

УДК 532.5.031:532.69

© 2004 г. Д. В. ЛЮБИМОВ, Т. П. ЛЮБИМОВА, С. В. ШКЛЯЕВ

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ

Рассматриваются собственные колебания полусферической капли на твердой подложке. Для учета динамики краевого угла используется условие Хокинга. Собственные колебания затухают вследствие диссипации на контактной линии, снимается вырождение по азимутальному числу. Изучены вынужденные колебания капли для случая касательных вибраций подложки. Для закрепленной контактной линии амплитуда вынужденных колебаний неограниченно растет вблизи собственной частоты, в остальных случаях остается конечной.

Ключевые слова: колебания капли, движение контактной линии, собственные и вынужденные колебания, резонанс.

Задачам, в которых рассматривается динамика контактной линии, в настоящее время уделяется пристальное внимание. Великолепный обзор основных методов и приближений, применяемых в теории смачивания, можно найти в [1]. В работах [1, 2] изучено растекание жидкости, хорошо или полностью смачивающей материал подложки, для малых значений капиллярного параметра $Ca = U\eta/\sigma$ (U – скорость движения контактной линии, η и σ – коэффициенты динамической вязкости и поверхностного натяжения соответственно).

В работе [2] исследуется зависимость конечного динамического краевого угла от скорости движения контактной линии. Получены уравнения, позволяющие определить контактный угол как функцию расстояния от подложки. Проанализированы две задачи: о растекании капли и движении жидкости по капилляру.

В перечисленных работах рассматривается установившееся движение контактной линии по предварительно обработанной подложке. В этом случае жидкость растекается по подложке либо за счет межчастичного взаимодействия (например, ван-дер-ваальсово притяжение молекул жидкости к подложке), либо за счет статических внешних воздействий (сила тяжести, центробежная сила и т.д.). Большую роль в процессе растекания играет вязкость. При рассмотрении высокочастотного колебательного движения контактной линии ситуация отличается коренным образом. В этом случае влияние вязкости становится существенным лишь в тонких пограничных слоях вблизи твердой поверхности, а движение контактной линии определяется в основном быстроосциллирующим полем давления. Таким образом, можно рассматривать невязкое поведение жидкости в ядре, учитывая вязкость лишь внутри динамического пограничного слоя вблизи твердой подложки. Сложные процессы, происходящие в непосредственной близости линии контакта, из рассмотрения исключаются с помощью эффективных граничных условий, накладываемых на динамику видимого краевого угла.

Наиболее часто используется условие, примененное в [3] для изучения стоячих волн между двумя вертикальными стенками. Указанное условие предполагает линейную связь между скоростью движения контактной линии и отклонением краевого угла от его равновесного значения. Как правило, для простоты равновесный краевой угол считают прямым, записывая граничное условие в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (0.1)$$

Здесь ζ – отклонение поверхности раздела от равновесного положения, x – нормальная к твердой стенке координата, увеличивающаяся в глубь жидкости, Λ – феноменологическая постоянная (так называемый параметр смачивания), имеющая размерность скорости. Частными случаями граничного условия (0.1) являются условия фиксированной контактной линии ($\Lambda = 0$) и постоянного краевого угла ($\Lambda = \infty$). За исключением этих двух случаев, граничное условие (0.1) приводит к затуханию колебаний [3]. В указанной работе также проводится качественное сравнение с экспериментальными работами разных авторов. В частности, показано, что заметные расхождения между экспериментально измеренными и теоретически рассчитанными (учитывалось только вязкое трение в пограничном слое) декрементами затухания колебаний можно объяснить диссипацией энергии в окрестности контактной линии.

Условие (0.1) используется также в работе [4] при изучении собственных осесимметричных колебаний жидкой зоны в условиях невесомости. Показано, что затухание колебаний связано главным образом с движением контактной линии (за исключением предельных случаев $\Lambda \rightarrow 0$ и $\Lambda \rightarrow \infty$).

Несмотря на то, что граничное условие (0.1) является существенным огрублением ситуации, оно позволяет рассмотреть случаи, не поддающиеся строгому теоретическому анализу. В частности, (0.1) может быть использовано для описания движения по шероховатой поверхности. Качественное сравнение экспериментальной работы [5] с теоретическими выводами [3] показало, что шлифовка поверхности увеличивает параметр смачивания в десятки раз. Таким образом, параметр Λ характеризует не только химические свойства пары материалов жидкость-подложка, но и степень обработки последней.

Отметим, что условие, аналогичное (0.1), используется и в случае стационарного движения контактной линии. Действительно, это условие может быть получено из результатов работы [2] в некотором частном случае. Это, однако, не означает, что в [2] выводится граничное условие Хокинга – как было указано выше, в этой работе рассматривается принципиально иная постановка задачи.

Как справедливо замечено в [1], при использовании граничного условия (0.1) для описания шероховатых поверхностей необходимо учитывать гистерезисные явления. В работе [6] использовано более сложное граничное условие, допускающее неоднозначную зависимость краевого угла от скорости движения контактной линии:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \begin{cases} \Lambda(\beta - \beta_1), & \beta > \beta_1 \\ 0, & -\beta_2 \leq \beta \leq \beta_1 \\ \Lambda(\beta + \beta_2), & \beta < -\beta_2 \end{cases} \quad (0.2)$$

Здесь $\beta = \partial \zeta / \partial x$ – отклонение краевого угла от равновесного значения (в [6] также предполагается, что равновесный краевой угол – прямой). Ниже полагаем $\beta_1 = \beta_2 = \beta_c$. Как видно из (0.2), в этом случае малые отклонения краевого угла не приводят к движению контактной линии. Отметим, что граничное условие (0.2) соответствует неподвижной контактной линии как в случае $\Lambda = 0$, так и при достаточно большом β_c ; при $\beta_c \rightarrow 0$ получаем условие (0.1). Результаты экспериментальных работ [7, 8] хорошо описываются формулой (0.2) при малых отклонениях краевого угла.

С увеличением амплитуды колебаний краевой угол перестает зависеть от скорости движения контактной линии [7–11]. В этом режиме наиболее подходящим оказывается условие, предложенное Майлсом [9]:

$$\cos \beta - \cos \beta_c = -\xi \frac{v}{|v|} \quad (0.3)$$

где v – скорость движения контактной линии, ξ – параметр, характеризующий свойства контактирующих сред.

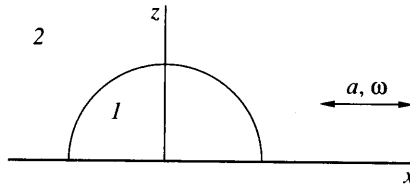
В [11] обнаружено три режима движения контактной линии: при малой амплитуде колебаний контактная линия фиксирована. При увеличении амплитуды наблюдается согласованное по фазе (но не удовлетворяющее условию (0.2)) изменение скорости контактной линии и краевого угла. При большой амплитуде колебаний наблюдается свободное движение контактной линии, описываемое формулой (0.3). Расхождение экспериментальных данных и формулы (0.2), по-видимому, объясняется тем, что пороговое значение отклонения краевого угла β_c лежит за пределами применимости линейной теории.

Изучение колебаний капли на твердой поверхности было начато в работе [12] в предположении о постоянстве краевого угла. В работе [13] с использованием условия (0.1) рассматривались колебания полусферической капли, помещенной на твердую подложку. Рассмотрены аксиально-симметричные моды собственных колебаний, изучено движение капли под действием нормальных вибраций. В предлагаемой работе исследуется случай касательных вибраций подложки. Рассмотрены также неосесимметричные моды собственных колебаний.

1. Основные уравнения. Рассмотрим поступательные колебания сосуда, целиком заполненного жидкостью. Пусть частота вибраций ω , амплитуда a , вибрационная ось направлена параллельно одной из твердых стенок, на которой находится капля иной жидкости (фиг. 1). Предполагается, что в отсутствие колебательного движения капля имеет полусферическую форму с равновесным радиусом R . Кроме того, считаются выполненными следующие условия:

$$\max(\delta, a) \ll R \ll L, \quad \delta = \sqrt{\nu/\omega}$$

Здесь δ – толщина вязкого пограничного слоя (определенного по средней динамической вязкости жидкостей), L – характерный размер сосуда. Первое из условий позволяет рассматривать задачу о малых невязких колебаниях капли и окружающей жидкости, второе – делает несущественной форму сосуда, важно лишь наличие твердой плоской (на масштабах капли) стенки, параллельной оси вибраций.



Фиг. 1. Геометрия задачи

Частота вибраций велика в вязком смысле, но сравнима с собственными частотами колебаний формы, т.е. капиллярное число $\sigma R/\rho v^2$ велико. Также предполагается, что сжимаемость капли и окружающей жидкости несущественна.

Для описания движения жидкости введем сферическую систему координат r, ϑ, α , начало отсчета которой расположено в центре капли. Колебательное движение капли и окружающей ее жидкости описывается линеаризованными уравнениями Эйлера (записанными в неинерциальной системе отсчета) и уравнениями непрерывности

$$\rho_j = \rho_j(-\varphi_{j,t} + \Omega^2 x \cos \Omega t), \quad \Delta \varphi_j = 0 \quad (1.1)$$

Здесь введены потенциалы скорости каждой жидкости $v_j = \nabla \varphi_j$, индекс j принимает два значения: $j = 1$ соответствует капле, $j = 2$ – окружающей каплю жидкости. Здесь и далее второй индекс означает частную производную по соответствующей переменной.

Твердая граница непроницаемая для обеих жидкостей, а вдали от капли жидкость совершает твердотельное движение вместе с сосудом

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}: \varphi_{j\vartheta} = 0, \quad r \rightarrow \infty: \varphi_2 \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

Для малых колебаний условия с движущейся границы раздела жидкостей $r = 1 + \varepsilon \zeta(\vartheta, \alpha, t)$ переносятся на невозмущенную поверхность $r = 1$ ($\varepsilon = a/R$ – малая безразмерная амплитуда вибраций). Скорость движения границы раздела совпадает с нормальной компонентой скорости каждой из жидкостей, скачок давления на границе раздела уравнивается капиллярными силами

$$r = 1: \zeta_r = \varphi_{1r} = \varphi_{2r}, \quad [p] = -(\Delta_{\vartheta\alpha} + 2)\zeta \quad (1.3)$$

где $\Delta_{\vartheta\alpha}$ – угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах, квадратными скобками обозначается скачок соответствующей величины на границе раздела: $[f] = (f_1 - f_2)_{r=1}$.

Для описания динамики краевого угла используется граничное условие Хокинга [3]

$$r = 1, \quad \vartheta = \pi/2: \zeta_r = -\lambda \zeta_{\vartheta} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1) и граничные условия (1.2)–(1.4) записаны в безразмерной форме. В качестве единиц измерения расстояния, времени, давления, потенциала скорости и отклонения свободной поверхности приняты

$$R, \sqrt{(\rho_1^* + \rho_2^*)R^3/\sigma}, a\sigma/R^2, a\sqrt{\sigma/(\rho_1^* + \rho_2^*)}R, a$$

Здесь ρ_j^* – размерные значения плотности каждой из жидкостей. Краевая задача (1.1)–(1.4) содержит следующие безразмерные параметры подобия: $\Omega = \sqrt{(\rho_1^* + \rho_2^*)\omega^2 R^3/\sigma}$ – частота вибраций (Ω^2 является числом Вебера задачи), параметр смачивания $\lambda = \Lambda \sqrt{(\rho_1^* + \rho_2^*)}R/\sigma$, безразмерные плотности каждой из жидкостей $\rho_{1,2} = \rho_{1,2}^*/(\rho_1^* + \rho_2^*)$. Последние два параметра связаны очевидным соотношением $\rho_1 + \rho_2 = 1$.

2. Собственные колебания капли. Рассмотрим сначала задачу о собственных колебаниях капли. В этом случае в уравнении Эйлера (1.1) необходимо опустить последнее слагаемое, описывающее силу инерции.

Представим удовлетворяющие уравнению Лапласа потенциалы скорости в виде рядов по сферическим гармоникам. Выделяя в решении множители $\exp(i\omega t + im\alpha)$, будем иметь для амплитуд потенциала $\Phi_{1,2}(r, \vartheta)$

$$\Phi_1 = i\omega \sum_{n=m}^{\infty} A_n r^n P_n^{(m)}(\theta), \quad \Phi_2 = i\omega \sum_{n=m}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n^{(m)}(\theta) \quad (2.1)$$

где $\theta = \cos \vartheta$.

В силу условий непротекания (1.2) в указанных суммах следует оставить слагаемые, для которых $n + m$ четное. Ниже это условие предполагается выполненным во всех суммах, хотя и не подчеркивается особо. Из условия непрерывности нормальной компоненты скорости следует связь коэффициентов разложения $B_n = -nA_n/(n + 1)$, а для амплитуды отклонения свободной поверхности ξ получаем

$$\xi = \sum_{n=m}^{\infty} nA_n P_n^{(m)}(\theta) \quad (2.2)$$

Определяя поля давления из уравнения Эйлера и подставляя эти поля в динамическое граничное условие, будем иметь для отклонения свободной поверхности

$$((1 - \theta^2)\xi')' + \left(2 - \frac{m^2}{1 - \theta^2}\right)\xi = -\omega^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n + \rho_1)A_n P_n^{(m)}(\theta)}{n + 1} \quad (2.3)$$

Штрихом обозначается дифференцирование по θ .

При $m \neq 1$ ограниченное в полюсе решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\xi = \omega^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n + \rho_1)A_n P_n^{(m)}(\theta)}{(n + 2)(n - 1)(n + 1)} + C f_m(\theta) \quad (2.4)$$

$$f_m(\theta) = (m + \theta) \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta}\right)^{m/2}$$

где f_m – решение однородного уравнения.

Сравнивая выражения (2.2) и (2.4), получаем коэффициенты разложения потенциала (2.1)

$$A_n = \frac{f_{nm} \Omega_n^2}{n(\Omega_n^2 - \omega^2)} C, \quad \Omega_n^2 = \frac{n(n^2 - 1)(n + 2)}{n + \rho_1} \quad (2.5)$$

где Ω_n – собственные частоты колебаний сферической капли в жидкости иной плотности. В (2.5) также введены обозначения для коэффициентов разложения функции $f_m(\theta)$ в ряды по присоединенным полиномам Лежандра $P_n^{(m)}(\theta)$

$$f_{nm} = (-1)^{(n-m)/2} \frac{(m^2 - 1)(2n + 1)(n - m - 1)!!}{(n + 2)(n - 1)(n + m)!!} \quad (n \neq m)$$

$$f_{mm} = \frac{(m + 1)(2m + 1)}{(m + 2)(2m)!!}$$

Подставляя разложение (2.4) в условие на линии контакта, получаем дисперсионное соотношение, определяющее собственные частоты колебаний полусферической капли

$$i\omega S_m(\omega) + \lambda(m^2 - 1) = 0$$

$$S_m(\omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f_{nm} \Omega_n^2 P_n^{(m)}(0)}{\Omega_n^2 - \omega^2} = m + \omega^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f_{nm} P_n^{(m)}(0)}{\Omega_n^2 - \omega^2} \quad (2.6)$$

Отдельно должна быть рассмотрена мода с азимутальным числом равным единице. Именно эта мода представляет наибольший интерес для дальнейшего изучения вынужденных колебаний. Для $m = 1$ ограниченное в полюсе решение уравнения (2.3) имеет вид (далее индекс n принимает только нечетные значения)

$$\xi = \omega^2 \left[\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n + \rho_1)A_n P_n^{(1)}(\theta)}{(n + 2)(n - 1)(n + 1)} + \frac{(1 + \rho_1)}{2} A_1 F(\theta) \right] + C P_1^{(1)}(\theta) \quad (2.7)$$

$$F(\theta) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{1 - \theta^2} \ln(1 + \theta) - \sqrt{\frac{1 - \theta}{1 + \theta}} \right)$$

– ограниченное в полюсе частное решение неоднородного уравнения

$$((1 - \theta^2)\xi')' + \left(2 - \frac{1}{1 - \theta^2}\right)\xi = -\sqrt{1 - \theta^2}$$

Сравнивая разложения (2.2) и (2.7), получаем для коэффициентов

$$A_n = \frac{1 + \rho_1}{2} \frac{F_n \Omega_n^2 \omega^2}{n(\Omega_n^2 - \omega^2)} A_1, \quad C = \left(1 - \frac{1 + \rho_1}{2} \omega^2 F_1\right) A_1 \quad (2.8)$$

Здесь введены следующие обозначения для коэффициентов разложения $F(\theta)$ в ряд по четным присоединенным полиномам Лежандра $P_n^{(1)}(\theta)$

$$F_n = -\frac{2(2n + 1)P_{n-1}(0)}{3(n^2 - 1)(n + 2)} \quad (n \neq 1), \quad F_1 = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{11}{18}$$

Учитывая граничное условие на контактной линии, получаем дисперсионное соотношение

$$1 + \frac{1 + \rho_1}{2} \left(\omega^2 S(\omega) + \frac{2}{3} i \omega \lambda \right) = 0 \quad (2.9)$$

$$S(\omega) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{F_n \Omega_n^2 P_n^{(1)}(0)}{\Omega_n^2 - \omega^2} = \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n P_n^{(1)}(0)}{\Omega_n^2 - \omega^2} - \frac{1}{3}$$

Очевидно, что собственные частоты ω , определяемые уравнениями (2.6) и (2.9), являются комплексными за исключением двух предельных значений параметра смачивания ($\lambda = 0, \lambda \rightarrow \infty$). Легко показать, что мнимая часть частот для всех мод колебаний неотрицательна, т.е. наблюдается затухание колебаний вследствие диссипации на контактной линии.

В предельном случае больших значений параметра смачивания частоты собственных колебаний капли и малые декременты затухания можно определить аналитически. Очевидно, что для свободных граничных условий на контактной линии собственные частоты совпадают с собственными частотами колебаний сферической капли (естественно, что для n -й моды возможны колебания только с азимутальными числами той же четности).

Вычисляя поправки к частоте при больших, но конечных λ , получаем ($m \neq 1$)

$$\omega_{nm} = \Omega_n + i\gamma_{nm} + \frac{\gamma_{nm}}{2\Omega_n} \left(4\Omega_n^2 \sum_{\substack{k=m \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\gamma_{km}}{\Omega_k^2 - \Omega_n^2} - \gamma_{nm} \right) \quad (2.10)$$

$$\gamma_{nm} = \frac{f_{nm} \Omega_n^2 P_n^{(m)}(0)}{2(m^2 - 1)} \lambda^{-1}$$

Первая поправка к собственной частоте определяет малый декремент затухания колебаний γ_{nm} , вторая – сдвиг собственной частоты. Таким образом, для большого параметра смачивания сдвиг собственной частоты достаточно мал (пропорционален λ^{-2}), главный эффект – появление слабой диссипации.

Как видно из (2.10), при наличии диссипации на линии контакта трех сред наблюдается снятие вырождения комплексной частоты по азимутальному числу: частоты собственных колебаний и декременты затухания различаются для разных m при фиксированном n .

Для $m = 1$ поправки к собственным частотам определяются выражением

$$\omega_{n1} = \Omega_n + i\gamma_n + \frac{\gamma_n}{2\Omega_n} \left(4\Omega_n^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\Omega_k^2 - \Omega_n^2} - \gamma_n - \frac{6\lambda^{-1}}{1 + \rho_1} \right) \quad (2.11)$$

где $\gamma_n = -3\Omega_n^2 F_n P_n^{(1)}(0)/4\lambda > 0$.

Для капли с фиксированной контактной линией вещественные собственные частоты ω_{0m} ($m \neq 1$) определяются из уравнения

$$S_m(\omega_{0m}) = 0 \quad (2.12)$$

При малых значениях параметра смачивания декременты затухания γ_{m0} также являются малыми

$$\gamma_{m0} = \frac{m^2 - 1}{2S_{m2}(\omega_{m0})} \lambda, \quad S_{m2}(\omega) = \omega^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f_{nm} \Omega_n^2 P_n^{(m)}(0)}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^2} \quad (2.13)$$

Поправки к вещественной части частоты пропорциональны квадрату параметра смачивания.

Для $m = 1$ уравнения (2.12), (2.13) немного меняются. Собственная частота колебаний ω_0 капли с фиксированной контактной линией определяется из уравнения

$$\omega_0^2 S(\omega_0) = -\frac{2}{1 + \rho_1} \quad (2.14)$$

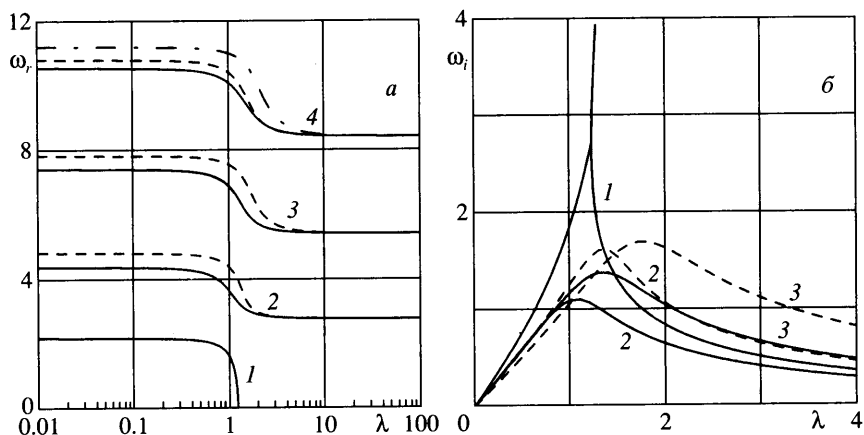
а для декремента затухания γ_0 справедливо выражение

$$\gamma_0 = -\frac{\lambda}{3S_2(\omega_0)}$$

$$S_2(\omega) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{F_n \Omega_n^4 P_n^{(1)}(0)}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^2} = S(\omega) + \omega^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{F_n \Omega_n^2 P_n^{(1)}(0)}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^2} \quad (2.15)$$

Уравнения (2.12), (2.14) решались численно. Частоты ω_0 и соответствующие им декременты затухания γ_0 играют важную роль при исследовании вынужденных колебаний, ввиду чего значения этих частот для разных соотношений плотностей приведены ниже.

ρ_1	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0
$\omega_0^{(1)}$	2.2198	2.3333	2.4662	2.6247	2.8180	3.0611
γ_0/λ	1.4815	1.4639	1.4422	1.4146	1.3783	1.3288
$\omega_0^{(2)}$	7.4500	7.6473	7.8628	8.1000	8.3643	8.6635
γ_0/λ	1.1907	1.1828	1.1743	1.1653	1.1558	1.1459
$\omega_0^{(3)}$	14.210	14.458	14.722	15.004	15.306	15.634
γ_0/λ	1.1303	1.1258	1.1215	1.1174	1.1141	1.1119



Фиг. 2. Собственные частоты (а) и декременты затухания колебаний (б) тяжелой капли в зависимости от параметра смачивания. Сплошные линии соответствуют наименьшим азимутальным числам ($m = 0$ или $m = 1$ для четных и нечетных мод), штриховые – следующим ($m = 2$ или $m = 3$), пунктирная – $m = 4$

Верхний индекс указывает номер корня уравнения (2.14) (корни упорядочены по возрастанию собственных частот). Он соответствует меридиональному числу n при свободном движении контактной линии.

При произвольных значениях параметра смачивания уравнения (2.6), (2.9) решались численно. Результаты решений приведены на фиг. 2 для $\rho_1 = 1$.

С уменьшением параметра смачивания различие между модами с разными азимутальными числами увеличивается, вырождение по m наблюдается только для случая фиксированного краевого угла. При этом для колебаний с более высоким номером m собственная частота выше, а колебания затухают быстрее. Как видно из фиг. 2, б, при достаточно больших значениях параметра смачивания показатели затухания γ_{22} и γ_3 совпадают, что согласуется с формулами (2.10), (2.11).

Интересно появление моды, соответствующей $n = m = 1$. Такие “изгибные” колебания существуют только для достаточно малого параметра смачивания и обусловлены сильным взаимодействием капли с подложкой. В случае фиксированного краевого угла капля свободно скользит по подложке, и колебания, сопровождающиеся движением центра масс капли, невозможны. Как видно из фиг. 2, а, частота этой моды обращается в нуль при $\lambda_c = 1.224$. При более высоких значениях λ возвращающая сила, действующая на каплю со стороны подложки, недостаточна для возникновения колебательного движения. В этом случае наблюдается затухающее поступательное движение капли по инерции. Аналогичная мода колебаний для цилиндрической капли была обнаружена в [14].

Уменьшение плотности капли ρ_1 не приводит к качественному изменению спектра собственных частот. Собственные частоты увеличиваются при всех значениях параметра смачивания, декременты затухания уменьшаются при малых λ и увеличиваются при больших (см. выше и формулы (2.10), (2.11)). Критическое значение λ_c , выше которого “изгибные” колебания капли не существуют, растет с уменьшением ρ_1 . Этот факт имеет очевидное объяснение: уменьшение инерции капли приводит к уменьшению “возвращающей” силы, необходимой для колебательного движения.

3. Вынужденные колебания. Переходим к изучению вынужденных колебаний капли, вызванных продольными вибрациями подложки. В этом случае, выделяя в выражении

ях для потенциала скорости, давления и отклонения свободной поверхности множитель $\cos \alpha \exp i\Omega t$ и раскладывая амплитуды в ряды, будем иметь

$$\Phi_1 = i\Omega \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n P_n^{(1)}(\theta), \quad \Phi_2 = i\Omega \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n^{(1)}(\theta) \quad (3.1)$$

$$q_{1,2} = \rho_{1,2} \Omega^2 (\Omega r P_1^{(1)}(\theta) - i\Phi_{1,2}), \quad \xi = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n P_n^{(1)}(\theta) \quad (3.2)$$

Условию непротекания соответствуют слагаемые с нечетными n в указанных суммах, что предполагается выполненным ниже. С учетом разложения давления получаем из динамического граничного условия

$$\xi = \Omega^2 \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{\Omega_n^2} A_n P_n^{(1)}(\theta) + \left(\frac{1+\rho_1}{2} A_1 + [\rho] \right) F(\theta) \right) + C P_1^{(1)}(\theta) \quad (3.3)$$

Сравнивая два разложения для отклонения свободной поверхности, получаем

$$A_n = \frac{\Omega^2 F_n \Omega_n^2}{n(\Omega_n^2 - \Omega^2)} \left(\frac{1+\rho_1}{2} A_1 + [\rho] \right) \quad (n \neq 1) \quad (3.4)$$

$$C = \left(1 - \Omega^2 F_1 \frac{1+\rho_1}{2} \right) A_1 - \Omega^2 F_1 [\rho]$$

Первый коэффициент разложения, описывающий поступательное движение капли, определяется из условия Хокинга

$$A_1 = \frac{-2[\rho](3\Omega^2 S + 2i\Omega\lambda)}{6 + (1+\rho_1)(3\Omega^2 S + 2i\Omega\lambda)} \quad (3.5)$$

Из выражения (3.5) очевидно, что капля остается неподвижной в системе отсчета подложки (для любого параметра смачивания), если плотности жидкостей одинаковы.

Все пространственные моды колебаний сдвинуты по фазе относительно колебаний подложки, причем для всех мод (за исключением первой) сдвиг фазы одинаковый. Таким образом, колебания капли представляют собой суперпозицию поступательного движения капли как целого и стоячих волн на поверхности капли, причем эти колебания сдвинуты относительно друг друга по фазе. В случае нормальных вибраций подложки было обнаружено иное явление: все пространственные гармоники сдвинуты относительно друг друга по фазе, в результате чего появляются бегущие вдоль поверхности волны.

Заслуживают подробного рассмотрения случаи, когда частота внешнего воздействия совпадает с собственной частотой капли со свободной (Ω_n) или закрепленной контактной линией (ω_0).

В первом из них, несмотря на наличие резонансных знаменателей $\Omega_n - \Omega$, амплитуда колебаний остается конечной. Действительно, пусть $\Omega^2 = \Omega_k^2 (1 + \delta)$, где $\delta \ll 1$. Тогда, в главном порядке получим

$$A_1 = -\frac{2[\rho]}{1+\rho_1} \quad A_k = \frac{2[\rho]}{1+\rho_1 k} \frac{1}{P_k^{(1)}(0)} \quad (3.6)$$

$$A_n = O(\delta) \quad (n > 1, n \neq k)$$

Таким образом, на частотах Ω_k капля совершает колебания в фазе с колебаниями подложки и окружающей жидкости

$$\zeta = \frac{2[\rho]}{1 + \rho_1} \left(\frac{P_k^{(1)}(\theta)}{P_k^{(1)}(0)} - P_1^{(1)}(\theta) \right) \cos \Omega t \cos \alpha \quad (3.7)$$

В неинерциальной системе отсчета контактная линия остается неподвижной. Решение (3.6)–(3.7) не зависит от параметра смачивания. Однако при достаточно больших значениях λ приведенное рассмотрение становится несправедливым и вблизи резонансной частоты нужно учесть слабую диссипацию. В этом случае будем иметь

$$\zeta = \frac{2[\rho]}{1 + \rho_1} \left(A \frac{P_k^{(1)}(\theta)}{P_k^{(1)}(0)} \cos(\Omega t + \beta) - P_1^{(1)}(\theta) \cos \Omega t \right) \cos \alpha \quad (3.8)$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\Omega_k - \Omega}{\gamma_k}, \quad A = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_k^2 + (\Omega - \Omega_k)^2}} \quad (3.9)$$

Формулы (3.9) имеют типичный вид для фазы и амплитуды колебаний вблизи резонанса при наличии слабой диссипации. Специфика данного предельного случая состоит в том, что максимальное значение амплитуды A равно единице, а не обратно пропорциональна параметру, отвечающему за слабую диссипацию. Это связано с тем, что вдали от резонанса при достаточно больших значениях параметра смачивания капля совершает лишь поступательное движение, не изменяя своей формы. По мере приближения к резонансной частоте амплитуда колебаний формы заметно увеличивается, но остается конечной в точке резонанса. В непосредственной близости от резонансной частоты при достаточно слабой диссипации поступательное движение капли и колебание ее формы сдвинуты по фазе относительно друг друга. Разумеется, что в точке резонанса зависимости (3.6)–(3.7) и (3.8), (3.9) совпадают.

Если частота колебаний сосуда близка к собственной частоте колебаний капли с фиксированной контактной линией ω_0 , то справедливы следующие выражения для коэффициентов разложений (3.1)–(3.2):

$$A_1 = -\frac{2[\rho]}{1 + \rho_1} \left(1 + \frac{3i}{\omega_0 \lambda (1 + \rho_1)} \right), \quad A_n = -\frac{3i[\rho]}{1 + \rho_1} \frac{\omega_0 F_n \Omega_n^2}{n \lambda (\Omega_n^2 - \omega_0^2)} \quad (3.10)$$

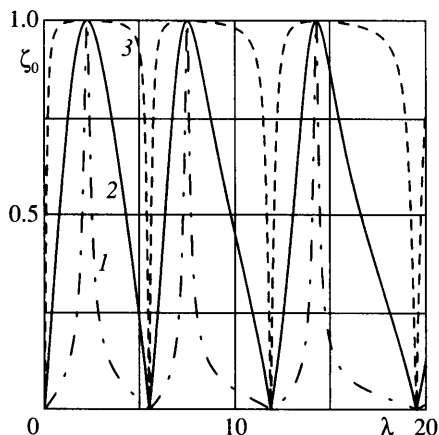
При этом, несмотря на то, что коэффициенты A_n могут принимать достаточно большие значения, амплитуда колебаний контактной линии остается конечной и не зависит от параметра смачивания

$$\zeta(\theta = 0) = -\frac{2[\rho]}{1 + \rho_1} \cos \Omega t \cos \alpha \quad (3.11)$$

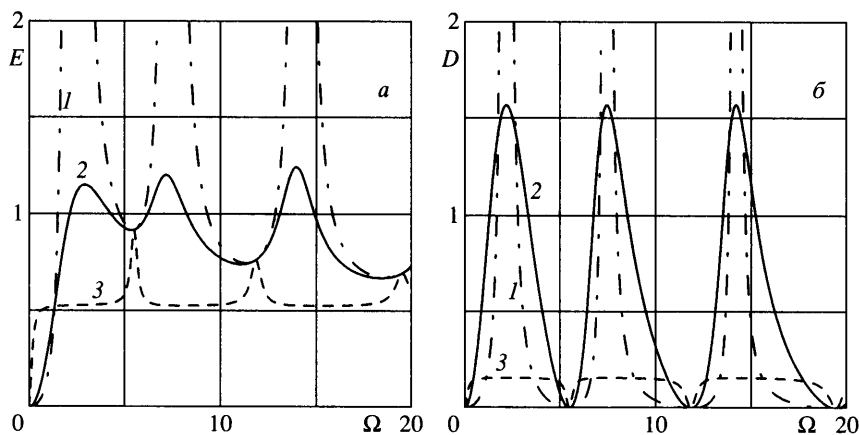
При $\rho_1 > \rho_2$ контактная линия совершает колебания в противофазе с колебаниями подложки, амплитуда колебаний максимальна для тяжелой капли в пустоте. При $\rho_1 < \rho_2$ контактная линия осциллирует в фазе с подложкой, амплитуда максимальна (и вдвое больше, чем для тяжелой капли) для газового пузырька.

При малых значениях λ вблизи точки резонанса амплитуда колебаний резко увеличивается. В этом случае более строгий анализ дает

$$A_1 = -\frac{6[\rho]}{(1 + \rho_1)^2} \frac{\lambda^{-1} \omega_0^{-1} \gamma_0}{\Omega - \omega_0 - i \gamma_0}, \quad A_n = \frac{1 + \rho_1}{2} \frac{\omega_0^2 \Omega_n^2 F_n}{n (\Omega_n^2 - \omega_0^2)} A_1 \quad (3.12)$$



Фиг. 3. Амплитудно-частотная характеристика колебаний контактной линии тяжелой капли. Линии 1 (пунктирная), 2 (сплошная), 3 (штриховая) соответствуют $\lambda = 0.1, 1, 10$



Фиг. 4. Энергия колебаний тяжелой капли (а) и мощность диссипации (б) в зависимости от частоты колебаний. Линии 1 (пунктирная), 2 (сплошная), 3 (штриховая) соответствуют $\lambda = 0.1, 1, 10$

Таким образом, все моды колебаний находятся в фазе, амплитуда колебаний максимальна в точке резонанса и обратно пропорциональна малому параметру смачивания. Контактная линия остается фиксированной в данном приближении. Если, однако, учесть слагаемые нулевого порядка по λ (при малых, но конечных λ), то на резонансной частоте получится результат, описываемый формулой (3.11).

В пределе высоких частот ($\Omega \gg 1$), вдали от собственных частот ω_0 , первым слагаемым в знаменателе формулы (3.5) можно пренебречь. Используя формулу Стирлинга, можно показать, что $S(\Omega \rightarrow \infty) \sim \Omega^{-2/3}$, т.е. вклад слагаемого $\Omega^2 S(\Omega)$ более существен (вдали от резонансных частот ω_0), чем слагаемое $\lambda \Omega$. Таким образом, при не слишком большом параметре смачивания капля ведет себя подобно капле с закрепленной контактной линией. Твердотельное движение вдоль подложки возможно лишь при $\lambda \gg \Omega^{1/3}$.

Этот вывод представляется достаточно неожиданным и, по-видимому, связан с использованием невязкого приближения. Очевидно, что верхние гармоники будут заметно подавлены за счет вязкости и не внесут существенного вклада на высоких частотах. В этом случае капля как целое будет совершать поступательные колебания.

В пределе низких частот амплитуда колебаний капли мала, при этом $A_1 = -2i[\rho]\Omega\lambda/3$, $A_n = O(\Omega^2)$ ($n > 1$), т.е. за исключением предельного случая закрепленной контактной линии, капля совершает поступательное движение, отставая на четверть периода от колебаний подложки.

При произвольных значениях параметров задача решалась численно. В рядах удерживалось до 400 слагаемых (это связано с плохой сходимостью сумм вблизи $\Omega = \omega_0$). Амплитудно-частотная характеристика колебаний контактной линии представлена на фиг. 3 для тяжелой капли ($\rho_1 = 1$). Вблизи резонансных частот $\Omega = \omega_0$ амплитуда колебаний контактной линии совпадает с амплитудой колебаний подложки – контактная линия покоится в лабораторной системе отсчета. При достаточно больших значениях параметра смачивания и вся капля остается неподвижной, а при малых наблюдается резонансное увеличение амплитуды колебаний. Это явление демонстрируется на фиг. 4, где показана зависимость полной энергии капли и мощности диссипации от частоты колебаний сосуда. Можно показать, что энергия колебаний капли E (в единицах $(\rho_1^* + \rho_2^*)a^2\omega^2R^3$) и мощность диссипации D (в единицах $a^2\omega^2\sqrt{\sigma(\rho_1^* + \rho_2^*)R^3}$) имеют вид:

$$E = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|^2 n^2 (n + \rho_1)}{2n + 1} \left(1 + \frac{\Omega_n^2}{\Omega^2} \right) \quad (3.13)$$

$$D = \lambda \int_0^{2\pi} \zeta_0^2|_{\theta=0} d\alpha = \frac{2\pi\lambda\Omega^2}{9} \left| \frac{1 + \rho_1}{2} A_1 + [\rho] \right|^2 \quad (3.14)$$

Как видно из фиг. 4, для малых значений параметра смачивания энергия колебаний заметно нарастает вблизи $\Omega = \omega_0$. На частотах Ω_n в соответствии с (3.7) решение не зависит от параметра смачивания. Так как контактная линия не двигается относительно подложки, то диссипация энергии мала в окрестности частоты Ω_n (собственной для капли со свободной линией контакта).

Изменение отношения плотностей не приводит к качественному изменению характеристик колебаний в зависимости от частоты и параметра смачивания. Изменяется лишь амплитуда колебаний и положение резонансных частот ω_0 и Ω_n . Как показано в разд. 2, по мере уменьшения ρ_1 от единицы (капля жидкости, окруженная газом) до нуля (пузырек, окруженный жидкостью) характерные частоты увеличиваются.

Зависимость амплитуды колебаний контактной линии имеет вид, аналогичный фиг. 3. Максимальное значение амплитуды достигается на частоте ω_0 и определяется формулой (3.11), т.е. наиболее интенсивное движение совершает газовый пузырек в тяжелой жидкости.

Заключение. Данная работа завершает исследования собственных колебаний полусферической капли на твердой подложке, начатые в [13]. Учет неосесимметричных движений привел к достаточно интересным явлениям: снимается вырождение частот колебаний по азимутальному числу, возможно появление изгибной моды колебаний.

Вынужденные колебания капли на подложке, совершающей продольные вибрации, в значительной степени отличаются от колебаний капли для случая нормальных вибраций [13]. Во-первых, поверхность капли совершает достаточно простые движения:

твердотельные поступательные колебания и стоячая волна. В случае нормальных вибраций появлялись бегущие волны на поверхности капли.

Во-вторых, для больших значений параметра смачивания капля совершает твердотельное движение. Колебания формы являются существенными лишь вблизи собственных частот, оставаясь при этом конечными. Для случая нормальных вибраций в пределе больших значений параметра смачивания наблюдалось бесконечное (пропорционально λ) увеличение амплитуды колебаний.

С другой стороны, поведение капли на высоких частотах внешнего воздействия качественно похоже для касательных и нормальных вибраций. Для любых (не слишком больших) значений капиллярного параметра капля совершает колебания аналогично капле с закрепленной контактной линией. При учете вязкости мелкомасштабные движения не будут возбуждаться, и следует ожидать твердотельного движения капли. Таким образом, при высокочастотных касательных вибрациях оправданно использование осредненного описания, аналогичного проведенному в [15] для сферической капли.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке из средств гранта PE-009-0 Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР), гранта INTAS-2000-0617, гранта 01-01-00443 Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96112).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Gennes P.G.* Wetting: Statics and dynamics // *Rev. Mod. Phys.* 1985. V. 57. № 3. P. 827–863. = *Де Жен П.Ж.* Смачивание: статика и динамика // *Успехи физ. наук.* 1987. Т. 151. Вып. 4. С. 619–681.
2. *Воинов О.В.* Гидродинамика смачивания // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1976. № 5. С. 76–84.
3. *Hocking L.M.* The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 179. P. 253–266.
4. *Borkar A., Tsamopoulos J.* Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges // *Phys. Fluids A.* 1991. V. 3. № 12. P. 2866–2874.
5. *Keulegan G.H.* Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 6. Pt 1. P. 33–50.
6. *Hocking L.M.* Waves produced by a vertically oscillating plate // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 179. P. 267–281.
7. *Ablett R.* An investigation of the angle of contact between paraffin wax and water // *Phil. Mag. Ser. b.* 1923. V. 46. № 272. P. 244–256.
8. *Dussan V.E.B.* On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1979. V. 11. P. 371–400.
9. *Miles J.* The capillary boundary layer for standing waves // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 222. P. 197–205.
10. *Cocciaro B., Faetti S., Festa C.* Experimental investigation of capillary effects on surface gravity waves: Non-wetting boundary conditions // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 246. P. 43–66.
11. *Ting C.-L., Perlin M.* Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 295. P. 263–300.
12. *Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / Под ред. А.Д. Мышкиса.* Киев: Наук. думка, 1992. 592 с.
13. *Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Shklyaev S.V.* Quasi-equilibrium shape of a drop on oscillating rigid plate // *Abstr. book Intern. Congr. Theor. Appl. Mech. (ICTAM-2000).* Chicago, 2000. P. 142–143.
14. *Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V.* Deformation of a cylindrical drop in a vibrational field. *Proc. on CD 29th Summer School "Advanced Problems in Mechanics".* S.-Petersburg, 2001. P. 3–10.
15. *Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P., Roux B.* Deformation of gas or drop inclusion in high frequency vibrational field // *Microgravity Quart.* 1996. V. 6. № 2–3. P. 125–130.