

УДК 532.517.4 : 532.59

© 2005 г. А. В. ГУСЕВ, В. Ю. ЛЯПИДЕВСКИЙ

ТУРБУЛЕНТНЫЙ БОР В СВЕРХКРИТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

Выполнены экспериментальные и теоретические исследования обрушивающихся волн в течении однородной жидкости со свободной поверхностью в окрестности локального изменения глубины канала. Изучена структура стационарного гидравлического прыжка, порожденного локальным препятствием в канале, а также нестационарной волновой конфигурации в задаче о разрушении шлюза, состоящей из двух турбулентных боров. На основе модели турбулентного бора [1] получены аналитические профили обрушивающихся волн, проведено численное исследование нестационарной задачи и дано сравнение с экспериментальными данными. Показано, что модель [1] с гидростатическим распределением давления по глубине адекватно описывает как положение, так и структуру стационарного и нестационарного волновых фронтов.

Ключевые слова: однородная жидкость, турбулентный бор, неровное дно, стационарные и нестационарные волновые фронты, теория, эксперимент.

Турбулентный бор – характерная особенность нестационарных волновых процессов в открытых каналах. Он представляет собой фронтальную часть обрушивающейся волны и развивается в результате эволюции достаточно длинных поверхностных волн под действием эффектов нелинейности, трения и топографии. В стационарных бурных (сверхкритических) потоках резкое изменение глубины потока в обрушивающейся волне известно как гидравлический прыжок.

Исследование структуры турбулентных боров и гидравлических прыжков – это классическая проблема гидравлики открытых русел [2, 3]. Современные экспериментальные методы исследования внутренней структуры обрушивающихся волн позволили выявить основные особенности развития приповерхностного турбулентного слоя в волнах как умеренной, так и большой амплитуды [4–8]. Математические модели турбулентного бора основаны на априорной информации о распределении средней скорости внутри бора и описывают профиль и турбулентные характеристики стационарного течения [9, 10].

Цель данной работы – сопоставление экспериментальных данных по структуре и конфигурации турбулентных боров, генерируемых в сверхкритических потоках однородной жидкости локальным изменением глубины канала, с соответствующими решениями стационарных и нестационарных задач, полученных с использованием модели турбулентного бора [1].

Стационарный гидравлический прыжок в эксперименте генерируется локальным препятствием, помещенным в горизонтальный канал. Точное решение этой задачи в рамках модели [1] построено в [11]. В данной работе реализован стационарный гидравлический прыжок максимальной амплитуды, т.е. течение, которое переходит в нестационарный бор, движущийся навстречу потоку, при малых изменениях параметров набегающего потока и высоты препятствия. Такой режим обтекания препятствия – хороший тест для проверки математических моделей, описывающих формирование локальной докритической зоны течения в сверхкритическом потоке.

Нестационарная волновая конфигурация, состоящая из двух турбулентных боров, реализована в задаче о разрушении шлюза в канале с неровным дном. Подробное опи-

сание эксперимента, а также сравнение полученных результатов с расчетами в рамках классической теории мелкой воды можно найти в [12]. В данной работе основное внимание сосредоточено на возможности применения модели турбулентного бора [1] для воспроизведения реальных волновых профилей при внедрении сверхкритической струи в покоящуюся жидкость в нижней камере шлюза при внезапном разрушении ворот шлюза.

1. Математическая модель. Уравнения мелкой воды над неровным дном с учетом генерации и развития приповерхностного турбулентного слоя могут быть записаны в виде следующей системы неоднородных законов сохранения:

$$\begin{aligned}
 (h + \eta)_t + (hu + \eta v)_x &= 0, \quad u_t + (u^2/2 + g(h + \eta))_x = -gz_x \\
 (hu + \eta v)_t + (hu^2 + \eta v^2 + g(h + \eta)^2/2)_x &= -g(h + \eta)z_x \\
 (hu^2 + \eta(v^2 + q^2) + g(h + \eta)^2)_t + (hu^3 + \eta v(v^2 + q^2) + 2g(h + \eta)(hu + \eta v))_x &= \\
 &= -2g(hu + \eta v)z_x - \varepsilon \\
 \eta_t + (\eta v)_x &= \sigma q, \quad \varepsilon = \sigma \theta q^3, \quad \theta \equiv \text{const}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь h, η – толщины нижнего слоя и турбулентного верхнего слоя; $z(x)$ – форма дна; u, v – соответствующие скорости в слоях; g – ускорение свободного падения; $q \geq 0$ – среднеквадратичная скорость в поверхностном слое. Скорость вовлечения жидкости из нижнего слоя полагается пропорциональной скорости q . Коэффициент пропорциональности считается постоянным ($\sigma \approx 0.15$), ε – скорость диссипации энергии.

Система (1.1) – это обобщение системы (1.1) в [1, гл. 6] для плоского канала с неровным дном. Трение о дно и боковые стенки канала не учитывается. Рассматриваемая система пригодна для описания как непрерывных, так и обобщенных решений, содержащих разрывы первого рода, так как она записана в виде законов сохранения. Последнее обстоятельство использовано для построения численной схемы расчета нестационарных решений на основе схемы С. К. Годунова. Однако основная особенность применения модели (1.1) для развитых турбулентных боров состоит в том, что учет процесса генерации приповерхностного турбулентного слоя на фронте обрушивающихся волн приводит к непрерывному волновому профилю в отличие от классических уравнений мелкой воды. Решение задачи о распространении турбулентного бора постоянной амплитуды, как и решение задачи о генерации турбулентного бора при нестационарном взаимодействии потоков жидкости в открытом канале, может быть найдено в классе непрерывных решений, для описания которых используется следующая недивергентная форма записи системы (1.1):

$$\begin{aligned}
 h_t + uh_x + hu_x &= -\sigma q, \quad \eta_t + v\eta_x + \eta v_x = \sigma q \\
 u_t + uu_x + gh_x + g\eta_x &= -gz_x \\
 v_t + vv_x + gh_x + g\eta_x &= -gz_x + \sigma q(u - v)/\eta \\
 q_t + vq_x &= \sigma((u - v)^2 - (1 + \theta)q^2)/(2\eta)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Единственным безразмерным параметром, влияющим на структуру волн, является θ , так как масштабный коэффициент σ можно устранил из модели ($\sigma = 1$) соответствующим растяжением независимых переменных.

Рассмотрим течение в канале над ровным дном ($z(x) \equiv 0$). Структура турбулентного бора, распространяющегося с постоянной скоростью D , задается решением (1.2), зависящим только от переменной $\xi = x - Dt$. При этом однородные законы сохранения в (1.1) дают следующие соотношения, связывающие искомые параметры течения в бегущей волне с заданными параметрами невозмущенного потока ($h = h_0, u = u_0, \eta = \eta_0 = 0$)

$$h(u - D) + \eta(v - D) = h_0(u_0 - D)$$

$$(u - D)^2/2 + g(h + \eta) = (u_0 - D)^2/2 + gh_0 \quad (1.3)$$

$$h(u - D)^2 + \eta(v - D)^2 + g(h + \eta)^2/2 = h_0(u_0 - D)^2 + gh_0^2/2$$

Если из рассмотрения исключить вырожденное решение $h + \eta \equiv h_0, u = v \equiv u_0$, то в силу (1.3) искомые функции h, η, v могут быть выражены как функции одной переменной u и безразмерного параметра $Fr = |D - u_0|/\sqrt{gh_0}$. При этом уравнения (1.2) сводятся к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для искомых переменных u, q :

$$\frac{d(\eta(v - D))}{d\xi} = \sigma q, \quad 2\eta(v - D)\frac{dq}{d\xi} = \sigma((u - v)^2 - (1 + \theta)q^2) \quad (1.4)$$

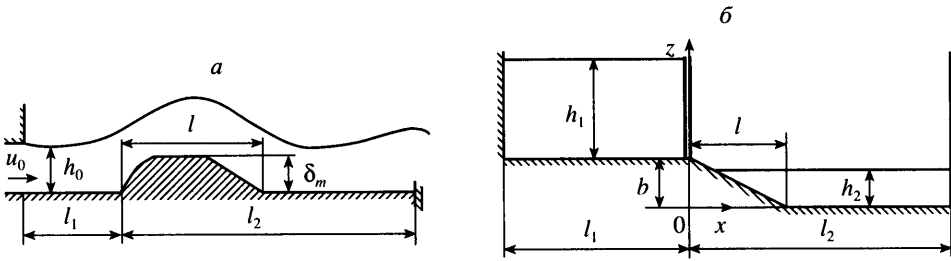
Так как в непрерывном решении $\eta \rightarrow 0$ при $u \rightarrow u_0$, в уравнениях (1.4) имеется особенность вблизи фронта волны. В [1] показано, что эта интегрируемая особенность ($h - h_0 \sim |\xi - \xi_0|^{1/2}, \eta \sim |\xi - \xi_0|^{1/2}$, где ξ_0 – положение фронта бегущей волны), и при $Fr > 1$ решение может быть построено на интервале $\xi_0 < \xi < \xi_1$ при $D < u_0$ или на интервале $\xi_1 < \xi < \xi_0$ при $D > u_0$. При этом уравнение свободной поверхности $h(\xi) + \eta(\xi)$ является монотонной функцией и в турбулентном боре общая глубина жидкости за фронтом волны возрастает. Предельная глубина турбулентного бора η_1 реализуется при $\xi = \xi_1$ и находится из условия $h_1 = h(\xi_1) = 0$. Это означает, что при $\xi = \xi_1$ поверхностный турбулентный слой достигает дна и состояния 0 и 1 до и после волны связаны соотношениями на разрыве (1.3), совпадающими с соотношениями на разрыве для классических уравнений мелкой воды

$$\eta_1(v_1 - D) = h_0(u_0 - D) \quad (1.5)$$

$$\eta_1(v_1 - D)^2 + g\eta_1^2/2 = h_0(u_0 - D)^2 + gh_0^2/2$$

Таким образом, непрерывное решение уравнений (1.3), (1.4) представляет внутреннюю структуру разрывов уравнений мелкой воды. В следующих разделах полученные стационарные решения используются для описания нелинейных волновых фронтов с учетом процесса обрушения.

2. Методика эксперимента. Стационарный гидравлический прыжок (эксперимент L). Опыты проводились в прямоугольном канале из оргстекла длиной 480 см и шириной $B = 6$ см с нулевым уклоном дна. Сверхкритический (бурный) поток создавался с помощью сопла, внутренняя поверхность которого спрофилирована по формуле гиперболического тангенса (фиг. 1, а). Измерения показали, что на выходе из сопла имели место локальное понижение уровня свободной поверхности (примерно на 4% относительно высоты выходного сечения сопла) и локальное понижение давления на дне канала (примерно на 6% относительно гидростатического давления). Порог устанавливался за пределами влияния этих локальных неоднородностей, проявляющихся на



Фиг. 1. Схемы экспериментов: *а* – эксперимент I, *б* – эксперимент II

расстоянии вниз по потоку, не превышающем высоты сопла. Расстояние между выходным сечением сопла и порогом составляло $l_1 = 58$ см.

Опыты проводились с порогом удобообтекаемой формы, изготовленным из оргстекла. Его передняя грань очерчена по дуге окружности радиуса 14 см, верхняя грань представляла собой горизонтальную плоскость, а задняя – плоскость, наклоненную к дну канала под углом 11° . Высота этого порога $\delta_m = 2.4$ см и длина $l = 30$ см. Регулирование уровня жидкости в выходном сечении канала осуществлялось поджатием потока снизу вертикальной пластиной, расстояние от которой до передней кромки порога составляло $l_2 = 170$ см.

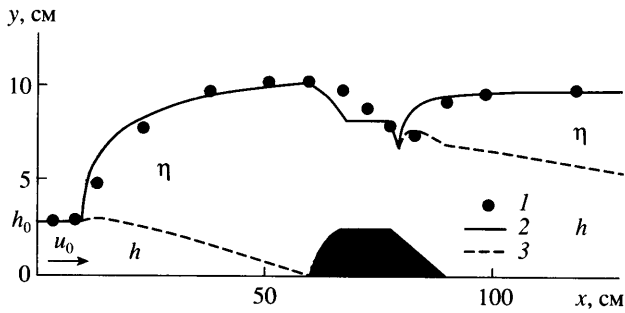
Объемный расход жидкости Q измеряли с помощью стандартной трубы Вентури, расположенной в подводящем трубопроводе. Для измерения глубины потока в разных точках по длине канала использовали мерные иглы. Среднюю скорость измеряли с помощью трубки Пито и пьезометров. Среднеквадратичная погрешность измерения не превышала 0.5% для расхода, 1% для скорости и 2% для глубины. Для визуализации внутренней структуры течения в поток вводили частицы алюминиевой пудры. Применяли видео- и фотосъемку.

В задаче о разрушении шлюза (эксперимент II) опыты выполняли в прямоугольном канале шириной $B = 20.2$ см с вертикальными торцевыми стенками из оргстекла и со стеклянными боковыми стенками. Понижение дна начиналось на расстоянии $l_1 = 227$ см от левой торцевой стенки. Это поперечное сечение выбрано за начало отсчета продольной координаты x (фиг. 1, б). Расстояние от начала координат до правой торцевой стенки канала $l_2 = 193$ см. На участке $0 < x < l$ дно канала понижалось линейно от значения $z = b = 7.2$ см при $x = 0$ до $z = 0$ при $x = l = 15$ см. В этом же поперечном сечении располагался плоский щит, с помощью которого создавался начальный перепад уровней воды между верхним и нижним бьефами $z = h_1 + b - h_2$, где h_1 и h_2 – начальные глубины верхнего и нижнего бьефов соответственно.

В момент времени $t = 0$ щит удаляли вручную с помощью рычага, его перемещение регистрировалось реохордным датчиком. Характерное время выхода щита из воды не превышало 0.05 с при характерном времени распространения волн до торцевых стенок порядка 1.3 с. С помощью неподвижных волномеров, установленных в продольной плоскости симметрии канала, измеряли колебания уровня свободной поверхности во времени t при фиксированных значениях x .

Для определения высоты волны и скорости распространения ее переднего фронта устанавливались волномеры по оси симметрии лотка в сечениях с координатами $x = 60$ и 90 см. Для определения скорости движения заднего фронта волны и глубины жидкости за ним волномеры располагали в сечениях с координатами $x = 30$ и 50 см.

Сигналы волномеров и реохордного датчика вводили в компьютер с помощью аналого-цифрового преобразователя ACL-8112. При аналого-цифровом преобразовании шаг по времени не превышал 0.008 с.



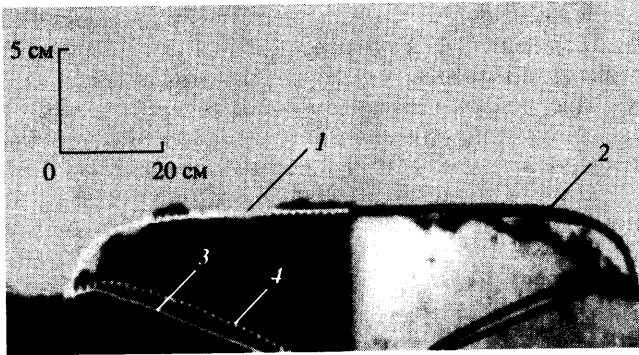
Фиг. 2. Стационарный гидравлический прыжок максимальной амплитуды: 1 – эксперимент 1, 2 – теория, 3 – нижняя граница приповерхностного турбулентного слоя

Принцип работы волномеров основан на различии электрической проводимости воды и воздуха. Разрешающая способность волномеров, определенная по удвоенному среднеквадратичному значению их собственных шумов, составляла 0.2 мм. Верхняя граница частоты колебаний, отслеживаемая волномерами с погрешностью не более 10%, равнялась примерно 10 Гц. Калибровку волномеров осуществляли перед каждой серией опытов путем их погружения или подъема на заданную высоту с шагом по высоте 1 см и с погрешностью измерения высоты подъема не более 0.1 мм. В опытах использована водопроводная вода. Она отстаивалась в течение нескольких суток для удаления растворенного в ней воздуха. После этого при повторных калибровках характеристики волномеров не менялись в течение нескольких недель.

Для визуализации положения материальных частиц при внедрении струи из верхнего бьефа в покоящуюся жидкость в нижнем бьефе жидкость в верхнем бьефе подкрашивалась чернилами, поэтому на фотографиях (фиг. 3) и видеофильмах четко видна граница между жидкостями, первоначально разделенными щитом.

3. Экспериментальная проверка модели турбулентного бора. Для экспериментальной проверки модели (1.1) используются два способа генерации турбулентного бора в сверхкритическом течении над неровным дном, описанные в разд. 2.

Турбулентный бор перед локальным препятствием. В качестве невозмущенного потока рассматривается плоское сверхкритическое течение ($Fr_0 > 1$, где $Fr_0 = u_0 / \sqrt{gh_0}$; u_0 – скорость; h_0 – глубина потока). Ниже по течению расположено удобообтекаемое двумерное препятствие высотой δ_m (фиг. 1, а). Перед препятствием, контролирующим поток выше по течению, формируется развитый стационарный гидравлический прыжок. Если пренебречь трением о дно канала и процессами перемешивания над препятствием (длина препятствия достаточно мала по сравнению с характерным масштабом длины заблокированной зоны), то стационарное течение определяется двумя безразмерными параметрами: Fr_0 и $\delta = \delta_m / h_0$. Структура локальной докритической зоны перед препятствием в рамках модели (1.1) исследована в [11], где показано, что в отличие от классических уравнений мелкой воды стационарный гидравлический прыжок перед препятствием формируется при заданном числе Фруда набегающего потока ($Fr_0 > 1$) для некоторого интервала $(0, \delta)$ значений параметра δ . Наиболее интересно для экспериментальной проверки предельное значение параметра $\delta = \delta_c$, при котором перед препятствием реализуется гидравлический прыжок максимальной амплитуды. При дальнейшем увеличении параметра δ (или при уменьшении Fr_0) стационарное решение



Фиг. 3. Нестационарная волновая конфигурация (эксперимент II), состоящая из двух развитых турбулентных боров, распространяется слева направо: 1, 3 – свободная поверхность и граница турбулентного слоя соответственно (нестационарный расчет по модели (1.1)); 2, 4 – свободная поверхность и граница турбулентного слоя соответственно (точное решение)

не существует и вверх по потоку начинает распространяться турбулентный бор. Так как именно эта ситуация играет существенную роль в различных приложениях, рассмотрим гидравлический прыжок максимальной амплитуды более подробно.

Как показано в разд. 1, для заданной скорости волны амплитуда турбулентного бора и длина переходной зоны достигают максимума, когда турбулентный верхний слой достигает дна, поэтому в волне максимальной амплитуды непосредственно перед препятствием $h_1 = 0$, и величина δ_c может быть определена для стационарного гидравлического прыжка ($D = 0$) из следующих уравнений над локальным препятствием, в которых процессы перемешивания не учитываются ($\sigma = 0$)

$$\eta_1 v_1 = \eta_m v_m, \quad v_1^2/2 + g\eta_1 = v_m^2/2 + g(\eta_m + \delta_m) \quad (3.1)$$

Дополнительное соотношение – условие перехода от докритического течения к сверхкритическому над препятствием, т.е. $v_m^2 = g\eta_m$.

При заданном числе Фруда набегающего потока состояние 1 в волне максимальной амплитуды определяется из (1.5), и далее из (3.1), (3.2) находится $\delta_c = \delta_m/h_0$.

Соотношения (1.5), (3.1) и $v_m^2 = g\eta_m$ формально совпадают с решением задачи о стационарном гидравлическом прыжке перед препятствием в рамках классической теории мелкой воды. Принципиальное различие между двумя моделями состоит в том, что, во-первых, уравнения (1.1) описывают непрерывный профиль волны и, в частности, определяют протяженность заблокированной зоны течения, во-вторых, использование модели (1.1) решает проблему неединственности волновой конфигурации в окрестности локального препятствия для классических уравнений мелкой воды, так как при уменьшении высоты препятствия гидравлический прыжок максимальной амплитуды плавно переходит в полностью сверхкритическое течение над препятствием за счет уменьшения длины заблокированной зоны.

Стационарный гидравлический прыжок максимальной амплитуды изображен на фиг. 2 для $Fr_0 = 2.9$, $\delta_c = 0.9$. Линия 2 представляет свободную поверхность в стационарном решении (1.1) для $\sigma = 0.15$, $\theta = 2$, линия 3 показывает нижнюю границу приповерхностного турбулентного слоя. Точками изображено положение свободной поверхности, найденное из эксперимента I. Турбулентный бор, переводящий сверхкри-

тическое течение на подветренном склоне препятствия в докритическое, также может быть найден в рамках модели (1.1), если известна полная глубина потока ниже по течению от препятствия [13]. При выбранных значениях параметров Fg_0 и δ_c над препятствием реализуется однослойное транскритическое течение, поэтому модель (1.1) может быть применена повторно для описания эволюции нового приповерхностного турбулентного слоя в подветренном гидравлическом прыжке. Наибольшее расхождение между теоретическими и экспериментальными результатами наблюдается над препятствием до подветренного гидравлического прыжка. На этом участке точное решение задается решением классических уравнений мелкой воды, в котором не учитывается дополнительное вертикальное ускорение жидкости при обтекании достаточно короткого препятствия. Эффекты негидростатичности в потоке над локальным препятствием более подробно обсуждаются в [13].

Рассмотрим задачу о разрушении шлюза. При моделировании течения, полученного в эксперименте II, применяется численная реализация системы (1.1), которая представляет собой полный набор законов сохранения. Кроме того, скорость распространения возмущений в ней конечна. Нестационарная картина волн, возникающих в задаче о разрушении шлюза, может быть построена на основе консервативной разностной схемы. В работе для расчета нестационарных течений применяется вариант схемы С. К. Годунова. В качестве начальных данных рассматривается покоящаяся жидкость с различными уровнями свободной поверхности по обе стороны шлюза. Начальная толщина турбулентной прослойки выбирается близкой к нулю.

Для выбранных значений начальных глубин ($h_1 = 12.5$ см, $h_2 = 3$ см, $b = 7.2$ см) в верхней камере шлюза влево распространяется волна понижения, над склоном быстро устанавливается стационарное сверхкритическое течение, а в нижней камере шлюза вправо распространяется нестационарная волновая конфигурация, состоящая из двух развитых турбулентных боров (фиг. 3) (волна типа B в [12]). Таким образом, волновой процесс в нижнем бьефе не влияет на течение в верхнем бьефе и это течение находится независимо. Так как на участке, состоящем из нестационарной волны понижения (которую можно считать центрированной в точке $t = 0, x = 0$) и стационарного течения над склоном, процессы перемешивания не играют существенной роли, то это течение может быть представлено комбинацией автомодельного решения классических уравнений мелкой воды при $-l_1 \leq x \leq 0$ и стационарного решения этой же системы на участке $0 \leq x \leq l$.

В рамках уравнений мелкой воды без перемешивания в нижнем бьефе фактически решается задача о распаде произвольного разрыва, в которой при $t = 0$ в точке $x = l$ справа задана покоящаяся жидкость ($h = h_2, u = u_2 = 0$), а слева задается сверхкритический поток ($h = h_3, u = u_3$), найденный из стационарного течения над склоном в точке $x = l$. Точным решением этой проблемы для заданных параметров является конфигурация из двух разрывов, движущихся в положительном направлении с различной скоростью. Описанное выше решение классических уравнений мелкой воды, состоящее из комбинации автомодельных решений, центрированных в точке $t = 0, x = 0$ для $-l_1 \leq x \leq 0$, в точке $t = 0, x = l$ для $l \leq x \leq l_2$ и стационарного решения на участке $0 \leq x \leq l$, используется для определения состояния h_4, u_4 между разрывами. Таким образом, амплитуда разрывов и их скорости распространения могут быть определены из классических уравнений. Однако для восстановления внутренней структуры турбулентных боров необходимо привлечь уравнения (1.1).

Скорость правого бора (фиг. 3), распространяющегося вниз по потоку ($D_2 = 130.4$ см/с) существенно выше скорости левого бора ($D_1 = 18.0$ см/с), который сносится вниз по потоку сверхкритической струей. Правый бор полностью сформировался, и его внутренняя структура близка к структуре стационарного бора. На структуру левого бора еще оказывает влияние начальная фаза формирования течения при столкновении струи с покоящейся жидкостью. Тем не менее стационарное решение, полученное

в разд. 1, также может быть использовано для построения рассматриваемой модели двухволновой конфигурации.

На фиг. 3 на фоне экспериментального фото изображено точное решение (пунктирные линии 2, 4), состоящее из турбулентных боров, движущихся со скоростью D_1 и D_2 ($0 < D_1 < u_4 < D_2$). Так как состояния слева (h_3, u_3) и справа (h_2, u_2) известны, скорости D_1 и D_2 , а также состояние (h_4, u_4) между волнами находятся в силу (1.5) из решения задачи о распаде разрыва для классических уравнений мелкой воды. Далее из уравнений (1.3), (1.4) восстанавливается непрерывный профиль турбулентного бора. Для наглядности при нанесении границ стационарного и нестационарного течения, полученных из уравнений (1.1), на фотографию лабораторного эксперимента II белый цвет использован для области, занятой частицами жидкости из верхнего бьефа, а черный цвет – для жидкости из нижнего бьефа.

Построенная волновая конфигурация симметрична относительно потока, движущегося со скоростью u_4 , так как числа Фруда $Fr_1 = |D_1 - u_3|/\sqrt{gh_3}$ и $Fr_2 = |D_2 - u_2|/\sqrt{gh_2}$ практически совпадают $Fr_1 \cong Fr_2 = 2.15$. В отличие от эксперимента I для указанных чисел Фруда турбулентный бор еще не является монотонным и на его структуру существенно влияют дисперсионные эффекты [1, гл. 6]. Тем не менее сравнение построенных численных и аналитических решений с реальной волновой картиной, приведенной на фиг. 3, показывает, что уравнения (1.1) адекватно описывают выход течения на квазистационарный режим в задаче о нестационарном взаимодействии плоских струй тяжелой жидкости.

Заключение. Изучена структура стационарного гидравлического прыжка, порожденного локальным препятствием в канале, а также нестационарной волновой конфигурации в задаче о разрушении шлюза, состоящей из двух турбулентных боров. Полученные на основе модели турбулентного бора (1.1) аналитические профили обрушивающихся волн, результаты численного исследования нестационарной задачи показывают хорошее совпадение с экспериментальными данными. Показано, что модель (1.1) с гидростатическим распределением давления по глубине адекватно описывает как положение, так и структуру стационарного и нестационарного волновых фронтов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00040) и Фонда интеграционных проектов СО РАН (№ 3.13.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 419 с.
2. Bakhmeteff B. A., Matzke A. E. The hydraulic jump in sloped channels // Trans. ASME. 1938. V. 60. № 1. P. 111–118, (HYD-60-1).
3. Rajaratnam N., Subramanya K. Profile of the hydraulic jump // Proc. ASME. J. Hydr. Div. 1968. V. 94. № 3. P. 663 – 673.
4. Battjes J. A., Sakai T. Velocity field in a steady breaker // J. Fluid Mech. 1981. V. 111. P. 421–437.
5. Hornung H.G., Willert C., Turner S. The flow field downstream of a hydraulic jump // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 299–316.
6. Yeh H.H., Mok K.-M. On turbulence in bores // Phys. Fluid. A. 1990. V. 2. № 5. P. 821–828.
7. Svendsen I.A., Veeramony J., Bakunin J., Kirby J.T. The flow in weak turbulent hydraulic jumps // J. Fluid Mech. 2000. V. 418. P. 25–57.
8. Nadaoka K., Hino M., Koyano Y. Structure of the turbulent flow field under breaking waves in the surf zone // J. Fluid Mech. 1989. V. 204. P. 359–387.
9. Madsen P.A., Svendsen I.A. Turbulent bores and hydraulic jumps // J. Fluid Mech. 1983. V. 129. P. 1–25.

10. Khan A.A., Steffler P.M. Physically based hydraulic jump model for depth-averaged computations // J. Hydr. Eng. 1996. V. 122. № 10. P. 540–548.
11. Ляпидевский В.Ю. Гидравлический прыжок перед препятствием // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2001. Вып. 118. С. 122–125.
12. Букреев В.И., Гусев А.В. Гравитационные волны при распаде разрыва над уступом dna открытого канала // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 4. С. 64–75.
13. Букреев В.И., Гусев А.В., Ляпидевский В.Ю. Транскритическое течение над порогом в открытом канале // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 6. С. 55–62.

Новосибирск

Поступила в редакцию
3.VI.2004