

УВЕЛИЧЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ВОЛНЫ СЖАТИЯ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ РАСТВОРЕННОГО ГАЗА

Исследован квазиизотермический режим волнового процесса в газожидкостной смеси, когда термодинамическое поведение газа в пузырьках близко к изотермическому. Получено эволюционное уравнение четвертого порядка с основной гидродинамической и обусловленной межфазным теплообменом дополнительной нелинейностью. Построено его точное частное решение, выявляющее эффект увеличения амплитуды волны давления при реализации определенного закона межфазного теплообмена. Выявлен диапазон допустимых исходных радиусов пузырьков, при которых проявляется эффект усиления, отсутствующий для значений вне его.

Ключевые слова: квазиизотерма, волна, газ, жидкость, нелинейность, теплообмен, поверхностное натяжение.

Экспериментально обнаружено [1, 2], что в воде с пузырьками растворенного углекислого газа CO_2 может происходить значительное увеличение амплитуды волны давления. Однако термодинамическое поведение газа в пузырьках осталось невыясненным. В [3, 4] предложены системы модельных уравнений для адекватного описания течения газожидкостной смеси, в которой имеет место необратимый межфазный теплообмен. На их основе в [5, 6] в приближении Буссинеска получено уравнение, описывающее нелинейный волновой процесс в жидкости с пузырьками термически релаксирующего газа. Для квазиadiaбатического режима распространения волны, когда поведение газа близко к адиабатическому, выведено эволюционное уравнение третьего порядка с двумя нелинейностями, одно из точных частных решений которого выявляет эффект увеличения амплитуды. Поскольку только после сопоставления теоретических расчетов с данными экспериментов [1, 2] можно судить о термодинамическом поведении газа, возникает необходимость исследования квазиизотермического режима распространения волны.

1. Исходные уравнения. Исследуется волновой процесс в монодисперсной бестолкновительной смеси несжимаемой жидкости и пузырьков calorически совершенного газа, объемное содержание которых мало. Учитываются эффекты поверхностного натяжения, вязкости и межфазного теплообмена. Предполагается постоянство температуры жидкой фазы, отсутствие внешних источников тепла, а также процессов дробления, слипания и образования новых пузырьков. Для односкоростной модели рассматриваемой смеси распространение одномерных волн давления в приближении Буссинеска [4] можно описать нелинейным уравнением [6]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_{e0}^2 E_e \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{4\mu}{3\rho_0\beta_0} \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} - \frac{a_{e0}^2}{\omega_{ir}^2} \frac{\partial^4 p}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{1}{3} \frac{b_0^2}{\beta_0} \left(2 + \frac{\beta_0}{b_0} + \frac{16}{3} \frac{1}{We} \right) \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} = \\ & = -t_T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_{f0}^2 E_f \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{4\mu}{3\rho_0\beta_0} \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} - \frac{a_{f0}^2}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^4 p}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\gamma b_0^2}{2\beta_0^2} \left(1 + \frac{\beta_0}{b_0} + \frac{89\gamma - 5}{9} \frac{1}{\gamma We} \right) \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$t_T = \frac{2}{3\gamma} \frac{R_0^2}{\lambda_2 \text{Nu}}, \quad a_{f0}^2 = \gamma a_{e0}^2 = \frac{\gamma p_0}{\beta_0 \rho_0}, \quad \omega_{ar}^2 = \gamma \omega_{ir}^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_0 R_0^2}, \quad b_0 = \frac{p_0}{\rho_0 a_0^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{k_2}{c_{p2} \rho_{20}}, \quad We = \frac{2p_0 R_0}{\sigma}, \quad E_e = 1 + \frac{8}{3} \frac{1}{We}, \quad E_f = 1 + \frac{43\gamma - 1}{3} \frac{1}{\gamma We}$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, $p' = p/p_0 - 1$ – избыточное давление, штрихи над которым опущены, a_0 – невозмущенная скорость звука в смеси, совпадающая в зависимости от термодинамического поведения газа в пузырьках либо с изотермической a_{e0} , либо с адиабатической a_{f0} скоростью звука, ω_{ir} и ω_{ar} – изотермическая и адиабатическая резонансные частоты Миннаерта, μ и σ – динамическая вязкость и поверхностное натяжение жидкости, ρ – плотность смеси, R – радиус пузырька, β_0 – исходное объемное газосодержание, t_T – время тепловой релаксации, λ_2 и k_2 – температуропроводность и теплопроводность газа, $\gamma = c_{p2}/c_{v2}$ – показатель адиабаты газа, Nu – число Нуссельта, характеризующее интенсивность межфазного теплообмена, We – число Вебера, индекс “0” отнесен к исходному состоянию термодинамического равновесия смеси, а “2” – к теплофизическим параметрам газовой фазы. Уравнение (1.1) является обобщением уравнения Буссинеска [3, 4] на случай учета межфазного теплообмена и поверхностного натяжения. При чисто изотермическом поведении газа время тепловой релаксации бесконечно мало в сравнении с макроскопическим ($t_T/t \rightarrow 0$, $Nu \rightarrow \infty$, $a_0 \equiv a_{e0}$) и в уравнении (1.1) следует удержать лишь левую часть, а при адиабатическом режиме, когда $t_T/t \rightarrow \infty$, $Nu \rightarrow 0$, $a_0 \equiv a_{f0}$, необходимо оставить его правую часть. В обоих предельных режимах межфазный теплообмен отсутствует.

Однако в реальных газожидкостных смесях всегда имеет место необратимый межфазный теплообмен, пусть даже малой интенсивности. Поэтому представляет интерес исследование по распространению волн при термодинамических режимах, ненамного отличающихся от предельных. Квазиадиабатический режим ($t_T/t \gg 1$, $Nu < 1$) достаточно подробно исследован в [6]. Ниже будет рассмотрен квазизотермический режим распространения волны. Принимается, что в уравнении (1.1) главным является волновой оператор левой части, что позволяет полагать

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx -a_{e0} E_e^{1/2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad a_0 \equiv a_{e0} E_e^{1/2}, \quad \frac{b}{\beta_0} = \frac{1}{E_e}$$

Использование такой связи дает возможность факторизовать уравнение (1.1), т.е. получить нелинейное эволюционное уравнение, описывающее распространение волны вдоль положительного направления оси x . Последующий переход к сопутствующей системе координат, связанной с фронтом волны, и ввод новой переменной v

$$x' = x - a_{e0} E_e^{1/2} t, \quad t' = t, \quad v = a_{e0} E_e^{1/2} p$$

позволяет записать эволюционное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - v \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0 \\ \delta = \frac{2 \mu}{3 \rho_0 \beta_0} + \frac{\gamma - 1}{3 \gamma} E_4 \frac{R_0^2 a_{e0}^2}{\lambda_2 Nu}, \quad v = \frac{2}{3 \gamma} E_e \frac{R_0^2 a_{e0}^2}{\lambda_2 Nu} \frac{R_0^2}{6 \beta_0} & \\ \beta = \left(1 + \frac{8 \mu}{3 \gamma \rho_0 \lambda_2 Nu} \right) a_{e0} \frac{R_0^2}{6 \beta_0} E_e^{1/2}, \quad \chi = \frac{2}{3} \frac{E_2 R_0^2 a_{e0}}{E_e^{1/2} \lambda_2 Nu} & \\ E_2 = 1 + \frac{4}{9} \frac{12 \gamma - 5}{\gamma} \frac{1}{We}, \quad E_4 = 1 + \frac{4}{We} & \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь штрихи над координатами опущены, четвертое слагаемое ответственно за подкачку энергии к волне, а последнее – за взаимодействие эффекта гидродинамической нелинейности с межфазным теплообменом. В случае пренебрежения поверхностным натяжением и вторым слагаемым из коэффициента дисперсии уравнение (1.2)

получено в [5], где исследованы структуры ударных волн с монотонным изменением давления. Однако уравнение допускает решение, описывающее распространение ударной волны с немонотонным профилем давления.

2. Преобразование Бэклунда. Метод его нахождения аналогичен [7, 8], где исследовано уравнение (1, 2), однако без последнего слагаемого (формально $\chi = 0$). Искомое решение представляется в виде

$$v(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, t) F^{j-2}(x, t) \quad (2.1)$$

где функции u_j и F подлежат дальнейшему определению. В последующем частные производные от $F(x, t)$ обозначаются через F_t, F_x, F_{xx} и т.д. Подставляя разложение (2.1) в уравнение (1.2) и приравняв нулю коэффициенты при соответствующих степенях F , приходим к рекуррентным соотношениям, из которых определяются функции

$$u_1 = -12 \frac{\nu}{\chi} F_x^2, \quad u_2 = 12 \frac{\nu}{\chi} (a F_x + F_{xx}), \quad a = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{\chi} - \frac{\beta}{\nu} \right) \quad (2.2)$$

$$\chi u_3 = \nu a^2 - 5\nu a / \chi - \delta - 6\nu a F_x^{-1} F_{xx} + 3\nu F_x^{-2} F_{xx}^2 - 4\nu F_x^{-1} F_{xxx} \quad (2.3)$$

Однако функция u_7 , определяемая из приравненной нулю совокупности свободных членов, в силу определения u_1 из соотношения выпадает. Поскольку рекуррентность нарушается, постольку в (2.1) можно полагать $u_j \equiv 0$ для $j \geq 7$, в силу чего из выражений коэффициентов при F^6, F^4 и F^2 будем иметь $u_6 = u_5 = u_4 \equiv 0$. Кроме того, из приравненных нулю коэффициентов при F^{-3}, F^{-2} и F^{-1} следуют уравнения

$$F_t - \left(\frac{\delta}{\chi} + 5 \frac{\nu}{\chi^2} a + \nu a^3 \right) F_x + \nu a (3 F_x^{-1} F_{xx}^2 - 2 F_{xxx}) - \quad (2.4)$$

$$- \nu (F_{xxxx} + 3 F_x^{-2} F_{xx}^3 - 4 F_x^{-1} F_{xx} F_{xxx}) = 0$$

$$- 2 F_{xt} F_x - F_{xx} F_t - a F_x F_t + \left(\delta + 5 \frac{\nu}{\chi} a - \nu a^2 \right) \frac{a}{\chi} F_x^2 + \quad (2.5)$$

$$+ 3 \left(\frac{\delta}{\chi} + 5 \frac{\nu}{\chi^2} a + \nu a^3 \right) F_x F_{xx} + \nu a \left[\left(\frac{9}{\chi} - 12a \right) F_{xx}^2 - \left(\frac{8}{\chi} - 12a \right) F_x F_{xxx} \right] +$$

$$+ \nu \left[\left(\frac{14}{\chi} - 12a \right) F_{xx} F_{xxx} - \left(\frac{\delta}{\chi} - 18a \right) F_x F_{xxx} - \left(\frac{9}{\chi} + 9a \right) F_x^{-1} F_{xx}^3 \right] +$$

$$+ [6 F_x F_x^{(5)} + 3 F_{xx} F_{xxx} + 9 F_x^{-2} F_{xx}^4 - 18 F_{xxx}^2] = 0$$

$$F_{xxt} + a F_{xt} - a \left(\frac{\delta}{\chi} + 5 \frac{\nu}{\chi^2} a - \frac{\nu}{\chi} a^2 \right) F_{xx} -$$

$$- \left(\frac{\delta}{\chi} + 5 \frac{\nu}{\chi^2} a - 6 \frac{\nu}{\chi} a^2 + \nu a^3 \right) F_{xxx} - 6 \frac{\nu}{\chi} a^2 F_x^{-1} F_{xx}^2 +$$

$$+ \nu a \left[\left(\frac{6}{\chi} - 6a \right) F_{xxx} - \left(\frac{10}{\chi} + 6a \right) F_x^{-1} F_{xx} F_{xxx} + \frac{3}{\chi} F_x^{-2} F_{xx}^3 \right] + \quad (2.6)$$

$$+ \nu \left[\left(\frac{1}{\chi} - 6a \right) F_x^{(5)} + \left(\frac{3}{\chi} - 3a \right) F_x^{-2} F_{xx}^2 F_{xxx} - \left(\frac{4}{\chi} - 4a \right) F_x^{-1} F_{xxx}^2 + 6a F_x^{-1} F_{xx} F_{xxx} \right] +$$

$$+ \nu [F_x^{(6)} + 3 F_x^{-2} F_{xxx} - 4 F_x^{-1} F_{xxx} F_{xxx}] = 0$$

Из совокупности свободных членов выясняется, что функция u_3 , определяемая соотношением (2.2), помимо того удовлетворяет еще и уравнению, по виду совпадающему с (1.2), откуда следуют тривиальные решения

$$u_3 = 0, \quad u_3 = \text{const} \quad (2.7)$$

Поскольку $u_j = 0$ при $j \geq 4$, то в соответствии с разложением Лорана (2.1) и формулами (2.2) решение уравнения (1.2) может быть представлено в виде

$$v(x, t) = \frac{12\nu}{5} \left(\frac{1}{\chi} - \frac{\beta}{\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\ln F) + 12 \frac{\nu}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln F) + u_3 \quad (2.8)$$

Формула (2.8) является преобразованием Бэклунда для уравнения (1.2). Полагая $F(x, t) = 1 + \exp(kx - \omega t)$, где постоянные числа ω и k играют роли частоты и волнового числа, подставим функцию F в уравнение (2.4), откуда определится дисперсионное соотношение

$$\omega = \nu a k^3 - \left(\frac{\delta}{\chi} + 5 \frac{\nu}{\chi^3} a + \nu a^3 \right) k \quad (2.9)$$

Аналогичные выкладки над (2.3) и уравнениями (2.5), (2.6) дают после использования (2.9) важные связи

$$a \left(a + \frac{1}{\chi} \right) (k^2 - a^2) = 0, \quad u_3 = \frac{\nu}{\chi} a^2 - 5 \frac{\nu}{\chi^2} a - \frac{\delta}{\chi} - 6 \frac{\nu}{\chi} a k - \frac{\nu}{\chi} k^2 \quad (2.10)$$

Итак, согласно (2.10), возникает необходимость рассмотрения разных законов межфазного теплообмена, вытекающих из связей между коэффициентами уравнения (1.2). Случай $a = 0$ ($\delta = 2\alpha\beta$) для рассматриваемой газожидкостной смеси невыполним в силу определений коэффициентов α , β , δ из (1.2), однако можно показать, что формально с математической точки зрения ему соответствует решение уравнения (1.2), описывающее распространение уединенной волны.

3. Увеличение амплитуды волны давления. Пусть $a = -1/\chi$, откуда следует связь $6\nu = \chi\beta$, из которой определится закон теплообмена

$$\text{Nu} = \frac{8}{36 - \gamma} \frac{E_2 \mu}{E_5 \rho_0 \lambda_2}, \quad E_5 = 1 + \frac{441 - 12\gamma}{9} \frac{1}{6 - \gamma} \frac{1}{\text{We}} \quad (3.1)$$

при этом дисперсионное соотношение (2.9) и величина u_3 примут вид

$$\omega = -\frac{8}{\chi} k^3 + \left(6 \frac{\nu}{\chi^3} - \frac{\delta}{\chi} \right) k, \quad u_3 = -\frac{\nu}{\chi} k^2 + 6 \frac{\nu}{\chi^2} k + 6 \frac{\nu}{\chi^3} - \frac{\delta}{\chi} \quad (3.2)$$

Решение уравнения (1.2), согласно (2.2), запишется в виде

$$v = 12 \frac{\nu}{\chi^2} k \left[\frac{1 + (\chi k + 1) e^\theta}{(1 + e^\theta)^2} - 1 \right] + u_3, \quad \theta = k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) = k \xi \quad (3.3)$$

Подчеркнем, что волновое число k пока не конкретизировано. При $k > 0$ из (3.3) следуют асимптотические значения впереди ($\xi > 0$) и позади $\xi < 0$ фронта волны

$$v(-\infty) = u_3, \quad v(\infty) = -12 \frac{\nu}{\chi^2} k + u_3 \quad (3.4)$$

Поскольку решение (3.3) непрерывным образом соединяет значения (3.4), следовательно, оно описывает структуру ударной волны давления с выполнением соотношения Рэнкина – Гюгонио

$$V = \frac{v(-\infty) + v(+\infty)}{2}, \quad V = \frac{\omega}{k}$$

где V – нелинейный добавок к скорости волны.

Переход к исходным координатам x , t и размерному давлению $p = p_0(1 + p')$ позволяет представить решение (3.3) в виде

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{E_e^{1/2}}{a_{e0}} \left\{ 12 \frac{v}{\chi^2} k \left[\frac{1 + (\chi k + 1)e^\theta}{(1 + e^{\theta/2})^2} - 1 \right] + u_3 \right\} \quad (3.5)$$

Функция (3.5) достигает единственного максимума при значении

$$\xi_* = \frac{1}{k} \ln \frac{\chi k - 1}{\chi k + 1}, \quad \chi k > 1$$

$$\frac{p_{\max}}{p_0} = \frac{p(\xi_*)}{p_0} = 1 + \frac{E_e^{1/2}}{a_{e0}} \left[3 \frac{v}{\chi^3} (\chi k - 1)^2 + u_3 \right] = 1 + \frac{E_e^{1/2}}{a_{e0}} \frac{v}{\chi^3} \left[2(\chi k)^2 + 9 - \frac{\chi^2}{v} \delta \right] \quad (3.6)$$

Для описания изменения размерного радиуса $R = R_0(1 + R')$, где R' – его избыточное значение, в силу известной [3, 4] связи между возмущениями $R' = -p'/3$ из (3.3) можно получить формулу, определяющую минимальный размер, до которого может сжаться пузырек

$$\frac{R_{\min}}{R_0} = \frac{R(\xi_*)}{R_0} = 1 - \frac{1}{3} \frac{E_e^{1/2}}{a_{e0}} \left[3 \frac{v}{\chi^3} (\chi k - 1)^2 + u_3 \right] \quad (3.7)$$

Аналогично [1, 2, 6], введем в рассмотрение коэффициенты увеличения f_1 и сжатия f_2 амплитуды волны

$$f_1 = \frac{p_{\max} - p_0}{p(-\infty) - p_0} = 1 + \frac{3(\chi k - 1)^2}{-\chi^2 k^2 + 6\chi k + 6 - \chi^2 \delta / v}, \quad f_2 = \frac{p_{\max}}{p(-\infty)}$$

Функция f_1 достигает единственного максимума при значении волнового числа

$$k_* = \frac{1}{2\chi} \left(\frac{\chi^2}{v} \delta - 9 \right), \quad f_{1\max} = \frac{2\chi k_*}{3 - \chi k_*} = 2 \left(\frac{\chi^2}{v} \delta - 9 \right) \left(15 - \frac{\chi^2}{v} \delta \right)^{-1} \quad (3.8)$$

В случае усиления, когда $f_1 > 1$, требования вещественности точки экстремума ξ_* и волнового числа k накладывают на значения числа Вебера и параметр χk ограничения

$$11 < \frac{\chi^2}{v} \delta = \gamma(6 - \gamma) \frac{E_2 E_5}{E_e^2} + \frac{3(\gamma - 1)(6 - \gamma)^2 E_4 E_5^2 p_0 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2}{64 E_e^2 p_0 (\mu)} \text{We}^2 < 15 \quad (3.9)$$

$$\chi k_2 < \chi k < \chi k_1, \quad \chi k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{15 - \chi^2 \delta / v}$$

В табл. 1 при $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 293$ К, $\beta_0 = 0.05$ для смесей воды и этанола C_2H_5OH с пузырьками углекислого газа CO_2 и воздуха приведены области допустимых значений числа We и параметра $\chi^2 \delta / v$, рассчитанные по формулам (3.9). С увеличением по-

Таблица 1

| Состав смеси | σ/μ , м/с | We | $\chi^2\delta/\nu$ |
|--|--------------------|------------------|--------------------|
| H ₂ O + CO ₂ | 73 | (0.0708, 0.1189] | (11; 13.5204] |
| H ₂ O + воздух | 73 | (0.0492, 0.0677] | (11; 12.3196] |
| C ₂ H ₅ OH + CO ₂ | 19 | (1.0682, 1.2794] | (11; 11.9549] |
| C ₂ H ₅ OH + воздух | 19 | (0.7797, 1.16] | (11; 13.0399] |

казателя адиабаты γ малые значения We еще более уменьшаются, а с уменьшением поверхностного натяжения σ , наоборот, увеличиваются. Малость чисел Вебера свидетельствует о мелких пузырьках, которые могут быть растворены в жидкости.

Проявление эффекта усиления обусловлено существованием интервалов (3.9) и связью (3.8). Однако для обеспечения внутренней непротиворечивости задачи обратимся к физическим соображениям. Потребуем выполнение условия $R_{\min}/R_0 \geq 0.1$, означающего, что возмущение поверхности пузырька при сжатии полагается малым, пока его радиус уменьшается не более чем на порядок в сравнении с исходным [3, 4]. Тогда, согласно (3.7) и (3.8), будем иметь

$$\chi k_2 < \chi k \leq G_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{81\gamma(6-\gamma)^2 E_2 E_5^2 \rho_0 (\frac{\sigma}{\mu})^2}{E_e^3 \rho_0 (\frac{\sigma}{\mu})^2} We^2 \right]^{1/2} \quad (3.10)$$

С другой стороны, из требования распространения волны вдоль положительного направления оси x , т.е. $D = a_{e0} E_e^{1/2} + V > 0$, получим

$$\chi k_2 < \chi k < G_2 = -1 + \left[\frac{3\gamma(6-\gamma)^2 E_2 E_5^2 \rho_0 (\frac{\sigma}{\mu})^2}{E_e^2 \rho_0 (\frac{\sigma}{\mu})^2} We^2 - 2 \right]^{1/2} \quad (3.11)$$

Диапазон допустимых значений числа Вебера, при котором происходит усиление амплитуды волны, определяется как пересечение множеств (3.9)–(3.11). В частности, для воды и этанола (этилового спирта C₂H₅OH) с пузырьками CO₂ и воздуха таковым является диапазон

$$\chi k_2 < \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\nu} \delta - \frac{9}{2} \leq G_1(We), \quad G_1 < \chi k_1 < G_2(We)$$

Его числовые характеристики для указанных смесей приведены в табл. 1. Для значений We вне диапазона или усиление отсутствует, или нарушается правая часть требования (3.10). Напомним, что связь между числом Вебера и параметром $\chi^2\delta/\nu$ определяется формулой из (3.9). Варьируя исходным радиусом R_0 или We в рамках диапазонов допустимых значений, можно добиться увеличения или уменьшения коэффициента f_1 , т.е. управлять эффектом увеличения.

Зависимости частоты ω и скорости волны D от теплофизических свойств смеси при реализации закона теплообмена (3.1) и максимальном увеличении амплитуды предстанут в виде

$$|\omega| = \frac{1}{3\gamma} \frac{\rho_0}{\sigma} \left(\frac{4}{6-\gamma} \frac{E_e \rho_0 \mu}{E_5 \rho_0 \sigma} \frac{1}{We} \right)^3 \frac{g}{E_2 We} \left(\frac{\chi^2}{\nu} \delta - 9 \right)$$

$$\frac{D}{a_{e0} E_e^{1/2}} = 1 - \frac{1}{6\gamma} \frac{g \rho_0}{E_2 \rho_0} \left(\frac{4}{6-\gamma} \frac{E_e \mu}{E_5 \sigma} \frac{1}{We} \right)^2, \quad g = \left(\frac{\chi^2}{\nu} \delta \right)^2 - 14 \frac{\chi^2}{\nu} \delta + 57$$

Таблица 2

| We | $\chi^2\delta/\nu$ | $\omega, 10^8 \text{ 1/c}$ | $l, 10^{-6} \text{ м}$ | $D, \text{ м/с}$ |
|--|--------------------|----------------------------|------------------------|------------------|
| $\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2, \sigma/\mu = 73 \text{ м/с}$ | | | | |
| 0.1189 | 13.5208 | 3.0256 | 4.395 | 167.3 |
| 0.0984 | 12.4373 | 3.0413 | 5.196 | 187.2 |
| 0.0708 | 11.0004 | 3.0685 | 7.453 | 226.4 |
| $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + \text{CO}_2, \sigma/\mu = 19 \text{ м/с}$ | | | | |
| 1.2794 | 11.9602 | 0.1989 | 2.795 | 64.4 |
| 1.16 | 11.4075 | 0.1883 | 3.118 | 67.4 |
| 1.0682 | 11.0002 | 0.1798 | 3.467 | 69.8 |
| $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + \text{воздух}, \sigma/\mu = 19 \text{ м/с}$ | | | | |
| 1.16 | 13.0402 | 0.5232 | 1.779 | 64.5 |
| 1.0682 | 12.5159 | 0.5169 | 1.887 | 68.7 |
| 0.78 | 11.0015 | 0.5147 | 2.491 | 78.3 |

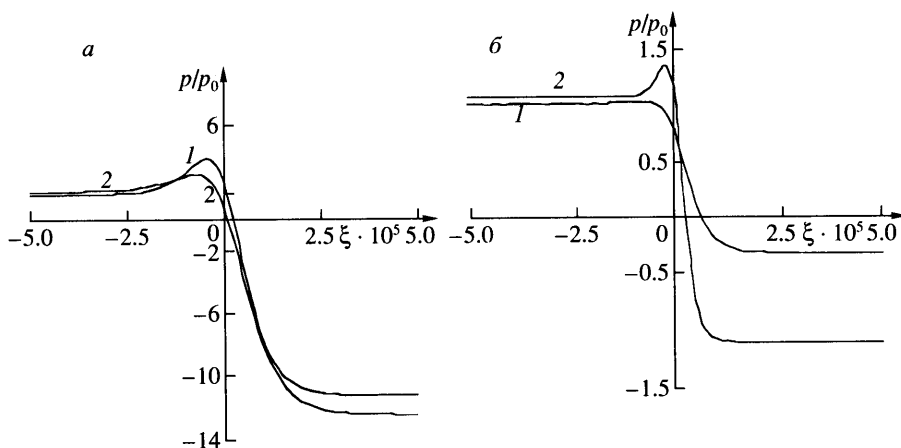
что позволяет выявить механизм формирования скорости. С уменьшением допустимого радиуса R_0 или числа We влияния нелинейностей и межфазного теплообмена убывают. Доминирующей составляющей является невозмущенная скорость звука $a_0 = a_{e0} E_e^{1/2}$, в которой при значениях $We \ll 4(41 - 12\gamma)/9(6 - \gamma)$ главный эффект – поверхностное натяжение. В смеси $\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$ в диапазонах допустимых значений скорости меняется от значения $D = 167.3 \text{ м/с}$ ($We = 0.1189$; $\chi^2\delta/\nu = 13.5208$) до $D = 226.4 \text{ м/с}$, ($We = 0.07081$; $\chi^2\delta/\nu = 11.004$) в то время как в экспериментах [1, 2] получен диапазон $240 \text{ м/с} \leq D \leq 570 \text{ м/с}$, что свидетельствует о близости термодинамического режима газа к адиабатическому [6].

Ширина волны вычисляется по формуле

$$l = \frac{1}{\chi} = \frac{6 - \gamma \mu}{8 \rho_0} a_{e0} \left(\frac{\rho_0 \sigma}{\rho_0 \mu} \right)^2 \frac{E_5}{E_e^{1/2}} We^2 \left(\frac{\chi^2 \delta}{\nu} - 9 \right)^{-1}$$

В табл. 2 в соответствии с полученными формулами при $p_0 = 0.1 \text{ МПа}$, $T_0 = 293 \text{ К}$, $\beta_0 = 0.05$ приведены некоторые числовые характеристики волны, претерпевающей максимальное увеличение амплитуды в различных смесях. С уменьшением исходного радиуса пузырька R_0 (или We) частота ω , ширина l и скорость волны D увеличиваются. В смесях с одинаковыми по исходным размерам пузырьками (этанол $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$), но разными газами при переходе от CO_2 к воздуху, т.е. с увеличением γ значение скорости D уменьшается.

На фигуре при $p_0 = 0.1 \text{ МПа}$, $T_0 = 293 \text{ К}$, $\beta_0 = 0.05$ представлены профили давления ударных волн, вычисленные по решению (3.5). Фигура a иллюстрирует влияние величины числа We (или R_0) на амплитуду волны в смеси воды с пузырьками CO_2 . С переходом от пузырька наибольшего допустимого радиуса (кривая 1 – $R_0 = 4.34 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, $We = 0.1189$) к меньшему (кривая 2 – $R_0 = 3.59 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, $We = 0.0984$) амплитуда волны уменьшается, при этом $f_1 = 6.11$, $f_2 = 2.56$ для кривой 1 и $f_1 = 2.46$, $f_2 = 1.65$ для кривой 2. Та же закономерность отмечена в [6] при исследовании квазиадиабатического режима увеличения амплитуды. В экспериментах [1, 2], где впервые наблюдались эффекты усиления, получены значения $f_1 = 12$ и $f_2 = 5$; сильно разнящиеся от значений f_1 и f_2 кривой 1, которая соответствует квазиизотермическому поведению газа в пузырьках. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных вновь приводит к выво-



Профили давления в ударных волнах в смесях: а – воды с пузырьками CO_2 при $We = 0.1189$ и $We = 0.0984$ (кривые 1, 2); б – этанола ($R_0 = 1.32 \cdot 10^{-7}$ м, $We = 1.16$) с пузырьками CO_2 и воздуха (кривые 1, 2)

ду, что в [1, 2] термодинамический режим газа CO_2 близок к адиабатическому. Влияние показателя адиабаты γ , иллюстрируется фиг. 6, где рассмотрены смеси этанола $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ с идентичными по размеру ($R_0 = 1.32 \cdot 10^{-7}$ м, $We = 1.16$) пузырьками углекислого газа (кривая 1) и воздуха (кривая 2). С переходом от CO_2 к воздуху, т.е. возрастанием γ , амплитуда волны увеличивается, при этом $f_1 = 1.34, f_2 = 1.01$ для кривой 1 и $f_1 = 4.12, f_2 = 1.26$ для кривой 2. Аналогичная закономерность получена в [6], что, по всей видимости, присуще любым газожидкостным смесям.

Заключение. В жидкости с растворенными пузырьками газа, термодинамическое поведение которого близко к изотермическому, может иметь место межфазный теплообмен малой интенсивности. В описываемом волновой процесс эволюционном уравнении его учет приводит к появлению дополнительной нелинейности. В зависимости от закона теплообмена, реализующегося в смеси, она вкуче с основной гидродинамической нелинейностью может, пусть и кратковременно, в несколько раз увеличить амплитуду волны.

Существуют диапазоны допустимых исходных радиусов пузырьков и волновых чисел, при которых имеет место значительное увеличение амплитуды волны. Их числовые характеристики для смесей воды и этанола с пузырьками воздуха и углекислого газа конкретизированы при $p_0 = 0.1$ МПа, $T_0 = 293$ К, $\beta_0 = 0.05$ и реализации закона теплообмена, определяемого из связи $b\nu = \chi\beta$ между теплофизическими параметрами смеси. Вариацией значения исходного радиуса в пределах этого диапазона можно управлять эффектом усиления. С уменьшением размера пузырьков скорость волны увеличивается, при этом влияния нелинейностей и теплообмена на механизм ее формирования убывают.

Сравнение численных результатов с данными экспериментов [1, 2] приводит к выводу, что при наблюдаемом в [1, 2] усилении волны термодинамическое поведение газа в растворенных в воде пузырьках более близко к адиабатическому, чем изотермическому.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд Б.Е., Степанов В.В., Тимофеев Е.И., Цыганов С.А. Усиление ударных волн в неравновесной системе жидкость – пузырьки растворяющегося газа // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 1. С. 71–73.

2. Борисов А.А., Гельфанд Б.Е., Нигматулин Р.И., Рахматулин Х.А., Тимофеев Е.И. Усиление ударных волн в жидкостях с пузырьками пара и растворяющегося газа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 3. С. 594–598.
3. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
5. Оганян Г.Г. О влиянии межфазного теплообмена на нелинейное распространение волн в газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 74–84.
6. Оганян Г.Г. Влияние межфазного теплообмена и поверхностного натяжения в газожидкостной смеси на распространение нелинейных волн // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 72–82.
7. Кудряшов Н.А. Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. № 3. С. 465–470.
8. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equation // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 3. P. 522–526.

Ереван

Поступила в редакцию
22.XII.2003