

© 2005 г. Д. Г. АРХИПОВ, Г. А. ХАБАХПАШЕВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПОТОКА ДВУХСЛОЙНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Теоретически изучена динамика плоских волн малой, но конечной амплитуды в двухслойной системе, ограниченной горизонтальными крышкой и дном. Показано, что при относительно высоких скоростях стационарного течения и некоторых соотношениях глубин жидкостей профиль вертикальной скорости становится нелинейным. Получено эволюционное уравнение для возмущения границы раздела жидкостей, учитывающее длинноволновые вклады инерции слоев и поверхностного натяжения, слабую нелинейность волн и нестационарные трения на всех границах системы. При пренебрежении диссипативными потерями для возмущенного течения определены установившиеся решения типа кноидальных и уединенных волн. Обнаружено, что величина и направление потока могут изменять не только длины волн, но и их поляриность.

Ключевые слова: волновое движение, гравитационные волны, двухслойная вязкая жидкость, кноидальные и уединенные волны, ламинарное течение.

Задачи о гравитационных волнах на свободных поверхностях неглубоких потоков жидкости со сдвигом продольной скорости давно привлекают внимание специалистов в области гидромеханики (например, [1–4]). Однако в последнее время интерес к подобным исследованиям заметно возрос (см. [5, 6], а также [7, 8]). Модельные уравнения для внутренних волн, учитывающие стационарные потоки идеальных жидкостей с кусочно-постоянной зависимостью скорости от глубины предложены в [7, 8]. Эволюционное уравнение для возмущений границы раздела двухслойной системы с учетом диссипации, но в отсутствие установившегося течения выведено в [9].

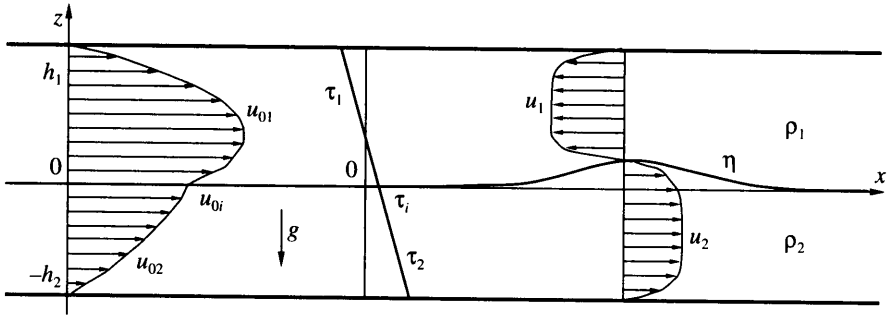
Из исследований, посвященных изучению волн на границе раздела двухслойной вязкой жидкости при наличии стационарного сдвигового потока, отметим [10], где аналитически показано, в частности, что двухслойное течение Пуазейля устойчиво в широком диапазоне параметров. Для такого же потока минерального масла и воды в плоском однодюймовом канале в [11] была экспериментально продемонстрирована устойчивость течения к возмущениям границы раздела вплоть до возникновения турбулентности.

Цель данной статьи – получение модельного уравнения, способного описывать трансформацию длинных нелинейных волн на границе раздела двух вязких жидкостей при наличии стационарного течения в горизонтальном канале, а также исследование некоторых его решений. Следовательно, в отличие от других работ выведенное эволюционное уравнение учитывает влияние как установившегося потока, так и диссипации.

1. Постановка задачи и упрощение исходных уравнений. Пусть две несжимаемые и несмешивающиеся жидкости ограничены твердыми крышкой $z = h_1$ и дном $z = -h_2$, а невозмущенная граница раздела слоев находится при $z = 0$. Тогда установившиеся ламинарные профили скоростей имеют вид

$$u_{0l} = u_{0i}(1 - A_l z^2 - B_l z)$$

$$u_{0i} = -\frac{h_1 h_2 H}{2(\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1)} \frac{dp_0}{dx}, \quad A_l = \frac{\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1}{\mu_1 h_1 h_2 H}, \quad B_l = \frac{\mu_1 h_2^2 - \mu_2 h_1^2}{\mu_1 h_1 h_2 H} \quad (1.1)$$



Фиг. 1. Схемы горизонтального течения и профиля трения в стационарном потоке, а также возмущенного движения, вызванного распространением длинной волны

где $H = h_1 + h_2$, dp_0/dx – постоянный градиент давления, μ – динамическая вязкость жидкости, а индекс $l = 1, 2$ для верхнего и нижнего слоев. Это двухжидкостное слоистое течение Пуазейля в плоском канале, конечно же, является решением стационарного уравнения движения $dp_0/dx = \mu_l d^2 u_{0l}/dz^2$ при четырех краевых условиях (прилипание на крышке и дне, непрерывность скорости и трения на границе раздела, т.е. $u_{0l} = 0$ при $z = -(-1)^l h_l$, $u_{0l} = u_{0i}$ и $\tau_l = \mu_l du_{0l}/dz = \tau_{0i}$ при $z = 0$). На фиг. 1 изображен профиль такого потока для системы вода–анилин ($\mu_1/\mu_2 = 0.225$) при $h_1/h_2 = 1.25$.

Исходные уравнения неразрывности и уравнения Стокса для возмущенного движения жидкости в каждом слое могут быть записаны в форме

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial w_l}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_{0l} \frac{\partial u_l}{\partial x} + w_l \frac{\partial u_{0l}}{\partial z} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + w_l \frac{\partial u_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial x} = \nu_l \left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + u_{0l} \frac{\partial w_l}{\partial x} + u_l \frac{\partial w_l}{\partial x} + w_l \frac{\partial w_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = \nu_l \left(\frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_l}{\partial z^2} \right) \quad (1.4)$$

Здесь u, w – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости жидкости, t – время, ρ – плотность жидкости, p – давление в ней, $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость, а g – ускорение свободного падения. Будем считать, что, во-первых, длина волны λ существенно больше, а амплитуда возмущения η_a значительно меньше равновесных глубин слоев ($h_l (h_l/\lambda \sim \varepsilon^{1/2}, \eta_a/h_l \sim \varepsilon$, где ε – малый параметр); во-вторых, капиллярные эффекты невелики (модифицированное число Бонда $Bo = (\rho_2 - \rho_1)gh_1 h_2/\sigma > 1$, здесь σ – поверхностное натяжение); и наконец, в-третьих, пограничные слои для возмущенной скорости остаются тонкими, т.е. время прорастания нестационарного пограничного слоя на всю толщину жидкости много больше характерного времени прохождения волны t_w (числа гидродинамической гомохронности $Ho_{vl} = \nu_l t_w/h_l^2 \sim \varepsilon^2$). Все эти предположения соответствуют условиям проведения экспериментов в различных гидродинамических лабораториях.

Нелинейные слагаемые в уравнениях (1.4) можно опустить как члены не учитываемого порядка малости ($u_l(\partial w_l/\partial x)/g \sim \varepsilon^2$ и $w_l^2/u_l^2 \sim \varepsilon$). Кроме того, при сделанных допу-

щениях можно пренебречь первыми слагаемыми в правых частях уравнений (1.3) и всеми правыми частями в уравнениях (1.4). Следовательно, диссипация несущественна при рассмотрении вертикальных компонент уравнений движения. В результате получаем упрощенную систему уравнений

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_{0l} \frac{\partial u_l}{\partial x} + w_l \frac{\partial u_{0l}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_l^2}{2} + \frac{p_l}{\rho_l} \right) + w_l \frac{\partial u_l}{\partial z} = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + u_{0l} \frac{\partial w_l}{\partial x} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = 0 \quad (1.6)$$

Поставим краевые условия на крышке, поверхности раздела слоев и дне

$$u_l = w_l = 0, \quad z = -(-1)^l h_l$$

$$u_1 = u_2 = u_i, \quad w_1 = w_2 = w_i = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (u_{0i} + u_i) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\nu_1 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \nu_2 \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = \tau_i, \quad p_{1i} = p_{2i} + \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad z = \eta(t, x) \quad (1.7)$$

т.е. условия прилипания жидкости на крышке и дне; условия непрерывности обеих составляющих векторов скоростей частиц жидкостей и касательных напряжений на границе раздела; а также кинематические условия и условие капиллярного скачка давления на этой поверхности.

Интегрируя уравнения (1.6) от z до η и используя условие (1.7), находим профили для давлений

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_{li}}{\rho_l} + g(\eta - z) + \int_z^\eta \frac{Dw_l}{D_{0l}t} dz, \quad \frac{D}{D_{0l}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{0l} \frac{\partial}{\partial x}$$

Подставляя данные выражения в уравнения (1.5), перепишем их в виде

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_{0l} \frac{\partial u_l}{\partial x} + w_l \frac{\partial u_{0l}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g\eta + \frac{p_{li}}{\rho_l} + \frac{u_l^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^0 \frac{Dw_l}{D_{0l}t} dz + w_l \frac{\partial u_l}{\partial z} = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

Верхний предел интеграла заменен, благодаря тому, что в рассматриваемом приближении (длинные возмущения малой амплитуды) пренебрегаем величинами третьего и более высоких порядков малости (в частности, нелинейно-дисперсионными слагаемыми). Для дальнейших преобразований необходимы профили вертикальных компонент скоростей жидкостей.

2. Определение картины возмущенного течения в слоях. В первом приближении, опустив нелинейные, инерционные, капиллярные и диссипативные члены в уравнениях движения (1.8) и краевых условиях, имеем

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_{0l} \frac{\partial u_l}{\partial x} + w_l \frac{du_{0l}}{dz} + \frac{\partial p_{i\eta}}{\partial x} = 0, \quad p_{i\eta} = g\eta + \frac{p_i}{\rho_l} \quad (2.1)$$

Далее, благодаря линейности волн, можно произвести замены

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} = -c \frac{\partial u_l}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_{i\eta}}{\partial x} = -\frac{l}{c} \frac{\partial p_{i\eta}}{\partial t}$$

где c – фазовая скорость очень длинных волн. А с помощью уравнений неразрывности можно заменить $\partial u_i/\partial x$ на $-\partial w_i/\partial z$. В результате получаем уравнения движения для вертикальных компонент скоростей жидкостей

$$(c - u_{0i}) \frac{\partial w_i}{\partial z} + w_i \frac{du_{0i}}{dz} = \frac{1}{c} \frac{\partial p_i \eta}{\partial t}$$

Если решения искать в виде $w_i = w_{iz}(z) \sin(kx - \omega t)$, $\eta = \eta_a \cos(kx - \omega t)$ и $p_i = p_a \cos(kx - \omega t)$, то приходим к неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка для определения зависимости $w_{iz}(z)$

$$(c - u_{0i}) \frac{dw_{iz}}{dz} + w_{iz} \frac{du_{0i}}{dz} = \frac{\omega}{c} p_i \eta = b_i$$

При $\max u_{0i}(z) < c$ решения данных уравнений можно записать в форме

$$w_{iz} = (c - u_{0i}) \left\{ u_{0i} \frac{b_i}{D} \left[\frac{4A_i}{\sqrt{D}} \arctg \left((2A_i z + B_i) \frac{u_{0i}}{\sqrt{D}} \right) + \frac{2A_i z + B_i}{c - u_{0i}} \right] + C_i \right\} \quad (2.2)$$

где $D = 4A_i u_{0i} (c - u_{0i}) - B_i^2 u_{0i}^2$. Величина фазовой скорости c , возмущение давления на границе раздела p_i (т.е. константы b_i) и постоянные интегрирования C_i находятся из условий непротекания на твердых границах и линеаризованных кинематических условий (1.7) на границе раздела жидкостей: $w_1(h_1) = w_2(-h_2) = 0$ и $w_{iz}(0) = \omega \eta_a (1 - u_{0i}/c)$.

На фиг. 2, а результаты расчетов показывают, что при малых скоростях стационарного потока профиль практически линеен. С увеличением скорости течения в верхнем слое выпуклость профиля вниз возрастает и при $c \approx \max u_{0i}(z)$ (для значений параметров фиг. 2 $u_0^* \approx 1.75$ или $c \approx 2.6c_0$, где $c_0 = \sqrt{gh_1 h_2 (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)}$) в верхней части данного слоя возмущенного движения нет.

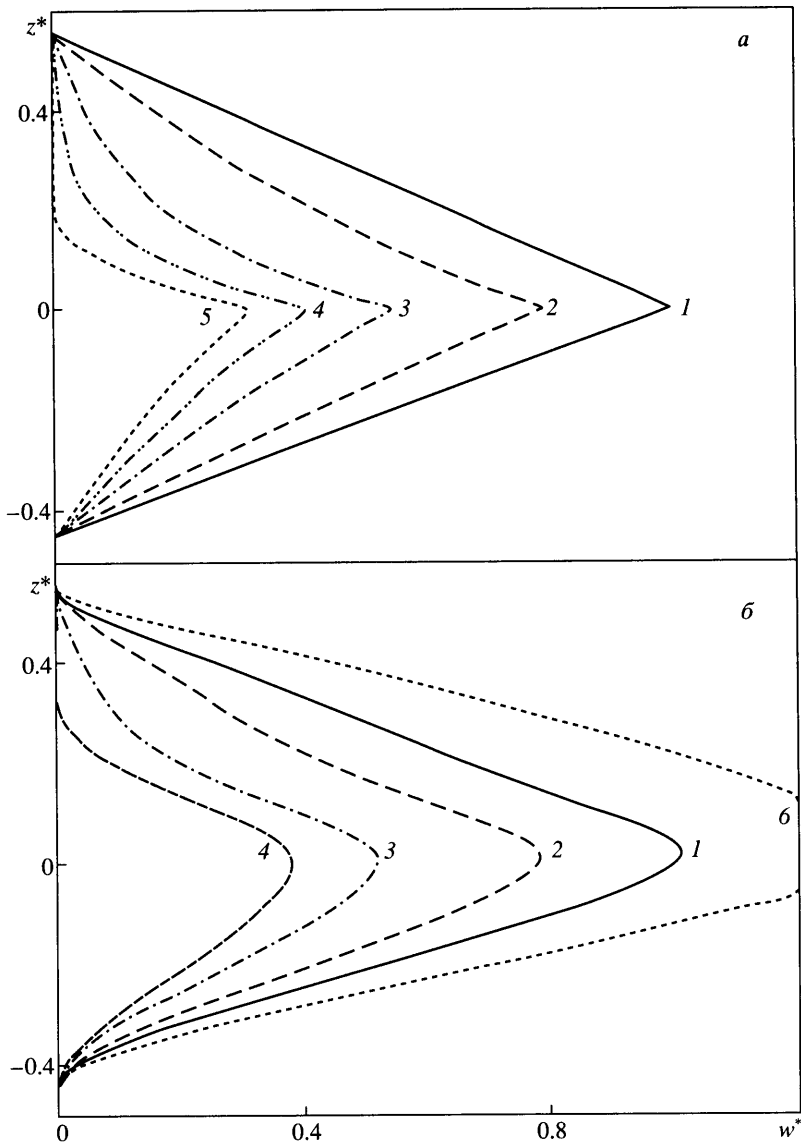
Отметим, что аналогичная картина наблюдается и в нижнем слое, если скорость стационарного течения достигает максимальной величины именно в нем. Принципиально важно, чтобы трение в установившемся сдвиговом потоке меняло знак. Напротив, для двухжидкостного течения Куэтта подобные решения получить нельзя.

Таким образом, имеем сужение области волнового движения в одном из слоев (между границей раздела и критическим уровнем, т.е. линией, на которой скорость стационарного потока достигает значения фазовой скорости). Это явление можно назвать экранированием или блокировкой линейных гравитационных возмущений в критическом слое.

Если учесть диссипацию (восстановить в уравнениях (2.1) вязкие члены $\nu_i \partial^2 u_i / \partial z^2$), то аналитические решения в этом случае найти трудно. Однако расчеты показывают, что эффект экранирования может иметь место даже при меньших скоростях установившегося потока (см. фиг. 2, б).

Проведенные вычисления подтвердили также предположение, что если принять во внимание инерции жидкостей, т.е. члены $\partial w_i / \partial t$ и $u_{0i} \partial w_i / \partial x$ в уравнениях (1.6), то для умеренно длинных волн наличие дисперсии не приводит к существенным изменениям профилей скоростей. Учет в уравнениях движения слабой нелинейности нестационарного течения тоже вряд ли заметно повлияет на данные результаты.

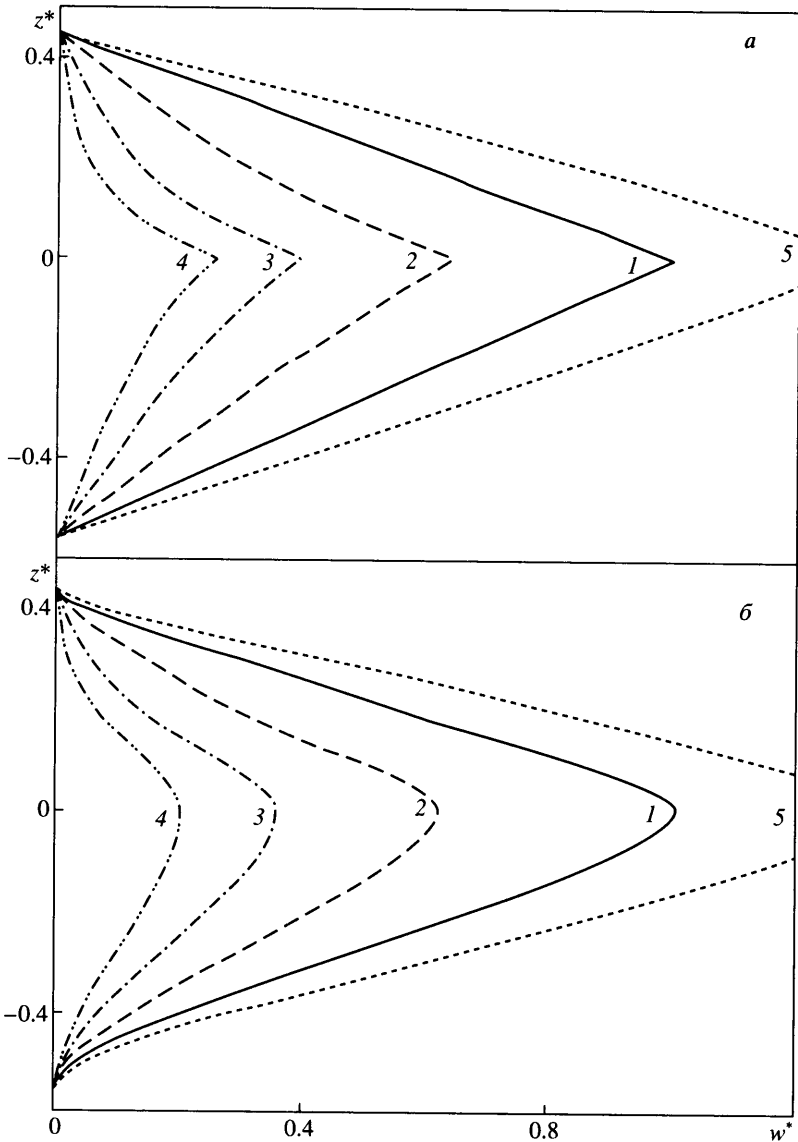
Если же значения $\max u_{0i}(z)$ не слишком отличаются от величин u_{0i} (при $0.05 < h_1/h_2 < 1.8$ для системы вода–анилин $\max u_{0i}(z) < 2u_{0i}$), то критический слой вообще не появляется и картина совсем иная (см. фиг. 3). На основании этого допустим, что профили верти-



Фиг. 2. Профили вертикальной компоненты скорости ($w^* = w_{1z}/(\omega\eta_a)$, $z^* = z/H$) при $\rho_1/\rho_2 = 0.98$, $h_1 = 1.5$ см, $h_2 = 1.2$ см, $\nu_1 = 10^{-4}$ Ст, $\nu_2 = 4.35 \cdot 10^{-4}$ Ст, $\omega = 1$ Гц: 1–6 – $u_0^* = u_{0i}/c_0 = 0, 0.25, 0.75, 1.25, 1.75, -0.25$; а – расчет по формулам (2.2), б – с учетом диссипации возмущений

кальных компонент скоростей жидкостей можно принять достаточно простыми, т.е. линейными по z

$$w_l = \frac{h_l + (-1)^l z D\eta}{h_l + (-1)^l \eta D_t t}, \quad \frac{D}{D_t t} = \frac{\partial}{\partial t} + (u_{0i} + u_i) \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.3)$$



Фиг. 3. Профили безразмерной вертикальной компоненты скорости при $\rho_1/\rho_2 = 0.98$, $h_1 = 1.2$ см, $h_2 = 1.5$ см, $\nu_1 = 10^{-4}$ Ст, $\nu_2 = 4.35 \cdot 10^{-4}$ Ст, $\omega = 1$ Гц: 1-5 - $u_0^* = 0, 0.5, 1.25, 2.25, -0.25$; а - расчет по формулам (2.2), б - с учетом диссипации возмущений

а для членов второго порядка малости еще более простые выражения

$$w_l = \left(1 + (-1)^l \frac{z}{h_l}\right) \frac{D\eta}{D_{0i}t}, \quad \frac{D}{D_{0i}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{0i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.4)$$

В частности, зависимости (2.4) можно подставить не только в интегральные слагаемые уравнений горизонтального движения (1.8), учитывающие инерцию каждого из слоев жидкости, но и в нелинейные члены $w \partial u_l / \partial z$.

3. Эволюционное уравнение для волн на границе раздела. Теперь проинтегрируем уравнения неразрывности (1.2) и движения (1.8) по z от $-h_2$ до $\eta(t, x)$ при $l = 2$ и от $\eta(t, x)$

до h_1 при $l = 1$. При этом, заменив $u_{0i} \partial u_i / \partial x$ на $-u_{0i} \partial w_i / \partial z$, а также подставив профили скоростей (1.1) и (2.3) во вторые и третьи члены уравнений (1.8), получаем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (h_{l\eta} \langle u_l \rangle)}{\partial x} + u_{0i} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad h_{l\eta} = (-1)^l h_l + \eta \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} & (-1)^l \frac{\partial (h_{l\eta} \langle u_l \rangle)}{\partial t} - u_{0i} \frac{A_l h_l}{3} (h_{l\eta} + \eta) \frac{D\eta}{D_i t} + (-1)^l h_{l\eta} \frac{\partial p_{i\eta}}{\partial x} + \\ & + h_l \frac{\partial}{\partial x} \left(\langle u_l^2 \rangle \right) + (-1)^l \frac{h_l}{3} \frac{\partial}{\partial t} \frac{D\eta}{D_{0i} t} + (-1)^l \frac{h_l^2}{4} \left(1 + \frac{A_l h_l^2}{5} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(u_{0i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{D\eta}{D_{0i} t} \right) + \\ & + (-1)^l u_{0i} u_i \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{(-1)^l}{\rho_l} (\tau_i - \tau_l) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $\tau_l = \mu_l \partial u_l / \partial z$ при $z = -(-1)^l h_l$, а также использованы интегрирование по частям, условия прилипания жидкостей и уравнения (1.2)

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{h_1} w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} dz &= \int_{\eta}^{h_1} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} dz - \frac{D\eta}{D_{0i} t} u_i \approx \frac{h_1}{2} \frac{\partial \langle u_1^2 \rangle}{\partial x} - u_i \frac{\partial \eta}{\partial t} - u_i u_{0i} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \int_{-h_2}^{\eta} w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} dz &= \int_{-h_2}^{\eta} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} dz + \frac{D\eta}{D_{0i} t} u_i \approx \frac{h_2}{2} \frac{\partial \langle u_2^2 \rangle}{\partial x} + u_i \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i u_{0i} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}$$

Угловыми скобками обозначены значения величин, осредненные по глубинам слоев.

Определение зависимости фазовой скорости длинных линейных возмущений от величины скорости установившегося потока вынесено в Приложение А, а вывод формул для u_i , τ_i и τ_l – в Приложение В. После соответствующих подстановок в уравнения баланса горизонтального импульса для каждого слоя будут входить только пять неизвестных величин (η , $\langle u_1 \rangle$, $\langle u_2 \rangle$, p_{1i} и p_{2i}). Как и в Приложении А, для исключения осредненных скоростей жидкостей из линейных членов продифференцируем уравнения (3.1) по t , а уравнения (3.2) по x и вычтем вторые из первых. В итоге получаем модельные уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + u_{0i} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} + u_{0i} \frac{A_l h_l}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left((-1)^l (h_{l\eta} + \eta) \frac{D\eta}{D_i t} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(h_{l\eta} \frac{\partial p_{l\eta}}{\partial x} \right) - h_l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((-1)^l \langle u_l^2 \rangle \right) + \frac{h_l}{3} \frac{\partial}{\partial t} \frac{D\eta}{D_{0i} t} - \\ & - u_{0i} \frac{h_l^2}{4} \left(1 + \frac{A_l h_l^2}{5} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{D\eta}{D_{0i} t} - u_{0i} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_i \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial (\tau_l - \tau_i)}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.3}$$

В результате ряда замен и трансформаций, которые вынесены в Приложение С, данная система двух уравнений сводится к искомому эволюционному уравнению

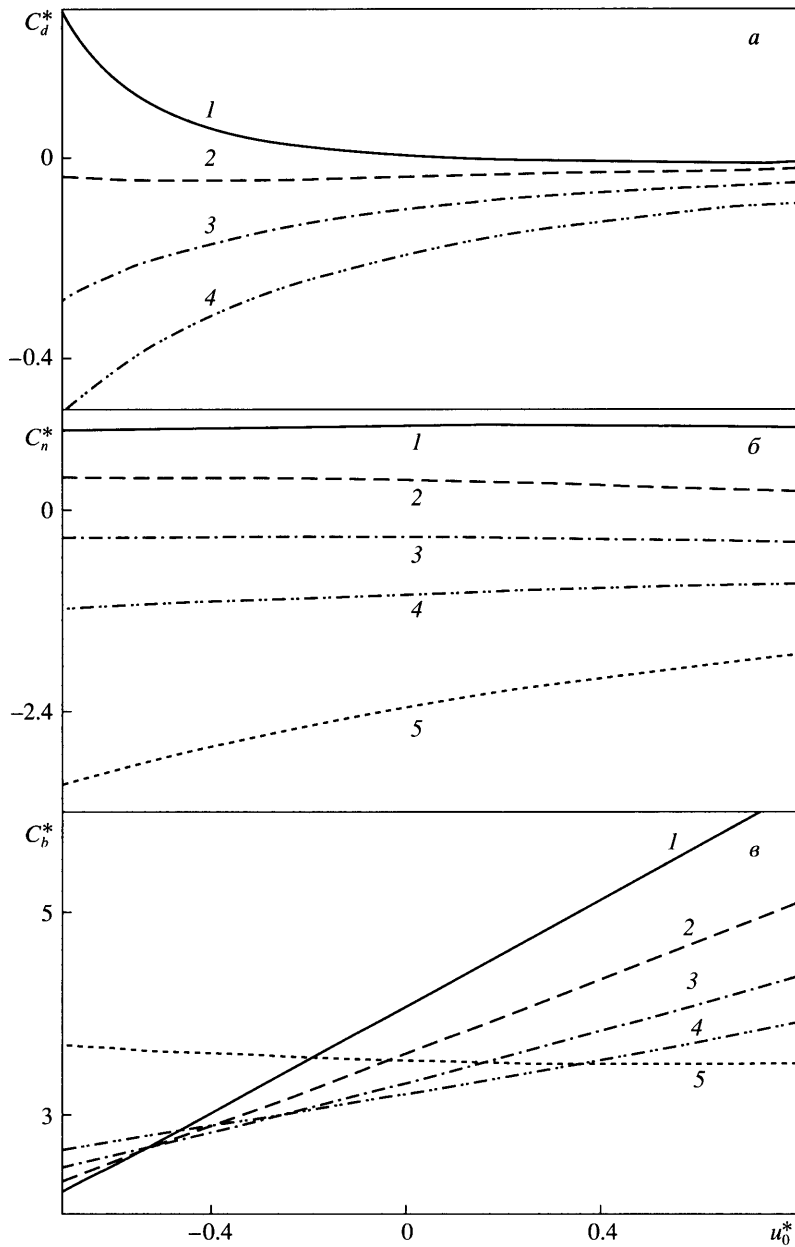
$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + u_{0i} (1 + S_f) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} - (c_0^2 - u_{0i}^2 S_f) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - C_d \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} - C_n \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} + \\ & + C_b \int_0^t \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} = \frac{C_{b0}}{\sqrt{t}} (c - u_{0i}) \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + C_{n0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_d &= (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \frac{h_1 h_2}{\chi} \left(\frac{1}{3} - \frac{7u_{0i}}{12c} + \frac{u_{0i}^2}{4c^2} \right) - \\
&- \frac{h_1 h_2}{20\chi} (\rho_1 h_1^3 A_1 + \rho_2 h_2^3 A_2) \frac{u_{0i}}{c} \left(1 - \frac{u_{0i}}{c} \right) - \frac{h_1 h_2 \sigma}{c^2 \chi} \\
C_n &= \frac{\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2}{h_1 h_2 \chi} \left(\frac{c_0^2}{2} + (c - u_{0i})^2 \right) + u_{0i} \left(\frac{c_0^2 S_\Psi R_\Psi}{2(c - u_{0i})} - c R_\chi \right) + u_{0i}^2 \left(R_\chi + \frac{S_b S_\Psi}{2} \right) \\
R_\Psi &= \frac{\Psi_2}{h_2} - \frac{\Psi_1}{h_1}, \quad R_\chi = R_v - \rho_1 \rho_2 \frac{R_f H}{2\chi} \\
C_b &= \frac{c_0^2}{\sqrt{\pi} h_1 h_2 \chi} \left(\frac{\Psi H^2 \sqrt{c}}{\sqrt{c - u_{0i}}} + \Psi_1 h_2^2 + \Psi_2 h_1^2 \right) + \\
&+ \frac{u_{0i}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{H}{\chi} \Psi \sqrt{c(c - u_{0i})} [B_2 - B_1 - (\rho_2 - \rho_1) R_f] - \rho_1 \rho_2 R_b (c - u_{0i}) \frac{R_f}{\chi} \right) \\
C_{b0} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} h_1 h_2 \chi} \left(\Psi H^2 \sqrt{1 - \frac{u_{0i}}{c}} + \Psi_1 h_2^2 + \Psi_2 h_1^2 \right) \\
C_{n0} &= u_{0i} R_\Psi S_\Psi \left[c - \frac{c_0^2}{c - u_{0i}} - u_{0i} \left(1 + \frac{S_b}{R_\Psi} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

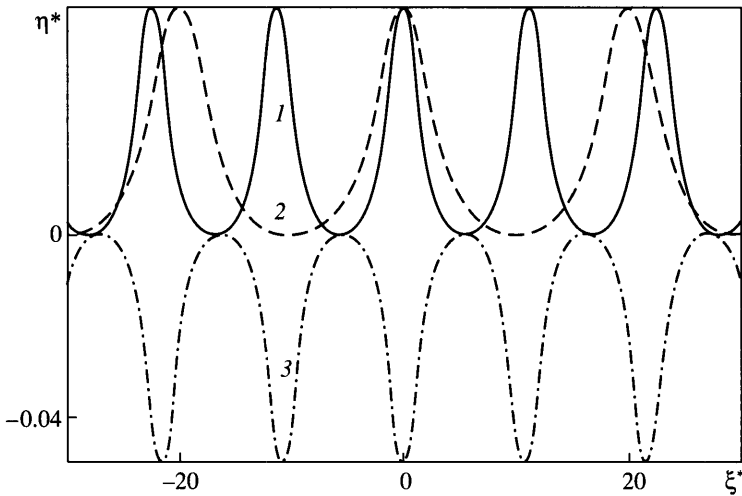
Таким образом, в уравнении (3.4) коэффициенты при всех членах определяются только физическими (g , σ , ρ_1 , ρ_2 , v_1 , v_2 и u_{0i}) и геометрическими (h_1 , h_2) параметрами задачи.

В отличие от эволюционного уравнения, полученного в [9], уравнение (3.4) учитывает не только слабую нелинейность возмущений, длинноволновые вклады инерции слоев жидкости, поверхностное натяжение и нестационарные трения на всех границах данной системы, но и установившееся течение вязкой жидкости в горизонтальном канале.

На фиг. 4 продемонстрировано поведение ряда коэффициентов уравнения (3.4) в зависимости от величины и направления стационарного потока. Видно, что спутное течение меньше меняет коэффициент при дисперсионном члене C_d^* , чем противоток. Наличие поверхностного натяжения приводит к тому, что этот коэффициент может быть не только положительным, но и отрицательным. Что касается коэффициента при нелинейных членах C_n^* , то, если глубины слоев различаются не более чем в 2 раза, он практически не зависит от скорости течения. Заметные изменения имеют место лишь тогда, когда глубины слоев различаются в 3 раза или более. А коэффициент при интегральном диссипативном члене C_b^* почти линейно зависит от скорости потока, хотя угол наклона существенно изменяется со значением отношения h_1/h_2 . В случае, когда глубина более вязкой жидкости много больше глубины менее вязкого слоя, данный коэффициент практически постоянен (особенно при спутном течении). В противоположной ситуации, наоборот, наблюдается наиболее крутая зависимость этого коэффициента от скорости стационарного потока.



Фиг. 4. Зависимости коэффициентов дисперсии $C_d^* = C_d/H^2$ (а), нелинейности $C_n^* = C_n/g_+^*$ (б) и диссипации $C_b^* = C_b\chi/(\Psi g_+^* - H)$ (в) в уравнении (3.4) от скорости установившегося потока u_0^* при $\rho_1/\rho_2 = 0.98$, $v_1/v_2 = 0.23$, $\sigma = 45$ дин/см, $h_2 = 2$ см: 1–5 – $h_1/h_2 = 2/1, 5/4, 4/5, 1/2, 1/8$



Фиг. 5. Профили стационарно-бегущих нелинейных периодических (кноидальных) волн, рассчитанные по формулам (4.2) при $\rho_1/\rho_2 = 0.98$, $v_1/v_2 = 0.23$, $h_1/h_2 = 2$, $h_2 = 2$ см, $\sigma = 45$ дин/см, $m = 0.96$: $1-3 - u_0^* = -0.5, 0, 0.5$

4. Нелинейные решения модельного эволюционного уравнения. Проанализируем частные и предельные случаи исследуемой задачи. Если можно пренебречь диссипативными потерями, связанными с нестационарным трением на границах, то в этом уравнении исчезнут интегральный член и оба члена в его правой части. Получившееся модельное уравнение подобно модифицированному уравнению Буссинеска [9] и соответственно уравнению Кортевега – де Вриза (например, [12, 13]), хотя сложнее, чем они. Для поиска установившихся решений данного уравнения перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с возмущением (со скоростью U). В итоге приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

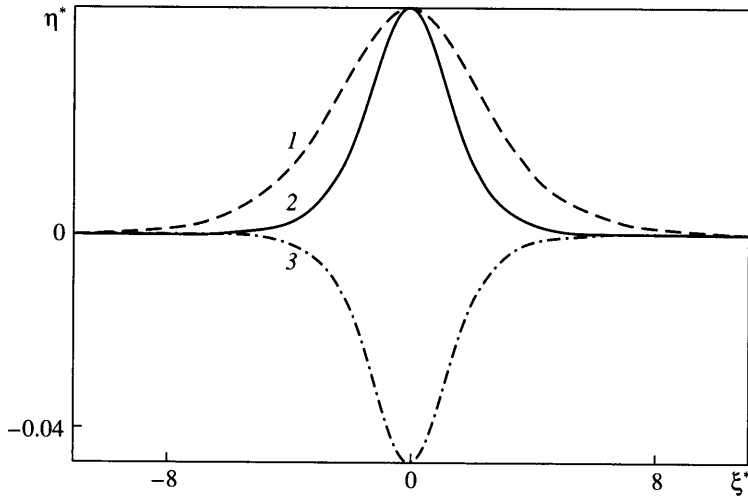
$$C_d U^2 \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = [U^2 - U u_{0i}(1 + S_f) - c_0^2 + u_{0i}^2 S_f] \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - C_n \frac{d^2 \eta^2}{d\xi^2} \quad (4.1)$$

где $\xi = x - Ut$. Решения уравнения (4.1) содержат эллиптические функции Якоби, т.е. они являются кноидальными волнами [12, 13]

$$\eta = \eta_{cn} \operatorname{cn}^2\left(\frac{\xi}{L_{cn}}\right), \quad L_{cn} = m U_{cn} \sqrt{\frac{6C_d}{\eta_{cn} C_n}} \quad (4.2)$$

$$U_{cn} = \frac{1}{2} u_{0i}(1 + S_f) + \sqrt{\frac{1}{4} u_{0i}^2 (1 - S_f)^2 + c_0^2 + \frac{2}{3} \eta_{cn} C_n (2 - m^{-2})}$$

Здесь m – модуль эллиптической функции Якоби. На фиг. 5 проиллюстрировано воздействие модуля и направления скорости стационарного потока на форму возмущений. Как показано в предыдущем разделе, при данном значении отношения равновесных глубин слоев воды и анилина коэффициент C_n при нелинейном члене почти постояен, а значение C_d при дисперсионном члене в уравнении (3.4) заметно изменяется не только по величине, но и по знаку. Таким образом, в рассматриваемой ситуации именно этим определяются длины кноидальных волн и их профили, т.е. что является более острым – вершины или впадины.



Фиг. 6. Профили установившихся нелинейных уединенных волн (солитонов), вычисленные по (4.3) для тех же значений как на фиг. 5: $1-3 - u_0^* = -0.5, 0, 0.5$

Уединенные решения уравнения (4.1), как обычно, найдем, если параметр $m \rightarrow 1$, и перейдем от эллиптического косинуса к гиперболическому

$$\eta = \eta_s \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{L_s}\right), \quad L_s = U_s \sqrt{\frac{6C_d}{\eta_s C_n}} \tag{4.3}$$

$$U_s = \frac{1}{2}u_{0i}(1 + S_f) + \sqrt{\frac{1}{4}u_{0i}^2(1 - S_f)^2 + c_0^2 + \frac{2}{3}\eta_{cn}C_n}$$

Для этих возмущений, конечно же, наблюдается аналогичная картина (фиг. 6). Спутное течение уменьшает, а противоток увеличивает продольный размер волны, когда $C_d > 0$. Если же знак в этом неравенстве другой, то и эффект влияния стационарного течения будет обратным. Таким образом, величина и направление потока могут изменять как длины волн, так и их полярность.

Заключение. Проанализировано воздействие стационарного двухслойного потока вязкой жидкости в горизонтальном канале на профиль вертикальной скорости волнового движения. Обнаружено, что диссипация может оказывать существенное влияние на картину течения при достаточно высоких скоростях потока. Выведено модельное эволюционное интегродифференциальное уравнение для двумерных возмущений границы раздела. Оно учитывает длинноволновые вклады инерций слоев и поверхностного натяжения, слабую нелинейность возмущений и нестационарные трения на всех границах системы. Предложенный метод можно применять для других профилей течения. При пренебрежении диссипативными потерями для возмущенного движения получены стационарно бегущие решения типа кноидальных волн и солитонов. Продемонстрировано влияние величины и направления установившегося потока на продольные размеры волн и их полярность.

Эти исследования поддержаны РФФИ (№ 04-01-00183) и СО РАН (программа № 4.2-04). Авторы также выражают искреннюю признательность П.И. Гешеу и О.Ю. Цвелодубу за плодотворное обсуждение ряда вопросов и полезные советы.

Приложение А. Нахождение фазовой скорости линейных волн. Для определения зависимости фазовой скорости от величины установившегося потока рассмотрим сис-

тему (3.1) и (3.2) без учета не только нелинейных и дисперсионных членов, но и нестационарных трений на всех границах

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (-1)^l h_l \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x} + u_{0i} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$h_l \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x} - (-1)^l u_{0i} \frac{A_l}{3} h_l^2 \frac{D\eta}{D_{0i}t} + h_l \frac{\partial p_{in}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Поправки, характеризующиеся вторым порядком малости, здесь опущены. В частности, $p_{1i} = p_{2i} = p_i$, благодаря пренебрежению капиллярными членами. Для исключения скоростей жидкостей продифференцируем уравнения (A.1) по t , а уравнения (A.2) по x и вычтем вторые из первых, тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{0i} \frac{A_l}{3} h_l^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{D\eta}{D_{0i}t} - (-1)^l h_l \frac{\partial^2 p_{in}}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Вторую производную давления на границе раздела определяем из условия тождественности этих уравнений, описывающих один и тот же процесс:

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} = -\rho_1 \rho_2 \left(\frac{gH \partial^2 \eta}{\chi \partial x^2} + R_f u_{0i} \frac{\partial D\eta}{\partial x D_{0i}t} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\chi = \rho_1 h_2 + \rho_2 h_1, \quad R_f = \frac{(\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1)(\mu_2 h_1^2 - \mu_1 h_2^2)}{3\mu_1 \mu_2 h_1 h_2 \chi H}$$

Отсюда восстановим формулу для первой производной возмущения давления

$$\frac{\partial p_i}{\partial x} = -\rho_1 \rho_2 \left(\frac{gH \partial \eta}{\chi \partial x} + R_f u_{0i} \frac{D\eta}{D_{0i}t} \right) \quad (\text{A.5})$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как, согласно сделанному предположению, $\partial p_i / \partial x = 0$ в отсутствие возмущений.

Подставив зависимость (A.4) в уравнение (A.3), получаем уравнение для возмущения границы раздела. Если искать решение в виде гармонической волны, то

$$c^2 - c u_{0i}(1 + S_f) - (c_0^2 - u_{0i}^2 S_f) = 0, \quad S_f = \frac{(v_1 h_2 + v_2 h_1)(\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1)}{3v_1 v_2 \chi H}$$

Следовательно, для фазовой скорости линейных волн приходим к формуле

$$c = \frac{1}{2} u_{0i}(1 + S_f) \pm \sqrt{c_0^2 + \left(\frac{1}{2} u_{0i}(1 - S_f) \right)^2}$$

Таким образом, как и ожидалось, спутное течение увеличивает, а противоток уменьшает фазовую скорость возмущений. Реально фазовая скорость зависит от скорости стационарного течения почти линейно.

Приложение В. Определение вязких трений у трех границ. Для нахождения τ_l и τ_i необходимо вернуться к уравнениям движения (1.8) без учета лишь нелинейных и инерционных членов

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_{0l} \frac{\partial u_l}{\partial x} + w_l \frac{\partial u_{0l}}{\partial z} + \frac{\partial p_{in}}{\partial x} = v_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2}$$

С помощью замены $u_{0i}(\partial u_i/\partial x)$ на $-(u_{0i}/c)(\partial u_i/\partial t)$ и $\partial \eta/\partial t$ на $-c(\partial \eta/\partial x)$, формулы (1.1) для u_{0i} , зависимостей (2.4) для w_i и соотношения (А.5) для $\partial p_{ii}/\partial x$ данные уравнения движения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - \frac{1}{v_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} \left(1 - \frac{u_{0i}}{c}\right) = \\ = \frac{1}{v_i} \left\{ (-1)^l \frac{c_0^2}{h_l} + \left[\left(1 + (-1)^l \frac{z}{h_l}\right) (2A_l z + B_l) + \rho_1 \rho_2 \frac{R_f}{\rho_l} \right] u_{0i} (c - u_{0i}) \right\} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Решения уравнений (B.1) ищем методом разделения переменных: $u_i(t, x, z) = v_i(t, z) f_i(x)$. Рассмотрим сперва пограничные слои вблизи крышки и дна. Тогда $z \approx -(-1)^l h_l$ и правые части уравнений движения (B.1) заметно упрощаются, но, главное, они перестают зависеть от координаты z . Следовательно, применив к уравнениям (B.1) преобразование Лапласа, имеем

$$\frac{\partial^2 V_i(s, z)}{\partial z^2} - \frac{s}{v_i} V_i(s, z) = \frac{G_i(s, x)}{v_i f_i(x)} - \frac{v_{i0}}{v_i} \equiv P_i(s) \tag{B.2}$$

Здесь $V_i(s, z)$ и $G_i(s, x)/v_i$ – изображения $v_i(t, z)$ и правых частей уравнений (B.1) при $z = -(-1)^l h_l$ соответственно. Правые части уравнений (B.2) есть функции только s , так как левая его часть не зависит от x , а скорости жидкостей в каждом из слоев при $t = 0$ – от z . Использование допущения о тонкости пограничных слоев позволяет поставить условие отсутствия касательных напряжений на больших расстояниях от рассматриваемых поверхностей, т.е. при $z = \mp \infty$ (для крышки или дна), или оба вместе для поверхности раздела (пограничные слои практически бесконечно глубоко утоплены в жидкостях).

С помощью замены $V_i' = V_i + P_i v_i/s$ уравнения (B.2) записываются в форме линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Тогда решения, удовлетворяющие двум краевым условиям $V_i = 0$ при $z = -(-1)^l h_l$ и $\partial V_i/\partial z = 0$ при $z = (-1)^l \infty$, определяются

$$V_i(s, z) = P_i(s) \frac{v_i}{s} \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{v_i}} [(-1)^l z + h_l]\right) - 1 \right]$$

Отсюда находим интересующие производные V_i на крышке и дне

$$z = -(-1)^l h_l, \quad \frac{\partial V_i}{\partial z} = (-1)^{l+1} P_i(s) \sqrt{\frac{v_i}{s}}$$

Применив к данным формулам обратное преобразование Лапласа, в пространстве оригиналов получаем выражения для трений о крышку и дно

$$\begin{aligned} \tau_l = \rho_l \sqrt{\frac{v_l}{\pi}} \left[(-1)^l \frac{u_{l0}(x)}{\sqrt{t}} - \left(\frac{c_0^2}{h_l} + (-1)^l \rho_1 \rho_2 \frac{R_f}{\rho_l} u_{0i} (c - u_{0i}) \right) I_{l\eta} \right] \\ I_{l\eta} = \int_0^t \frac{\partial \eta(t', x)}{\partial x} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \end{aligned} \tag{B.3}$$

Вблизи границы раздела ($z \approx 0$) правые части уравнений (В.1) перестают зависеть от z . В результате после преобразования Лапласа по времени имеем

$$\frac{\partial^2 V_l}{\partial z^2} - V_l \frac{s}{v_l} \left(1 - \frac{u_{0i}}{c}\right) = \frac{G_l}{v_l f_l} - \frac{v_{l0}}{v_l} \left(1 - \frac{u_{0i}}{c}\right) \equiv P_l(s) \quad (\text{В.4})$$

Из совместного решения уравнений (В.4) с четырьмя краевыми условиями ($\partial V_l / \partial z = 0$ при $z = -(-1)^l \infty$; $V_1 = V_2$ и $\mu_1 \partial V_1 / \partial z = \mu_2 \partial V_2 / \partial z$ при $z = 0$) находим изображения

$$V_l(s, z) = (-1)^l \frac{\Psi}{\Psi_l} \frac{v_2 P_2(s) - v_1 P_1(s)}{s_i} \exp\left((-1)^l \sqrt{\frac{s_i}{v_l}} z\right) - \frac{v_l}{s_i} P_l(s)$$

$$\Psi_l = \sqrt{v_l} \rho_l, \quad \Psi = \frac{\Psi_1 \Psi_2}{\Psi_1 + \Psi_2}, \quad s_i = s \left(1 - \frac{u_{0i}}{c}\right)$$

Из этих профилей снова с помощью обратного преобразования Лапласа имеем скорость и трение на границе раздела слоев

$$z = 0, \quad u_i(t, x) = \frac{\Psi_1 u_{1,0}(x) + \Psi_2 u_{2,0}(x)}{\Psi_1 + \Psi_2} + \frac{\eta(t, x) - \eta_0(x)}{\Psi_1 + \Psi_2} \left[\frac{c_0^2}{c - u_{0i}} \left(\frac{\Psi_2}{h_2} - \frac{\Psi_1}{h_1} \right) + u_{0i} [(\rho_1 \Psi_2 + \rho_2 \Psi_1) R_f + (\Psi_1 B_1 + \Psi_2 B_2)] \right] \quad (\text{В.5})$$

$$\tau_i = \sqrt{1 - \frac{u_{0i}}{c}} \frac{\Psi}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} [u_{1,0}(x) - u_{2,0}(x)] + \left(\frac{c c_0^2 H}{h_1 h_2 (c - u_{0i})} + [B_2 - B_1 - R_f (\rho_2 - \rho_1)] u_{0i} c \right) I_{1\eta} \right] \quad (\text{В.6})$$

Кроме того, при выводе зависимости для скорости жидкости использованы преобразования

$$\int_0^t c \frac{\partial \eta(t', x)}{\partial x} dt' = - \int_0^t \frac{\partial \eta(t', x)}{\partial t'} dt' = \eta_0(x) - \eta(t, x)$$

Отметим, что в уравнениях (В.3), (В.5) и (В.6) время $t > 0$, а члены, содержащие переменные $u_{1,0}(x)$, $u_{2,0}(x)$ и $\eta_0(x)$, сказываются лишь в области, возмущенной в начальный момент времени. Для всего остального пространства данные члены фактически выпадают (равны нулю).

Приложение С. Вывод модельного эволюционного уравнения. В уравнениях (3.3) скорости жидкостей содержатся лишь в членах второго порядка малости. Кроме того, будем рассматривать только такие процессы, когда нелинейные волны бегут лишь в определенном направлении. Тогда в левых частях этих уравнений можно заменить $\langle u_l^2 \rangle$ на $(c - u_{0i})^2 \eta^2 / h_l^2$, $u_{l,0}$ на $(-1)^l (c - u_{0i}) \eta_0 / h_l$, а в их правых частях $(-1)^l h_l (\partial u_{l,0} / \partial x)$ на $(c - u_{0i}) (\partial \eta_0 / \partial x)$. Наконец, в членах второго порядка малости можно выразить градиенты давлений на границе раздела слоев с помощью формулы (А.5). В итоге приходим к двум

уравнениям, не содержащим никаких значений возмущений скоростей (ни граничных, ни осредненных, ни начальных)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + u_{0i} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} - (-1)^l \left[g h_l \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - u_{0i} \frac{A_l}{3} h_l \frac{\partial}{\partial x} \left((h_{ln} + \eta) \frac{D\eta}{D_{0i}t} \right) + \frac{h_l \partial^2 p_{li}}{\rho_l \partial x^2} \right] - \\
 & - \left(\frac{g}{2} + \frac{(-1)^l}{h_l} (c - u_{0i})^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} + \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_l} \left[\frac{gH}{2\chi} \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} + u_{0i} R_f \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{D\eta}{D_{0i}t} \right) \right] - \\
 & - \frac{h_l^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \frac{D\eta}{D_{0i}t} - u_{0i} \frac{h_l^2}{4} \left(1 + \frac{A_l}{5} h_l^2 \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{D\eta}{D_{0i}t} - \\
 & - u_{0i} R_\psi \frac{c - u_{0i}}{\psi_1 + \psi_2} \left(1 - \frac{A_l}{3} h_l^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{u_{0i}}{\psi_1 + \psi_2} \left(1 - \frac{A_l}{3} h_l^2 \right) \times \\
 & \times \left(\frac{c_0^2 R_\psi}{c - u_{0i}} + u_{0i} [(\rho_1 \psi_2 + \rho_2 \psi_1) R_f + (\psi_1 B_1 + \psi_2 B_2)] \right) \frac{\partial}{\partial x} \left((\eta - \eta_0) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\
 & = \sqrt{\frac{V_l}{\pi t}} (c - u_{0i}) \left(\frac{1}{h_l} + \frac{\psi H}{\psi_l h_1 h_2} \sqrt{1 - \frac{u_{0i}}{c}} \right) \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - \\
 & - \sqrt{\frac{V_l}{\pi}} \left\{ \frac{u_{0i}}{\rho_l} \left((-1)^l \rho_1 \rho_2 R_f (c - u_{0i}) + \frac{c \psi}{\sqrt{V_l}} \sqrt{1 - \frac{u_{0i}}{c}} [B_2 - B_1 - (\rho_2 - \rho_1) R_f] \right) + \right. \\
 & \left. + c_0^2 \left[\frac{1}{h_l} + \left(1 - \frac{u_{0i}}{c} \right)^{-1/2} \frac{\psi H}{\psi_l h_1 h_2} \right] \right\} \frac{\partial I_{l\eta}}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Чтобы свести систему этих двух уравнений к одному (исключив величины давлений на границе раздела и из членов первого порядка малости), умножим уравнение (C.1) при $l = 1$ и 2 на h_2/ρ_2 и h_1/ρ_1 и сложим их. Таким образом, эволюционное уравнение представим в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + u_{0i} (1 + S_f) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} - (c_0^2 - u_{0i}^2 S_f) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \\
 & - (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \frac{h_1 h_2}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{7}{12} u_{0i} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} + \frac{1}{4} u_{0i}^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) - \\
 & - u_{0i} (\rho_1 h_1^3 A_1 + \rho_2 h_2^3 A_2) \frac{h_1 h_2}{20\chi} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{D\eta}{D_{0i}t} + \sigma \frac{h_1 h_2}{\chi} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \\
 & - \frac{\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2}{h_1 h_2 \chi} \left(\frac{c_0^2}{2} + (c - u_{0i})^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} + u_{0i} \left(\rho_1 \rho_2 \frac{R_f H}{2\chi} - R_v \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{D\eta}{D_{0i}t} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -u_{0i}S_\Psi \left[\left(u_{0i}S_b + \frac{c_0^2 R_\Psi}{c - u_{0i}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left((\eta - \eta_0) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + (c - u_{0i}) R_\Psi \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] = \\
& = \left[\frac{u_{0i}}{\sqrt{\pi}} \left(\rho_1 \rho_2 R_b (c - u_{0i}) \frac{R_f}{\chi} - \frac{H}{\chi} \Psi \sqrt{c(c - u_{0i})} [B_2 - B_1 - (\rho_2 - \rho_1) R_f] \right) - \right. \\
& - \frac{c_0^2}{\sqrt{\pi} h_1 h_2 \chi} \left(\frac{\Psi H^2 \sqrt{c}}{\sqrt{c - u_{0i}}} + \Psi_1 h_2^2 + \Psi_2 h_1^2 \right) \left. \right] \frac{\partial I_{\text{тн}}}{\partial x} + \\
& + \frac{c - u_{0i}}{\sqrt{\pi} h_1 h_2 \chi} \left(\Psi H^2 \sqrt{1 - \frac{u_{0i}}{c}} + \Psi_1 h_2^2 + \Psi_2 h_1^2 \right) \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \\
& S_b = R_f (\rho_1 \Psi_2 + \rho_2 \Psi_1) + \Psi_1 B_1 + \Psi_2 B_2, \quad R_b = \sqrt{v_1} h_2 - \sqrt{v_2} h_1 \\
& R_v = (v_2 - v_1) \frac{\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1}{3 v_1 v_2 \chi H}, \quad S_\Psi = \frac{1 - S_f}{\Psi_1 + \Psi_2}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

В рамках сделанных выше предположений о длинноволновости небольших возмущений и о том, что они движутся лишь в одном направлении (например, в направлении роста координаты x), в членах второго порядка малости можно произвести следующие замены: в нелинейных членах $\partial \eta / \partial t$ на $-c(\partial \eta / \partial x)$ и наоборот; в дисперсионных членах $\partial / \partial x$ на $-(1/c)(\partial / \partial t)$; а в капиллярном слагаемом $c^2(\partial^2 / \partial x^2)$ на $\partial^2 / \partial t^2$. Тогда удастся переписать уравнение (C.2) в более компактной форме уравнения (3.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Burns J.C. Long waves in running water // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. № 4. P. 695–706.
2. Hunt J.N. Gravity waves in flowing water // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. 231. № 1187. P. 496–504.
3. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows // J. Fluid Mech. 1957. V. 3. Pt 2. P. 185–204.
4. Velthuisen H.G.M., van Wijngaarden L. Gravity waves over a non-uniform flow // J. Fluid Mech. 1969. V. 39. Pt 4. P. 817–829.
5. Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л. Распространение волн в сдвиговых потоках. М.: Наука, 1996. 240 с.
6. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 419 с.
7. Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е., Лэмб К. Нелинейные внутренние волны в океане, стратифицированном по плотности и течению // Океанология. 2000. Т. 40. № 6. С. 805–815.
8. Grimshaw R., Pelinovsky E., Poloukhina O. Higher-order Korteweg – de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with free surface // Nonlinear Proc. in Geophys. 2002. V. 9. № 3/4. P. 221–235.
9. Хабахнашев Г.А. Эволюция возмущений границы раздела двух слоев вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 118–123.
10. Hooper A.P., Grimshaw R. Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 1. P. 37–45.
11. Kao T.W., Park C. Experimental investigation of the stability of channel flow. Pt 2. Two-layered co-current flow in a rectangular channel // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. Pt 3. P. 401–423.
12. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
13. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. N. Y.: Wiley, 1974. = Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.