

УДК 532.529

© 2004 г. Р. АХУДЖА, А. Б. БЕЛОНОЖКО, Б. ЙОХАНССОН, А. Н. ОСИПЦОВ

ИНЕРЦИОННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ФАЗ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В гидродинамическом приближении рассматривается процесс центрифугирования инородных включений (частиц) во вращающемся сферическом объеме самогравитирующей среды. С использованием полного лагранжева похода исследованы траектории и радиальные профили концентрации частиц при твердотельном распределении скоростей в несущей фазе. Рассмотрены континуальный и свободномолекулярный режимы обтекания частиц, а также случаи “тяжелой” (превосходящей по плотности несущую фазу и движущейся к центру) и “легкой” (всплывающей к периферии) примеси. Найдены аналитические и численные решения, соответствующие стационарным сферически симметричным граничным условиям для дисперсной фазы. Показано, что наличие вращения может приводить к значительной угловой анизотропии радиальных распределений концентрации включений, в частности к формированию кольцевых зон аккумуляции “тяжелых” включений в экваториальной плоскости. Полученные решения могут быть использованы для объяснения механизмов возникновения плотностных неоднородностей в ядрах планет, для описания формирования планетных систем из газопылевых облаков, а также поведения аэрозольных частиц в вихревых атмосферных образованиях.

Ключевые слова: вращающиеся потоки, частицы, центрифугирование, плотностная анизотропия, полный лагранжев метод.

Проблема инерционного разделения фаз во вращающихся объемах сплошной среды при наличии центрального поля массовых сил возникает в различных приложениях, например при описании формирования планет из протопланетных образований, поведения космического мусора на околоземной орбите, распределения аэрозольных частиц в атмосферных вихрях и др. Последнее время активно обсуждается проблема возникновения плотностной анизотропии земного ядра, обнаруженной с помощью акустических измерений [1, 2]. В научной литературе предложены различные возможные механизмы возникновения анизотропии: твердофазная конвекция, направленная кристаллизация в присутствии магнитного поля и др. (см. обзор [3]). В некоторых публикациях (например, [4]) анизотропия объясняется наличием в земном ядре инородных включений, попавших в ядро на ранних (жидкофазных) стадиях формирования планеты.

Настоящая работа, не претендующая на полное описание формирования плотностных неоднородностей в ядрах планет, посвящена отдельному аспекту данного процесса – влиянию вращения на возникновение анизотропии радиальных распределений концентрации инородных включений. В работе предложена и исследована двухконтинуальная гидродинамическая модель инерционного разделения фаз во вращающемся сферическом объеме самогравитирующей вязкой среды с инородными включениями. Анализ модели позволяет определить условия, при которых наличие вращения (при стационарных сферически симметричных граничных условиях для дисперсных включений) является достаточной причиной значительной анизотропии радиальных распределений концентрации включений, а следовательно, и радиальных профилей суммарной плотности среды. Формулировка и анализ гидродинамической модели даны в достаточно общем виде, пригодном для описания различных явлений, в том числе формирования плотностных неоднородностей в ядрах жидких планет, разделения фаз

в протопланетных газопылевых облаках, возникновения пылевых структур в вихревых атмосферных образованиях и др.

1. Постановка задачи для “тяжелых” включений. В неподвижной декартовой системе координат x, y, z рассматривается сферический объем самогравитирующей жидкой или газообразной вязкой среды радиуса R , который в общем случае является центральной частью большего объема, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . Центр объема совпадает с началом координат, а ось вращения – с осью z . Плотность среды ρ считается постоянной, а вязкость μ в общем случае предполагается известной функцией координат.

На внешней границе рассматриваемого объема (при $r = R$) задан постоянный сферически симметричный поток инородных включений $q = n_{s0}v_{r0}$ (здесь n_{s0} – числовая концентрация, а v_{sr} – радиальная скорость частиц на границе), плотность вещества которых $\rho_s \geq \rho$. Предполагается, что частицы – одинаковые сферы радиуса σ и массы m , их объемная концентрация мала, столкновения и хаотическое движение отсутствуют. В этих предположениях среда частиц моделируется континуумом, лишенным собственных напряжений [5]. Массовая концентрация частиц также считается малой, и их влиянием на параметры несущей среды пренебрегается. Задание при $r = R$ постоянного расхода частиц может моделировать процесс конденсации на зародышах, сферически симметрично распределенных на периферии вращающегося объема.

Предполагается, что на рассматриваемых масштабах времени конвекцией в несущей фазе можно пренебречь, тогда поле скоростей соответствует твердотельному вращению

$$\mathbf{V} = \omega[\mathbf{k} \times \mathbf{r}] = -y\omega\mathbf{i} + x\omega\mathbf{j}$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор рассматриваемой точки, а \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k} – единичные векторы осей x, y и z соответственно. Распределение давления находится интегрированием уравнения импульса

$$\nabla p = \rho\omega^2 \mathbf{r}_1 - \frac{GM(r)}{r^3} \rho \mathbf{r} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{r}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, G – гравитационная постоянная, $M(r)$ – масса несущей фазы в шаре радиуса r . Решение (1.1) имеет вид

$$p = p_e + \frac{2G\pi\rho^2}{3}(R^2 - r^2) - \frac{\rho\omega^2 r_1^2}{2}(R^2 - r_1^2) \quad (1.2)$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2, \quad r^2 = r_1^2 + z^2$$

Здесь p_e – давление на экваторе на внешней границе рассматриваемого объема ($r_1 = R$). Распределение давления при твердотельном вращении не обладает сферической симметрией.

Важный более общий случай неоднородного распределения плотности среды соответствует наличию твердого сферического ядра радиуса R_c с плотностью $\rho_c > \rho$. В этом случае

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 + M_0, \quad M_0 = \frac{4}{3}\pi(\rho_c - \rho)R_c^3$$

и при $r > R_c$ в правую часть формулы (1.2) следует добавить член

$$G\rho M_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

Для описания дисперсной фазы используем полный лагранжев подход [6]. Для континуума, моделирующего дисперсную фазу, уравнения неразрывности и импульса в лагранжевой форме имеют вид

$$n_s(t, \mathbf{r}_0) |J|(t, \mathbf{r}_0) = n_s(0, \mathbf{r}_0) \quad (1.3)$$

$$m \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_s, \quad \mathbf{F}_g = -\frac{GM(r)m\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{F}_g – сила гравитации; \mathbf{F}_s – сила гидродинамического взаимодействия с несущей фазой; скорость и концентрация частиц являются функциями t (времени движения лагранжевой частицы вдоль траектории от поверхности сферы радиуса R) и лагранжевых координат (в качестве которых приняты начальные (при $t = 0$) декартовы координаты рассматриваемой частицы $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ на поверхности сферы $r = R$); $|J|$ – якобиан преобразования от эйлеровых к лагранжевым переменным с компонентами $J_{ij} = \partial x_i / \partial x_{0j}$ (здесь индексы i и j обозначают координаты x, y, z и x_0, y_0, z_0 соответственно).

Выражение для силы гидродинамической природы существенно зависит от условий обтекания отдельной частицы. Рассмотрим два предельных случая: а) континуальное обтекание при малых числах Рейнольдса и небольших различиях плотностей фаз, б) обтекание в свободномолекулярном режиме при больших различиях плотностей фаз. Первый случай может реализовываться при сепарации включений в сильновязкой жидкой планете, а второй характерен для условий образования планет из протопланетных облаков. В первом случае сила \mathbf{F}_s может быть приближенно представлена в виде суммы [7, 8]

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{f}_{St} + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_{BB}$$

$$\mathbf{f}_{St} = 6\pi\sigma(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)$$

$$\mathbf{f}_A = \rho\tau_s \left(\mathbf{W} + \frac{GM(r)}{r^3} \mathbf{r} \right), \quad \mathbf{f}_m = \frac{1}{2} \rho\tau_s \left(\dot{\mathbf{W}} - \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} \right)$$

Здесь индекс s относится к параметрам частиц, τ_s – объем частицы, \mathbf{f}_A – сила Архимеда, \mathbf{f}_m – сила присоединенных масс, \mathbf{f}_{BB} – сила Бассе – Буссинеска, учитывающая предысторию обтекания частицы, \mathbf{W} – ускорение несущей фазы в точке с текущими координатами рассматриваемой частицы. Следует отметить, что выражение для силы Бассе – Буссинеска [7] было получено при довольно жестких ограничениях на характер движения частицы, а существующие оценки (см., например, [9]) показывают, что в большинстве случаев влияние этой силы на движение частиц несущественно, поэтому ниже для простоты данной силой будем пренебрегать.

В случае обтекания частицы в свободномолекулярном режиме при больших отношениях плотностей дисперсной и несущей фазы в межфазном взаимодействии следует учитывать лишь силу сопротивления, которая при зеркальном законе отражения молекул от поверхности частицы имеет вид [10]

$$\mathbf{F}_s = 1/2 C_d(S) \pi \rho \sigma^2 |\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|^2$$

$$C_d(S) = \frac{4S^4 + 4S^2 - 1}{2S^4} \operatorname{erf}(S) + \frac{2S^2 + 1}{\sqrt{\pi} S^3} \exp(-S^2)$$

$$S = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} M_s, \quad \operatorname{erf}(S) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^S \exp(-t^2) dt, \quad M_s = \frac{|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{a}$$

Здесь M_s – число Маха обтекания частицы, a – местная скорость звука несущей фазы, γ – показатель адиабаты несущей фазы.

Для дальнейшего рассмотрения перейдем в неинерциальную систему отсчета, вращающуюся вместе с жидким объемом. В этой системе скорость несущей фазы равна нулю, а скорость V_{sr} и ускорение W_{sr} частиц связаны со скоростью и ускорением в абсолютной системе координат формулами

$$V_{sr} = V_s - \omega[\mathbf{k} \times \mathbf{r}]$$

$$W_{sr} = W_s + \omega^2 \mathbf{r}_1 - 2\omega[\mathbf{k} \times V_{sr}], \quad \mathbf{r}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Здесь \mathbf{k} – единичный вектор оси z . Введем безразмерные переменные, используя в качестве масштабов при обезразмеривании: R – для координат; ωR – для скорости; ω^{-1} – для времени; n_{s0} (концентрация частиц при $r = R$) – для концентрации частиц. В случае континуального обтекания частиц при малых числах Рейнольдса безразмерное уравнение импульса во вращающейся системе координат принимает вид (звездочкой отмечаем безразмерные переменные; индекс r , обозначающий относительную скорость, здесь и далее опущен)

$$\frac{\partial V_s^*}{\partial t^*} = -\beta V_s^* + \delta(\mathbf{r}_1^* - \alpha \mathbf{r}^*) - 2[\mathbf{k} \times V_s^*] \quad (1.5)$$

$$\beta = \frac{9\mu}{\sigma^2 \omega (2\rho_s + \rho)}, \quad \alpha = \frac{4\pi G \rho}{3\omega^2}, \quad \delta = \frac{2(\rho_s - \rho)}{2\rho_s + \rho}$$

В случае обтекания тяжелых включений в свободномолекулярном режиме можно положить $\delta = 1$, а выражение для параметра инерционности частиц принимает вид

$$\beta = \beta_1 S C_d(S), \quad \beta_1 = \frac{3\rho}{8\rho_s} \frac{\sqrt{2R_g T}}{\sigma \omega}, \quad S = A|V_s|, \quad A = \frac{\omega R}{\sqrt{2R_g T}}$$

Здесь T – температура несущей фазы, а R_g – газовая постоянная. Видно, что в данном случае вместо β появляются два новых параметра подобия: β_1 и A .

В обоих рассмотренных режимах обтекания включений при наличии твердого тела в центре объема в выражение для α следует добавить слагаемое κ/r^3 , где $\kappa = (GM_0)/(R^3 \omega^2)$.

Из уравнения (1.5) видно, что при $\delta > 0$ частицы будут двигаться по направлению z оси вращения и экваториальной плоскости, когда $\alpha > 1$. При $\alpha < 1$ включения приближаются к экваториальной плоскости, одновременно удаляясь от оси вращения. Во вращающейся системе координат уравнение неразрывности (1.3) переписывается в безразмерном виде

$$n_s^*(t^*, \mathbf{r}_0^*) |J|(t^*, \mathbf{r}_0^*) = 1 \quad (1.6)$$

Здесь под координатами понимаем безразмерные координаты декартовой системы, вращающейся вместе с объемом, компоненты якобиана J суть $J_{ij} = \partial x_i^* / \partial x_j^*$. В проекциях на оси координат этой системы при фиксированных x_0^* , y_0^* , z_0^* из уравнения (1.5) получаем систему

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = u_s^*, \quad \frac{dy_s^*}{dt^*} = v_s^*, \quad \frac{dz_s^*}{dt^*} = w_s^*$$

$$\frac{du_s^*}{dt^*} = -\beta u_s^* - cx^* + 2v_s^*, \quad \frac{dv_s^*}{dt^*} = -\beta v_s^* - cy^* - 2u_s^* \quad (1.7)$$

$$\frac{dw_s^*}{dt^*} = -\beta w_s^* - az^*, \quad a = \alpha \delta, \quad c = \delta(\alpha - 1)$$

Данная система описывает относительное движение сферических включений, инерционные свойства которых отличны от свойств несущей фазы. В случае равенства плотностей фаз $\delta = a = c = 0$ и проскальзывание фаз отсутствует: $\mathbf{V}_s = 0$.

В общем случае переменных параметров переноса несущей фазы (например, когда μ зависит от температуры, которая в свою очередь является функцией координат) либо при свободномолекулярном режиме обтекания частиц параметр β не является константой. Учет присутствия твердого ядра в центре вращающегося объема, изменения размера частиц вследствие фазовых переходов либо изменения плотности частиц в процессе движения приведет к переменности параметров a и c , которые в дальнейшем для простоты считаются либо известными функциями r , либо константами.

В соответствии с полным лагранжевым методом [6] выведем дифференциальные уравнения для компонент якобиана J_{ij} , для чего продифференцируем уравнения (1.7) по лагранжевым координатам. В результате получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{ij}}{dt^*} &= \Lambda_{ij}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3 \\ \frac{d\Lambda_{1j}}{dt^*} &= -\beta\Lambda_{1j} - cJ_{1j} + 2\Lambda_{2j} - u_s^* \frac{\partial\beta}{\partial x_{0j}^*} - x^* \frac{\partial c}{\partial x_{0j}^*}, \quad j = 1, 2, 3 \\ \frac{d\Lambda_{2j}}{dt^*} &= -\beta\Lambda_{2j} - cJ_{2j} - 2\Lambda_{1j} - v_s^* \frac{\partial\beta}{\partial x_{0j}^*} - y^* \frac{\partial c}{\partial x_{0j}^*}, \quad j = 1, 2, 3 \\ \frac{d\Lambda_{3j}}{dt^*} &= -\beta\Lambda_{3j} - aJ_{3j} - w_s^* \frac{\partial\beta}{\partial x_{0j}^*} - z^* \frac{\partial a}{\partial x_{0j}^*}, \quad j = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial}{\partial x_{0j}^*} &= \sum_{i=1}^3 J_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Замкнутая система уравнений (1.6)–(1.8) позволяет рассчитывать все параметры дисперсной фазы (включая концентрацию) вдоль выбранных траекторий частиц. Используемый полный лагранжев подход – это вариант метода характеристик, реализованный в лагранжевых координатах. Необходимые начальные условия при $t^* = 0$ сформулируем на периферии рассматриваемого объема. В простейшем случае, когда начальные условия для параметров частиц сферически симметричны, а начальная скорость частиц пренебрежимо мала, имеем

$$\begin{aligned} t^* = 0: \quad x^* &= x_0^*, \quad y^* = y_0^* \\ z_0^* &= \sqrt{1 - x_0^{*2} - y_0^{*2}}, \quad u_s^* = v_s^* = w_s^* = 0 \\ J_{ii} &= 1, \quad J_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \\ \Lambda_{ij} &= 0, \quad n_s^* = 1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь x_0^* , y_0^* , z_0^* – координаты начала выбранной траектории частиц на поверхности сферического объема. Если граничные условия для частиц при $r^* = 1$ не зависят от времени, решение сформулированной выше задачи можно рассматривать как параметрическую форму представления стационарных полей $\mathbf{V}_s(x^*, y^*)$ и $n_s^*(x^*, y^*)$.

2. Аналитическое решение при постоянных параметрах a , c , β . При постоянных коэффициентах системы (1.7) ее решение может быть найдено аналитически. Хотя это реше-

шение довольно громоздко, оно оказывается полезным для исследования предельных ситуаций и анализа численных расчетов, проведенных для случая переменных коэффициентов. В данном разделе для простоты звездочка, обозначающая безразмерные переменные, опущена.

Третье и последнее из уравнений (1.7) сводятся к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \beta \frac{dz}{dt} + az = 0 \quad (2.1)$$

которое может быть решено независимо от остальных уравнений. Корни характеристического уравнения (2.1) таковы:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a}$$

Решение (2.1) с начальными условиями $z(0) = z_0$; $\dot{z}(0) = w_s(0) = 0$ имеет различный вид в зависимости от значения дискриминанта $B = a - \beta^2/4$:

$B < 0$:

$$z(t, z_0) = \frac{z_0}{2} \left[\frac{A+1}{A} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta(1-A)t\right] + \frac{A-1}{A} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta(1+A)t\right] \right]$$

$$w_s(t, z_0) = -\frac{z_0\beta}{4} \left[\frac{1-A^2}{A} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta(1-A)t\right] - \frac{1-A^2}{A} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta(1+A)t\right] \right]$$

$$A = \sqrt{1 - \frac{4a}{\beta^2}}$$

$B = 0$:

$$z(t, z_0) = z_0 \left(1 + \frac{\beta t}{2} \right) \exp\left(-\frac{1}{2}\beta t\right)$$

$$w_s(t, z_0) = -\frac{\beta^2 z_0 t}{4} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta t\right)$$

$B > 0$:

$$z(t, z_0) = z_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\beta t\right) \left(\cos(\sqrt{B}t) + \frac{\beta}{2\sqrt{B}} \sin(\sqrt{B}t) \right)$$

$$w_s(z_0, t) = z_0 \left(\sqrt{B} - \frac{\beta^2}{4\sqrt{B}} \right) \exp\left(-\frac{1}{2}\beta t\right) \sin(\sqrt{B}t)$$

Для нахождения $x(t)$ и $y(t)$ введем комплексную переменную $\zeta = x + iy$. Из первого, второго, четвертого и пятого уравнений (1.7) можно получить комплексное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + (\beta + 2i) \frac{d\zeta}{dt} + c\zeta = 0 \quad (2.2)$$

Корни его характеристического уравнения таковы

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(\beta + 2i)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\beta + 2i)^2}{4} - c} = p_{1,2} + iq_{1,2}$$

$$p_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \left(\frac{C + (C^2 + \beta^2)^{1/2}}{2}\right)^{1/2}, \quad q_{1,2} = -1 \pm \left(\frac{-C + (C^2 + \beta^2)^{1/2}}{2}\right)^{1/2}$$

$$C = \beta^2/4 - c - 1$$

Комплексное решение (2.2) имеет вид

$$\zeta(t) = \frac{\lambda_2(x_0 + iy_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_1 t) + \frac{\lambda_1(x_0 + iy_0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(\lambda_2 t)$$

Выделяя действительную и мнимую части, получаем

$$x = \exp(p_1 t)(c_{11} \cos(q_1 t) - c_{12} \sin(q_1 t)) + \exp(p_2 t)(c_{21} \cos(q_2 t) - c_{22} \sin(q_2 t))$$

$$y = \exp(p_1 t)(c_{11} \sin(q_1 t) + c_{12} \cos(q_1 t)) + \exp(p_2 t)(c_{21} \sin(q_2 t) + c_{22} \cos(q_2 t))$$

$$c_{11} = \frac{\Phi(q_1 y_0 - p_2 x_0) - \Psi(p_1 y_0 + q_2 x_0)}{\Phi^2 + \Psi^2}; \quad c_{22} = \frac{\Phi(p_1 y_0 + q_2 x_0) + \Psi(q_1 y_0 - p_2 x_0)}{\Phi^2 + \Psi^2}$$

$$c_{12} = y_0 - c_{22}, \quad c_{21} = x_0 - c_{11}, \quad \Phi = p_1 - p_2, \quad \Psi = q_1 - q_2$$

Выражения для u_s , v_s и компонент якобиана J_{ij} находятся дифференцированием выражений для $x(t)$ и $y(t)$ по времени и лагранжевым координатам.

3. Анализ аналитического и численного решений. В данном разделе приведем результаты параметрического исследования аналитического решения, полученного выше, и некоторые результаты численных расчетов для случая переменных коэффициентов в уравнениях (1.6)–(1.8).

Для анализа возможного диапазона изменения определяющих параметров задачи в таблице приведены значения β , a , и c для различных отношений плотностей фаз при

$$\rho = 1.2 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3, \quad \omega = 7.26 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}),$$

$$\mu = 10^7 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с}), \quad \sigma = 10^3 \text{ м}.$$

ρ/ρ_s	δ	a	c	β
0.5	0.40	254.42	254.02	20.66
0.75	0.18	115.63	115.45	28.17
0.85	0.13	88.73	88.59	30.81
0.99	0.0066	4.25	4.24	34.20
1.01	-0.0066	-4.22	-4.21	34.66
1.15	-0.35	-224.46	-224.11	37.71
2	-0.5	-318.03	-317.53	51.65
1000	-1.994	-1268.30	-1266.30	103.10

Параметр инерционности частиц β , который пропорционален μ и обратно пропорционален σ^2 , может варьироваться в очень широких пределах.

Из анализа аналитического решения и численных расчетов следует, что при $c > 0$ малоинерционные включения, для которых $\beta \gg 1$, движутся от периферии к центру объема практически по радиальным направлениям. Концентрация таких частиц n_s^* монотонно увеличивается с уменьшением r^* и практически одинакова как в экваториальной плоскости, так и на оси вращения.

Аналитическое решение при постоянных β , a и c показывает, что поля траекторий частиц качественно различаются при $\beta^2 \geq 4a$ и $\beta^2 < 4a$. Во втором случае частицы достигают центра объема за конечное время, в то время как в первом случае это время бесконечно.

При $\beta^2 > 4a$ для достаточно больших значений β можно аналитически оценить возникающую анизотропию радиальных распределений концентрации частиц. Асимптотические решения для траекторий частиц в этом случае имеют вид

$$x^*(r_0^*, t^*) = x_0^* \exp(-ct^*/\beta), \quad y^*(r_0^*, t^*) = x_0^* \exp(-ct^*/\beta)$$

$$z^*(r_0^*, t^*) = z_0^* \exp(-at^*/\beta)$$

Из уравнения неразрывности, исключая t^* , находим радиальные распределения концентрации частиц на оси вращения n_s^{*ax} и в экваториальной плоскости n_s^{*eq}

$$n_s^{*ax} = (r^*)^{-3+2b/a}, \quad n_s^{*eq} = (r^*)^{-3+b/c}$$

Вычислим величину относительной неоднородности концентрации частиц

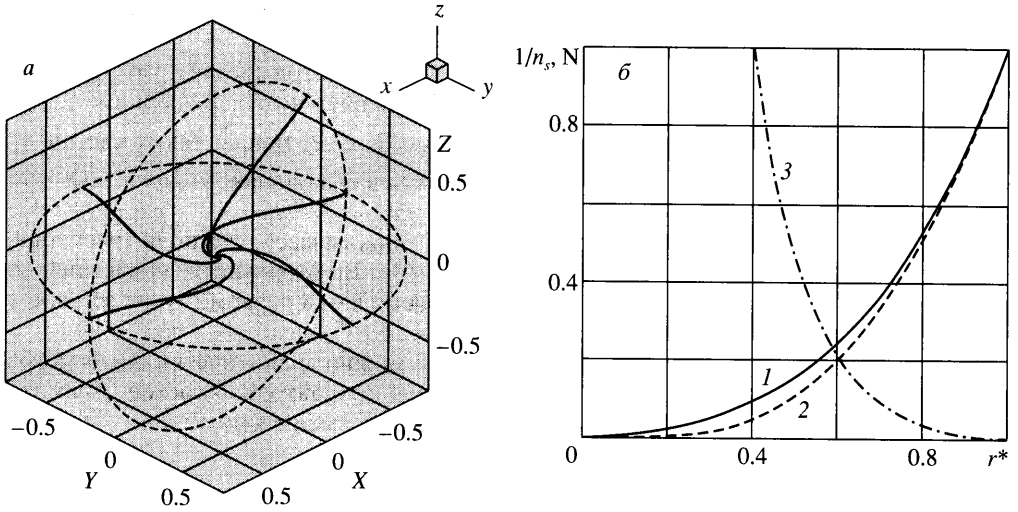
$$N = \frac{n_s^{*eq} - n_s^{*ax}}{n_s^{*ax}} = (r^*)^{-\xi(1-2\xi)/(1-\xi)} \approx (r^*)^{-\xi}$$

$$\xi = \frac{\delta}{a} = \frac{3\omega^2}{4\pi\gamma}$$

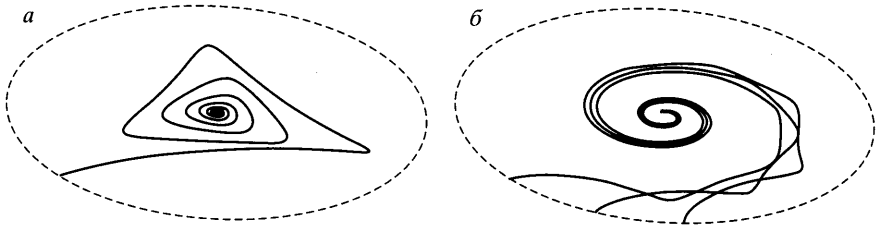
Здесь приближенное равенство справедливо, поскольку $\xi \ll 1$ (например, для условий Земли: $\xi \approx 0.00157$). При $r^* = 0.5$ и $r^* = 0.1$ относительная неоднородность составляет приблизительно 0.001 и 0.0036. Как видно, величина относительной неоднородности малоинерционных включений зависит только от величины ξ , которая, в свою очередь, зависит лишь от плотности несущей фазы и угловой скорости вращения объема.

С увеличением инерционности частиц (уменьшением β) вращение приводит ко все более значительной анизотропии радиальных профилей концентрации частиц. На фиг. 1 приведены примеры рассчитанных траекторий и распределений концентрации частиц на оси вращения и в экваториальной плоскости при $\beta = a = 4$ и $c = 3.99$ (эти параметры соответствуют пограничной ситуации $\beta^2 - 4a = 0$). В этом случае траектории частиц слабо отклоняются от радиальных направлений, однако формирующаяся анизотропия радиальных профилей концентрации частиц довольно существенна.

При дальнейшем увеличении инерционности частиц картина траекторий частиц значительно усложняется (фиг. 2 и 3). При $\beta^2 < 4a$ траектории частиц, начинающиеся над и под экваториальной плоскостью, неоднократно пересекают эту плоскость (фиг. 3, а). Пересекаются и траектории, лежащие в самой экваториальной плоскости, причем – даже в случае малых различий плотностей фаз (см. фиг. 2). Зоны пересечения траекторий в экваториальной плоскости имеют вид концентрических колец, число которых рас-



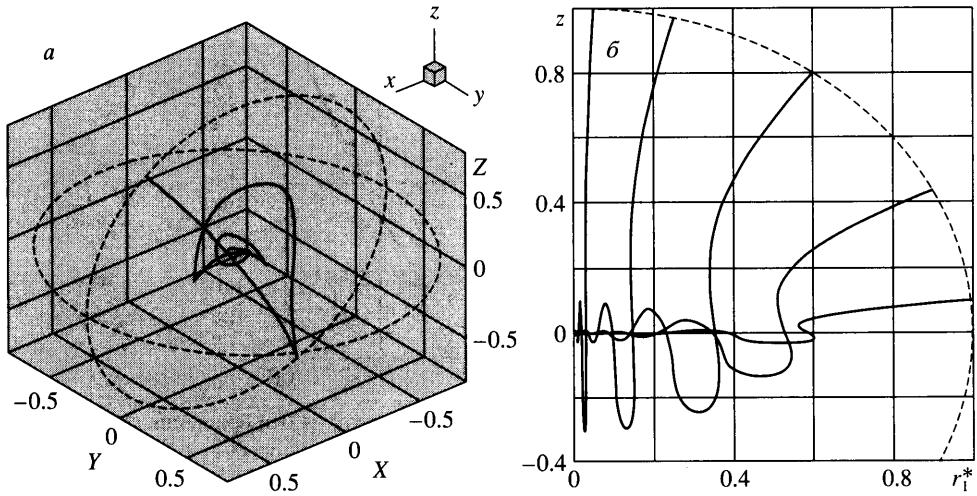
Фиг. 1. Траектории частиц (а); величина, обратная концентрации частиц, на оси вращения (кривая 1) и в экваториальной плоскости (2), относительная неоднородность концентрации N (3) (б) ($\delta = 0.01$, $a = \beta = 4$)



Фиг. 2. Траектории частиц в экваториальной плоскости при $\beta = 0.5$; случаи $\delta = 0.01$, $a = 7$ (а); $\delta = 0.0015$, $a = 1$ (б)

тет с увеличением параметра $B = a - \beta^2/4$. Картины траекторий частиц могут быть достаточно сложными. В силу осевой симметрии задачи удобно представить типичные поверхности тока среды частиц в цилиндрических координатах z , r_1^* (см. фиг. 3, б). Видно, что в центральной части объема формируется несколько вложенных друг в друга эллипсоидальных областей, границы которых являются огибающими семействами поверхностей тока среды частиц (см. фиг. 3, б). Внутри каждой последующей внутренней области число пересекающихся траекторий больше, чем в предыдущей. С увеличением инерционности частиц общее число таких вложенных областей увеличивается.

В рамках принятого гидродинамического приближения для дисперсной фазы существование пересекающихся поверхностей тока дисперсной фазы означает, что поперечное сечение некоторых трубок тока обращается в ноль и, следовательно, в соответствующих точках концентрация частиц неограниченно возрастает. Как показано в [11], сингулярности концентрации частиц, возникающие при решении уравнений запыленного газа, как правило, являются интегрируемыми и при малой средней объемной концентрации частиц модель несталкивающихся частиц остается применимой. С увеличением объемной концентрации вблизи точек сингулярности n_s^* межчастичные столкновения становятся все более существенными.



Фиг. 3. Траектория частиц при $\delta = 0.01, \beta = 1, a = 4$ (а); пересекающиеся поверхности тока среды частиц в цилиндрических координатах при $\delta = 0.01, \beta = 1, a = 2$ (б)

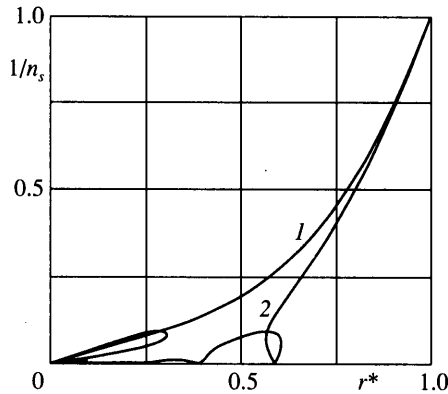
Анализ аналитического решения показывает, что в рассматриваемой задаче все точки сингулярности n_s^* лежат в экваториальной плоскости. Из решения следует, что для траекторий, лежащих в экваториальной плоскости, точки в которых якобиан $|J|$ обращается в нуль (а следовательно, $n_s^* \rightarrow \infty$) удовлетворяют условию

$$\frac{\partial z}{\partial z_0} = \exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right) \left(\cos(\sqrt{B}t) + \frac{\beta}{2\sqrt{B}} \sin(\sqrt{B}t) \right) = 0$$

Для траекторий, начинающихся над и под экваториальной плоскостью, точки бесконечной концентрации совпадают с точками пересечения траектории с этой плоскостью ($z = 0$). Например, для условий расчета, представленного на фиг. 3, концентрация среды частиц, стартовавших из верхней полуплоскости, обращается в бесконечность на поверхности диска радиуса ≈ 0.6 , лежащего в экваториальной плоскости. Для подсчета суммарной концентрации необходимо добавить в рассмотрение частицы, движущиеся в экваториальной плоскости, и частицы, стартовавшие из нижней полуплоскости.

Типичное поведение концентрации частиц, не покидающих экваториальную плоскость, представлено на фиг. 4. Видно, что в силу пересечения траекторий таких частиц их концентрация также имеет сингулярные точки. Эти точки лежат на концентрических окружностях, радиусы которых совпадают с абсциссами нулей кривой 2 на фиг. 4. Максимальная вероятность столкновений частиц достигается на этих концентрических окружностях, лежащих в экваториальной плоскости.

Даже при незначительных различиях плотностей фаз радиальные распределения концентрации частиц с умеренными и малыми значениями β имеют выраженную анизотропию (фиг. 4). Кривая 2 на фиг. 4 показывает расчет концентрации только тех частиц, траектории которых не выходят из экваториальной плоскости. С учетом траекторий частиц, пересекающих экваториальную плоскость, суммарная концентрация дисперсной фазы неограниченно растет во всех точках диска, лежащего в экваториальной плоскости, радиус которого равен абсциссе крайнего правого нуля кривой 2. Образование “петель” на кривых 1, 2 связано с наличием “складок” в континууме,



Фиг. 4. Величина, обратная концентрации частиц, на оси вращения (1) и в экваториальной плоскости (2) при $\delta = 0.001$, $\beta = 1$, $a = 2$

описывающем дисперсную фазу. Как видно из вида кривой 2, лагранжева поверхность, состоящая из частиц, стартовавших одновременно с внешней границы объема, в определенный момент времени останавливается, некоторое время движется назад, а затем снова начинает двигаться к центру, что приводит к возникновению складки в среде частиц.

Как отмечено выше, учет переменности свойств несущей фазы или частиц приводит к переменности параметров a , c , β , что значительно расширяет возможности формирования анизотропии в распределениях концентрации частиц. В качестве примера на фиг. 5 представлены расчеты, соответствующие линейному росту параметра инерционности частиц β с уменьшением r^* , что может моделировать, например, рост вязкости несущей фазы с глубиной или уменьшение размера частиц из-за фазовых переходов. Даже при незначительных различиях плотностей фаз анизотропия профилей концентрации весьма велика.

Как следует из результатов данного раздела, концентрация “тяжелых” включений вблизи экваториальной плоскости значительно превосходит концентрацию вблизи оси вращения. При этом в случае достаточно инерционных частиц в экваториальной плоскости могут возникать дискообразные области повышенной концентрации частиц. В свою очередь, внутри таких дисков формируются концентрические кольцевые области накопления частиц.

4. Численное решение при свободномолекулярном режиме обтекания частиц. В случае больших отличий плотностей фаз $\rho_s \gg \rho$, наличия твердого ядра в центре объема и свободномолекулярного режима обтекания включений уравнение движения частиц (1.5) принимает вид

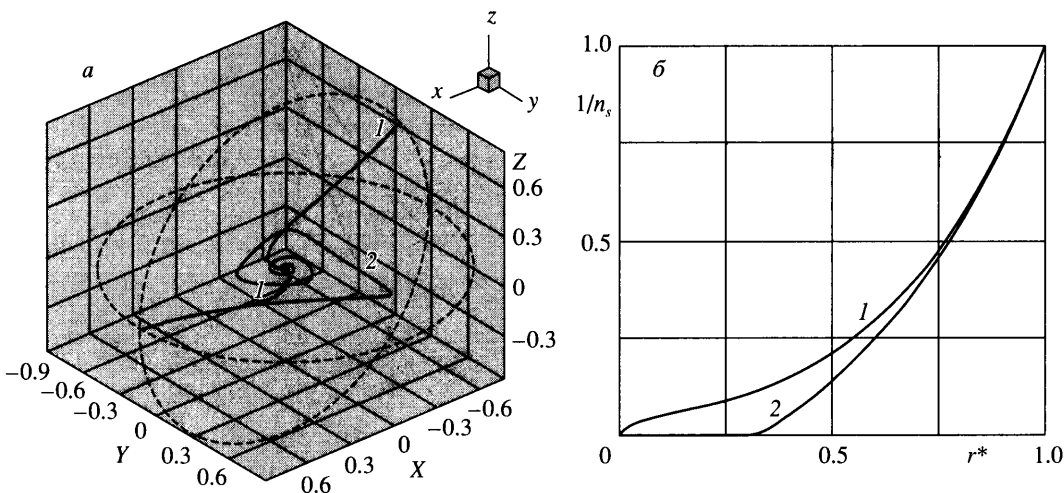
$$\frac{\partial \mathbf{V}_s^*}{\partial t^*} = -\beta_1 S C_d(S) \mathbf{V}_s^* + \mathbf{r}_1^* - \left(\alpha + \frac{\kappa}{r^{*3}} \right) \mathbf{r}^* - 2[\mathbf{k} \times \mathbf{V}_s^*]$$

Параметры α , β_1 и κ были введены в разд. 1. При численных расчетах $C_d(S)$ функция $\text{erf}(S)$ заменялась приближенным представлением [12]

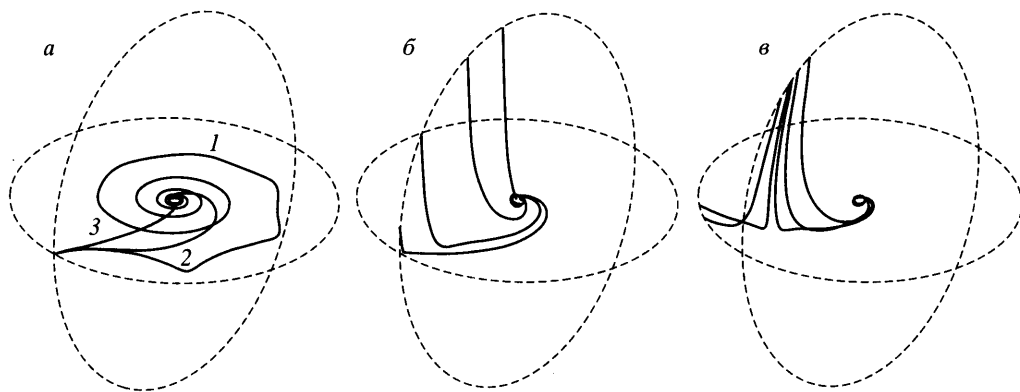
$$\text{erf}(S) = 1 - (d_1 \varphi + d_2 \varphi^2 + d_3 \varphi^3 + d_4 \varphi^4 + d_5 \varphi^5) e^{-S^2} + \varepsilon(S)$$

$$\varphi = \frac{1}{1 + \lambda S}, \quad |\varepsilon(S)| \leq 1.5 \cdot 10^{-7}$$

Значения констант λ и d_i приведены в [12].

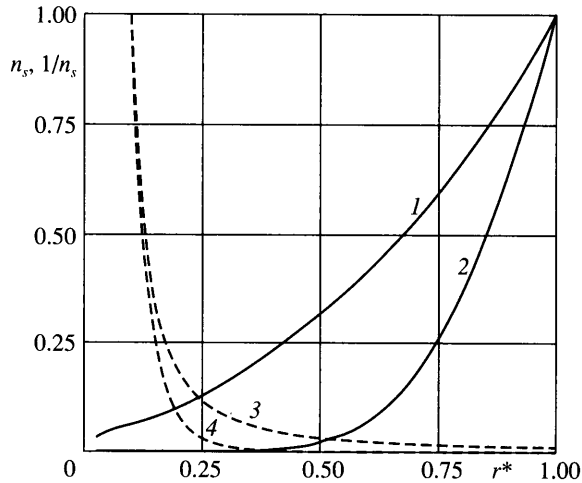


Фиг. 5. Расчеты для $\delta = 0.01$, $a = 7$ и переменного β линейно растущего с глубиной от 1 (на поверхности) до 6 (в центре); *a* – траектории частиц 1; кривая 2 соответствует $\beta = 1$; *b* – величина, обратная концентрации частиц, на оси вращения (1) и в экваториальной плоскости (2)



Фиг. 6. Траектории частиц при свободномолекулярном законе сопротивления: *a* – $\alpha = 2$, $\kappa = 0.01$, $A = 1$, $\beta_1 = 0.1$ (кривая 1), 0.5 (2), 2 (3); *б* – $\alpha = 0.9$, $\kappa = 0.11$, $A = 1$, $\beta_1 = 0.5$; *в* – $\alpha = 0.6$, $\kappa = 0.11$, $A = 1$, $\beta_1 = 0.5$

Параметрические численные расчеты траекторий и концентрации частиц в этом случае показывают, что при $\alpha + \kappa > 1$ и больших β_1 частицы движутся к центру, слабо отклоняясь от радиальных направлений, а радиальные распределения концентрации частиц практически изотропны. С уменьшением β_1 увеличивается роль центробежной и кориолисовой сил, траектории частиц все более “закручиваются” (фиг. 6, *a*). Влияние центробежной силы приводит к отклонению траекторий частиц от радиальных направлений в сторону экваториальной плоскости (фиг. 6, *б*), что приводит к заметной анизотропии радиальных распределений концентрации. На фиг. 7 видно, что вращение приводит к обеднению частицами приосевой зоны за счет их накопления в экваториальной плоскости, при этом в центральной части объема концентрация частиц резко возрастает. В отличие от случая стоксовского закона сопротивления в случае



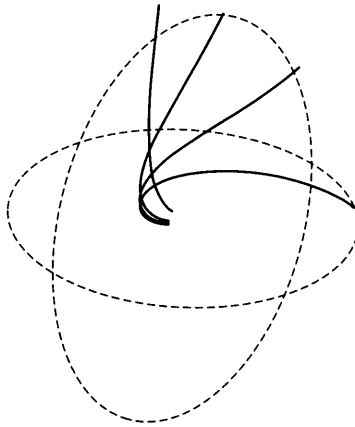
Фиг. 7. Величина, обратная концентрации частиц, при свободномолекулярном законе сопротивления при $\alpha = 2$, $\kappa = 0.01$, $A = 1$, $\beta = 1$ (1, 2) и концентрация “легких” включений (пунктир) при $\delta = -0.001$, $a = -1$, $\beta = 0.5$ (кривые 1, 3 – ось вращения; 2, 4 – экваториальная плоскость)

свободномолекулярного обтекания включений даже очень инерционные частицы ($\beta_1 = 0.5$) не пересекают экваториальную плоскость (фиг. 6). Пересечения начинаются при дальнейшем увеличении параметра $4\alpha - \beta_1^2$. Для рассматриваемого режима случай $\alpha < 1$ также имеет физический смысл. При этом наличие твердого ядра делает возможной ситуацию ($\alpha + \kappa < 1$), когда в приосевой части объема частицы движутся к экваториальной плоскости и приближаются к оси вращения, а в другой части объема – приближаются к экваториальной плоскости, но удаляются от оси. Пример расчета траекторий для этого случая приведен на фиг. 6, в. Видно, что в экваториальной плоскости формируется линия растекания, на которой центробежные и центростремительные силы, действующие на частицы, уравновешиваются.

5. Центрифугирование “легких” включений. В заключение рассмотрим пример движения частиц (капель или пузырьков), плотность которых меньше плотности несущей фазы. Предположим, что такие включения возникают в центральной части вращающегося объема, тогда под действием архимедовой силы они будут “всплывать” к периферии объема. Рассматриваем континуальный режим обтекания включений с соответствующим выражением для силы межфазного взаимодействия и предполагаем, что сферически симметричные граничные условия (1.9) заданы на сфере радиуса 0.1.

Параметрические расчеты траекторий и распределений концентрации частиц показывают, что при значениях параметров β и $|a|$ больше нескольких единиц траектории частиц слабо отклоняются от радиальных направлений. По мере приближения включений к границе объема их концентрация монотонно убывает, при этом радиальные распределения концентрации изотропны. Заметная угловая анизотропия радиальных профилей концентрации возникает лишь при небольших значениях параметров β (крупные частицы) и $|a|$. Лишь для таких частиц становится существенным вклад силы Кориолиса, приводящей к “закрутке” траекторий.

На фиг. 8 представлен пример расчета траекторий крупных включений, плотность которых лишь ненамного меньше плотности несущей фазы. Расчет концентрации включений в экваториальной плоскости и на оси вращения при тех же значениях оп-



Фиг. 8. Траектории “легких” включений при $\delta = -0.001$, $a = -1$, $\beta = 0.5$

ределяющих параметров приведен на фиг. 7. Видно, что траектории частиц отклоняются в сторону оси вращения и одновременно закручиваются вокруг нее. Концентрация включений быстро падает с удалением от центра, при этом вблизи оси вращения концентрация включений значительно выше, чем в экваториальной плоскости, что качественно отличается от случая “тяжелых” частиц.

Заключение. Предложена и проанализирована гидродинамическая модель центрифугирования инородных включений во вращающемся сферическом объеме самогравитирующей вязкой среды. На основе аналитического и численного решений при стационарных сферически симметричных граничных условиях для дисперсной фазы показано, что даже при малых различиях плотностей фаз вращение объема может приводить к значительной анизотропии радиальных распределений концентрации инородных включений. Концентрация “тяжелых” частиц нарастает по мере их движения к центру объема, при этом вблизи экваториальной плоскости она значительно выше, чем на оси вращения. Для “легких” частиц, всплывающих к периферии объема, бóльшая концентрация достигается вблизи оси вращения. Для тяжелых инерционных частиц характерно возникновение “складок” континуума, описывающего дисперсную фазу; при этом в экваториальной плоскости возникают дискообразные области накопления частиц, а внутри таких дисков формируются концентрические кольцевые области максимальной концентрации дисперсной фазы. Предложенная модель может быть использована для объяснения механизмов формирования плотностных неоднородностей в ядрах жидких планет, анализа процесса разделения фракций в протопланетных образованиях, а также для описания формирования пылевых структур в атмосферных вихрях.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 02-01-00770), РФФИ – ГФЕН КНР (№ 03-01-39004), а также Шведской Королевской академии наук (грант для сотрудничества с учеными бывшего СССР) и Шведского фонда стратегических исследований (SSF).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morelli A., Dziewonski A.M., Woodhouse J.H.* Anisotropy of the inner core inferred from PKIKP travel times // *Geophys. Res. Lett.* 1986. V. 13. № 13. P. 1545–1548.
2. *Woodhouse J.H., Giardini D., Li X.-D.* Evidence for inner-core anisotropy from free oscillations // *Geophys. Res. Lett.* 1986. V. 13. № 13. P. 1549–1552.

3. *Tromp J.* Inner-core anisotropy and rotation // *Annu. Rev. Earth Planet Sci.* 2001. V. 29. P. 47–69.
4. *Singh S.C., Taylor M.A., Montagner J.P.* On the presence of liquid in Earth's inner core // *Science*. 2000. V. 287. № 5462. P. 2471–2474.
5. *Marble F.E.* Dynamics of dusty gases // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1970. V. 2. P. 397–446.
6. *Osipov A.N.* Lagrangian modelling of dust admixture in gas flows // *Astrophys. Space Sci.* 2000. V. 274. № 1–2. P. 377–386.
7. *Maxey M.R., Riley J.R.J.* Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow // *Phys. Fluids*. 1983. V. 26. № 4. P. 883–889.
8. *Raju N., Meiburg E.* Dynamics of small, spherical particles in vortical and stagnation point flow fields // *Phys. Fluids*. 1997. V. 9. № 2. P. 299–314.
9. *Lovalenti P.M., Brady J.F.* The force on a bubble, drop, or particle in arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number // *Phys. Fluids. A*. 1993. V. 5. № 9. P. 2104–2116.
10. *Бондарев Е.Н., Дубасов В.Т., Рыжов Ю.А. и др.* *Аэрогидромеханика*. М.: Машиностроение, 1993. 688 с.
11. *Осипов А.Н.* Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1984. № 3. С. 46–52.
12. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. *Абрамовиц М., Стиган И.* М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.VI.2004