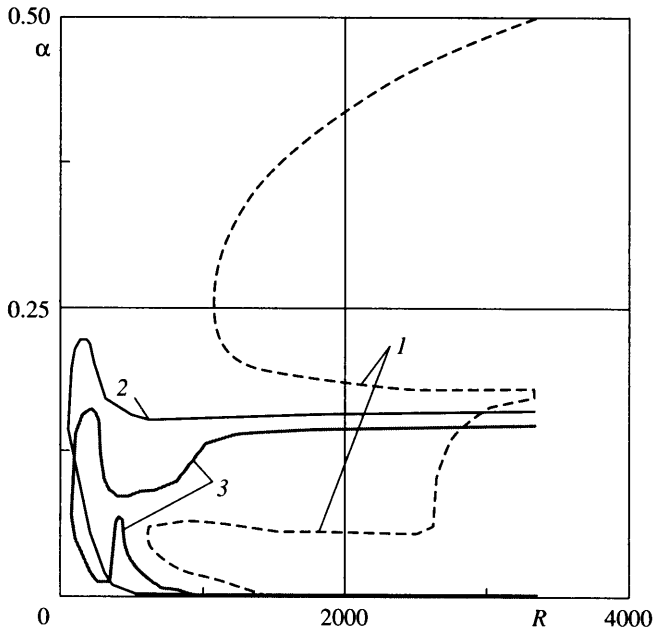
Фиг. 3. Нейтральные кривые для профилей скоростей в начальном сечении, азимутального волнового числа $n = -1$ и $M_\infty = 0.9, 2, 3$ (кривые 1–3)

ри устойчивости, которое при $M_\infty = 3.0$ соответствует нейтральным возмущениям с малыми волновыми числами α , уменьшается и становится даже меньше, чем в случае $M_\infty = 0.9$. Это видно по смещению части нейтральной кривой в диапазоне $0 < \alpha < 0.15$ в сторону меньших значений числа Рейнольдса. При переходе от числа $M_\infty = 2.0$ к числу $M_\infty = 3.0$ верхняя ветвь нейтральной кривой продолжает смещаться в сторону меньших значений α , а область неустойчивости в диапазоне чисел Рейнольдса $500 < R < 3000$ разделяется на две подобласти (кривая 3 на фиг. 3). Наибольшее различие нейтральных кривых наблюдается в области $\alpha < 0.15$, причем при переходе от $M_\infty = 2.0$ к $M_\infty = 3.0$ в диапазоне волновых чисел $0.15 < \alpha < 0.2$ нейтральная кривая смещается в сторону больших чисел Рейнольдса, а в области $\alpha < 0.12$ наблюдается прямо противоположная тенденция и нейтральная кривая смещается в сторону меньших чисел Рейнольдса. В результате такого смещения нейтральной кривой минимальное критическое число Рейнольдса потери устойчивости $R \cong 550$ достигается при $\alpha = 0.05$.

Таким образом, расчеты показывают, что при сверхзвуковых скоростях $M_\infty = 3.0$ величина минимального критического числа Рейнольдса связана с поведением неустойчивых возмущений, соответствующих длинноволновым возмущениям и малым значениям продольного волнового числа α .

Ниже по течению влияние вязкости и неблагоприятного продольного градиента давления приводит, как это описано выше, к значительной перестройке профилей продольной и окружной составляющих скорости в соответствующих поперечных сечениях вихря. Это, естественно, должно привести к изменению характеристик устойчивости течения при движении от сечения к сечению вниз по потоку. На фиг. 4 представлены нейтральные кривые для вихря в спутном сверхзвуковом потоке при $M_\infty = 3.0$.

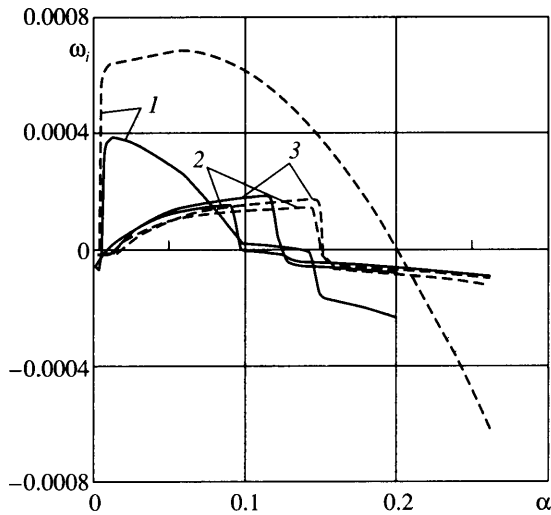
Перестройка профилей скорости приводит к тому, что течение в вихре оказывается в сечении $x = 0.2$ фактически устойчивым по отношению к возмущениям, соответствующо-



Фиг. 4. Нейтральные кривые для возмущений с азимутальным волновым числом $n = -1$ при $M_\infty = 3$. Кривая 1 (пунктир) соответствует начальному сечению ($x = 0$), кривые 2, 3 – сечению $x = 0.2$ для течения без подвода и с подводом тепла в поток

щим большим значениям продольного волнового числа $\alpha > 0.25$. В то же время возмущения, соответствующие меньшим значениям волнового числа $\alpha < 0.2$, теряют устойчивость гораздо раньше. Это отражается на существенном уменьшении критического числа Рейнольдса потери устойчивости, которое достигается в области $\alpha < 0.2$ и примерно в 5 раз меньше критического числа Рейнольдса, полученного для начального сечения вихря. Уменьшение критического числа Рейнольдса потери устойчивости до $R \approx 50$ соответствует более ранней потере устойчивости и может интерпретироваться как дестабилизация течения.

При подводе тепловой энергии профили основного течения существенно изменяются, а область неустойчивых возмущений и нейтральная кривая изменяют форму при малых и умеренных числах Рейнольдса. Критическое число Рейнольдса потери устойчивости при подводе тепла остается практически таким же, как и в случае отсутствия подвода энергии, что хорошо видно по начальной части нейтральных кривых 2 и 3 на фиг. 4. Однако при небольших числах Рейнольдса $R < 500$ появляется локализованная область неустойчивости, которая практически не связана с основной областью, лежащей при $R > 500$. При небольших числах Рейнольдса $R \leq 800$ подвод тепловой энергии приводит к некоторому изменению формы нейтральной кривой и уменьшению диапазона неустойчивых возмущений. В области $100 \leq R \leq 900$ нейтральная кривая 3, соответствующая подводу тепловой энергии, практически целиком лежит внутри нейтральной кривой 2 (без подвода тепла). Это означает, что часть ранее неустойчивых возмущений при подводе тепла становятся устойчивыми. При $50 \leq R \leq 250$ уменьшение диапазона неустойчивых частот при подводе тепла сопровождается одновременным уменьшением скоростей нарастания неустойчивых возмущений, что иллюстрируется поведением скоростей нарастания возмущений, приведенных на фиг. 5.



Фиг. 5. Скорости нарастания возмущений во времени, для $R = 200, 600, 800$ (кривые 1–5). Сплошные кривые соответствуют случаю с подводом, а пунктирные без подвода энергии

Таким образом, течение с подводом тепла при малых чисел Рейнольдса оказывается более устойчивым.

Однако при больших числах Рейнольдса в диапазоне $250 \leq R \leq 900$ несмотря на уменьшение при подводом тепла диапазона неустойчивых волновых чисел скорости нарастания неустойчивых возмущений при фиксированном значении продольного волнового числа α в случае подвода энергии оказываются несколько больше, чем без подвода тепла. Это изображено на фиг. 5, где кривые 2 и 3 показывают скорости нарастания возмущений по времени при двух значениях числа Рейнольдса $R = 600$ и $R = 800$. Однако, как видно из приведенных результатов расчетов в диапазоне $250 \leq R \leq 900$, максимальные значения скоростей нарастания при подводом тепла и без него оказываются практически одинаковыми, но только достигаются при различных значениях волнового числа α . Этот факт одновременно с уменьшением диапазона неустойчивых возмущений, когда часть неустойчивых возмущений в случае отсутствия подвода энергии становятся устойчивыми, можно расценивать как стабилизирующее влияние подвода тепловой энергии на рассматриваемые закрученные течения с подводом энергии в поток.

Заключение. Представленные результаты показывают существенное влияние числа Маха спутного потока и объемного подвода энергии и, как следствие этого, нагрева газа в области ядра продольного вихря, как на основное течение, так и на характеристики его устойчивости. Сравнение характеристик устойчивости при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях спутного потока демонстрирует существенное влияние числа Маха на устойчивость закрученного течения. Численный анализ характеристик устойчивости закрученного течения в вихре относительно трехмерных возмущений показал, что наиболее неустойчивыми оказываются волны, направление вращения которых противоположно направлению вращения основного потока в ядре вихря.

Вязкая диссипация и размывание вихря приводят к существенному изменению характеристик устойчивости, которая выражается в уменьшении критических чисел Рейнольдса потери устойчивости и некоторой дестабилизации течения по отношению к длинноволновым возмущениям с малыми значениями продольного волнового числа

в области больших чисел Рейнольдса. Одновременно с этим наблюдается стабилизация закрученного потока относительно коротковолновых возмущений, соответствующих большим значениям продольного волнового числа α . Таким образом, подвод энергии к потоку существенно влияет на устойчивость закрученного течения и должен учитываться при анализе устойчивости закрученных течений, например, при изучении устойчивости двухфазных закрученных течений при наличии процессов испарения и конденсации. Подвод тепловой энергии в область ядра вихря может также использоваться в качестве искусственного управляющего воздействия на устойчивость закрученных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00149).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leibovich S.* Vortex stability and breakdown: Survey and extension // *AIAA Journal*. 1984. V. 22. № 9. P. 1192–1206.
2. *Lessen M., Singh P.J., Paillet F.* The stability of a trailing line vortex Pt 1. Inviscid theory // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 63. Pt 4. P. 753–763.
3. *Lessen M., Paillet F.* The stability of a trailing line vortex Pt 2 Viscous theory // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 65. Pt 4. P. 769–779.
4. *Brown G.L., Lopez J.M.* Axisymmetric vortex breakdown Pt 2 Physical mechanisms // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 221. P. 553–576.
5. *Reyna L.G., Menne S.* Numerical prediction of flow in slender vortices // *Comput. Fluids*. 1988. V. 16. № 3. P. 239–256.
6. *Ахметов В.К., Шкадов В.Я.* Развитие и устойчивость закрученных течений // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1988. № 4. С. 3–11.
7. *Ахметов В.К., Шкадов В.Я.* О новой вязкой моде неустойчивости свободного вихря // *Изв. РАН. МЖГ*. 1999. № 6. С. 76–80.
8. *Liu C., Menne S.* Simulation of a three-dimensional vortex breakdown // *AIAA Paper*. 1989. № 1806. 5 p.
9. *Kazakov A.V.* Stability of the viscous subsonic vortex flow with volume energy supply // *Abstract Intern. Cong. Theoret. and Appl. Mechanics*. Kyoto, Japan, 1996. P. 194.
10. *Казаков А.В.* Влияние объемного подвода энергии на закрученные течения в спутном дозвуковом потоке // *Изв. РАН. МЖГ*. 1998. № 6. С. 47–53.
11. *Казаков А.В.* Устойчивость закрученного дозвукового течения вязкого теплопроводного газа // *Изв. РАН. МЖГ*. 1998. № 3. С. 50–59.
12. *Казаков А.В., Курячий А.П.* Устойчивость сжимаемого закрученного течения в круглой трубе // *Изв. РАН. МЖГ*. 1999. № 1. С. 35–41.
13. *Казаков А.В.* Влияние объемного подвода энергии на устойчивость закрученного дозвукового потока // *Изв. РАН. МЖГ*. 2003. № 4. С. 56–65.

Москва

Поступила в редакцию
3.III.2004