

УДК 532.526.3:533.6.011.55

© 2004 г. В.В. БОГОЛЕПОВ, В.Я. НЕЙЛАНД

СХЕМА РЕЖИМОВ РАЗВИТИЯ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ПРИСТЕНОЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Построена схема режимов развития медленных пристеночных возмущений в гиперзвуковом пограничном слое с длиной волны, превышающей его толщину, вызываемых нестационарным самоиндуцированным возмущением давления. Показано, что основными факторами, формирующими возмущенное течение, являются значение энthalпии у поверхности, степень вязко-невязкого взаимодействия и дозвуковой или сверхзвуковой характер основной части пограничного слоя. Сформулированы нелинейные краевые задачи для режимов, когда роль пристеночной части пограничного слоя является определяющей; численные и аналитические решения получены в линейном приближении. Получено, что усиление вязко-невязкого взаимодействия или повышение роли сверхзвуковой основной части пограничного слоя придают возмущенному течению “сверхзвуковые” в целом черты: ослабляется распространение возмущений вверх по потоку и усиливается их рост вниз по потоку. Ослабление же вязко-невязкого взаимодействия или повышение роли дозвуковой основной части пограничного слоя производят обратное воздействие. Охлаждение поверхности способствует усилению влияния основной части пограничного слоя на формирование возмущения давления, а ее нагрев – усилению влияния пристеночной части пограничного слоя. Показано также, что для рассмотренных режимов возмущения распространяются от участка турбулентного течения, находящегося ниже по потоку локальной области развития возмущений, навстречу набегающему потоку.

Ключевые слова: гиперзвуковой поток, пограничный слой на охлаждаемой поверхности, самоиндуцированное возмущение давления, схема режимов распространения малых нестационарных возмущений.

Традиционно начальная стадия развития нестационарных возмущений описывается композитными уравнениями типа Орра–Зоммерфельда [1]. Однако они содержат внепорядковые члены, в которые входит большое число Рейнольдса, что усложняет, в общем случае, анализ получаемых результатов. Кроме того, эти уравнения не позволяют исследовать нелинейную фазу развития возмущений. Рациональный подход к решению этой проблемы может заключаться в использовании асимптотического анализа уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса, как это сделано при построении теории пограничного слоя Прандтля [2] или асимптотической теории его отрыва (теория свободного взаимодействия) [3–8]. Нестационарная форма этой теории позволила исследовать развитие длинноволновых (с длиной волны, превышающей толщину пограничного слоя) возмущений в пограничном слое в достаточно широком диапазоне изменения скорости внешнего потока [9–15]. Ниже строится схема асимптотических режимов развития двумерных нелинейных нестационарных длинноволновых возмущений в пограничном слое около охлаждаемой поверхности в гиперзвуковом потоке [16], что является развитием стационарной теории отрыва пограничного слоя на охлаждаемом теле [17]. Показано, что медленные пристеночные возмущения могут распространяться навстречу основному потоку от области турбулентного течения, которая находится ниже по потоку.

1. Рассматривается обтекание тонкой пластины равномерным гиперзвуковым потоком газа, т.е. принимается, что число Маха в набегающем потоке – велико $M_\infty \gg 1$. Предполагается, что число Рейнольдса, посчитанное по параметрам набегающего

потока и конечному расстоянию l от передней кромки пластины – большое $Re_\infty = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty \gg 1$, но докритическое, т.е. течение в пограничном слое около поверхности пластины остается ламинарным.

Исследуется локальная возмущенная область течения на расстоянии $\sim l$ от передней кромки пластины, возникающая в результате воздействия нестационарного самоиндуцированного возмущения давления.

В дальнейшем используются только безразмерные переменные. Для этого все линейные размеры относятся к l , компоненты скорости u и v вдоль осей декартовой системы координат x и y – к u_∞ , время t , давление p и энтальпия h – к величинам l/u_∞ , $\rho_\infty u_\infty^2$ и u_∞^2 , а плотность газа ρ и его коэффициент вязкости μ – к своим значениям в набегающем потоке.

Предполагается далее, что газ является совершенным, а коэффициент вязкости степенным образом зависит от энтальпии

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad \mu = A M_\infty^{2\omega} h^{\omega} \quad (1.1)$$

где γ – постоянное значение отношения удельных теплоемкостей, A и ω – некоторые постоянные. Исследуется режим слабого вязко-невязкого взаимодействия, когда возмущение давления Δp_δ , возникающее за счет вытесняющего действия пограничного слоя, мало по сравнению с давлением в набегающем потоке [18]

$$\Delta p_\delta \sim \frac{\delta}{M_\infty} \ll \frac{1}{M_\infty^2}; \quad M_\infty \delta \ll 1 \quad (1.2)$$

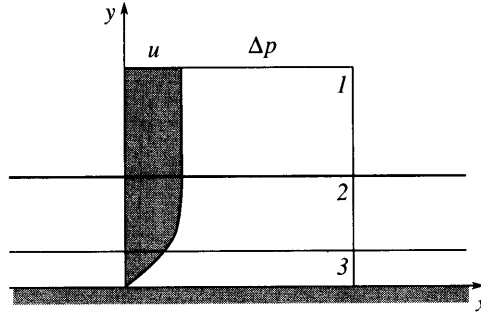
где δ – толщина пограничного слоя. Тогда в области ламинарного пограничного слоя с характерными размерами $\Delta x \sim 1$ и $\Delta y \sim \delta$ будут справедливы следующие оценки:

$$u \sim h \sim 1, \quad v \sim \delta, \quad p \sim \rho \sim \frac{1}{M_\infty^2}, \quad \mu \sim M_\infty^{2\omega}, \quad \delta \sim \frac{M_\infty^{\omega+1}}{Re_\infty^{1/2}} \quad (1.3)$$

Слабое возмущение давления $\Delta p/p \ll 1$ по-разному воздействует на отдельные области течения. В тонкой пристеночной части пограничного слоя (в области 3, см. схему течения на фиг. 1) с характерной толщиной $\Delta y^{(3)} \ll \delta$ (верхний индекс в скобках обозначает номер области), где в силу прилипания газа к поверхности пластины мала продольная компонента скорости $u \ll 1$, такое возмущение давления может индуцировать в общем случае нелинейные возмущения функций течения ($\Delta u \sim u \ll 1$, например). И изменение толщины этой области будет иметь тот же порядок величины, что и сама ее толщина $\Delta \Delta y^{(3)} \sim \Delta y^{(3)}$.

В основной части пограничного слоя (в области 2) с характерной толщиной по порядку величины равной самой его толщине $\Delta y^{(2)} \sim \delta$ продольная компонента скорости уже не мала: $u \sim 1$. И малое возмущение давления $\Delta p/p \ll 1$ может индуцировать здесь только малые, линейные возмущения функций течения ($\Delta u \ll u \sim 1$, например). Эта область как целое смещается на толщину области 3 $\Delta y^{(3)}$, а возмущение давления Δp индуцирует дополнительно изменение ее толщины $\Delta \Delta y^{(2)}$.

В итоге смещается и внешняя граница пограничного слоя. А за счет взаимодействия с гиперзвуковым набегающим потоком в области 1 (в возмущенной части равномерного набегающего потока) с характерной толщиной, превышающей толщину пограничного слоя, $\delta \ll \Delta y^{(1)} \sim \Delta x / M_\infty$, где $\Delta x \leq 1$ – характерная протяженность локальной возмущенной области, индуцируется возмущение давления Δp .



Фиг. 1. Трехслойная схема течения с самоиндуцированным возмущением давления: 1 – область равномерного набегающего потока; 2 – основная часть пограничного слоя; 3 – пристеночная часть пограничного слоя

Изменение возмущения давления Δp “корректирует” изменение толщин области 3 $\Delta y^{(3)}$ и области 2 $\Delta \Delta y^{(2)}$ и соответственно величину самого возмущения давления Δp . Таким образом устанавливается согласованная величина самоиндуцированного возмущения давления Δp , для определения которого необходимо и достаточно в общем случае рассмотрения трех перечисленных выше областей возмущенного течения [3–5].

Полагая далее, что коэффициенты теплового потока C_q и напряжения трения C_f сохраняют свои порядки величин в пристеночной части невозмущенного пограничного слоя

$$C_q = \frac{\mu}{\text{Re}_\infty \text{Pr}} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_w = \frac{\delta}{M_\infty^2 \text{Pr}}, \quad C_f = \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{\delta}{M_\infty^2} C \tag{1.4}$$

и используя соотношения (1.1) и (1.3), удается получить профили продольной компоненты скорости u и энтальпии h для этой области течения

$$h = \left[(\omega + 1) \frac{B y}{A \delta} + h_w^{\omega + 1} \right]^{1/(\omega + 1)}, \quad u = \frac{C}{B} (h - h_w) \tag{1.5}$$

где Pr – число Прандтля, B и C – некоторые постоянные, индекс “ w ” относится к значениям параметров на поверхности пластины. В случае “несильно охлажденной” поверхности при

$$\left(\frac{y_*}{\delta} \right)^{1/(\omega + 1)} \ll h_w \leq 1 \tag{1.6}$$

где y_* – некоторая толщина пристеночной части невозмущенного пограничного слоя, профили (1.5) преобразуются в первом приближении к новому виду

$$h \approx h_w + \frac{B}{A \delta} \frac{y}{h_w^\omega}, \quad u \approx \frac{C}{A \delta} \frac{y}{h_w^\omega} \tag{1.7}$$

Соотношения (1.7) позволяют оценить порядки величин функций течения в пристеночной области 3. Полагая, что в результате воздействия самоиндуцированного возмущения давления Δp здесь возникают вязкие нелинейные возмущения, из сопоставления порядков величин основных членов уравнений Навье–Стокса

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{1.8}$$

На линии $OABE$ при $\Delta x \sim h_w^{2(2\omega+1)}$ изменения толщин областей 3 и 2 одинаковы по порядку величины $\Delta y^{(3)} \sim \Delta \Delta y^{(2)}$. Слева от этой линии при меньших значениях h_w или ббльших значениях Δx толщина пограничного слоя изменяется в основном за счет изменения толщины области 2. Здесь она играет главную роль и здесь нестационарное самоиндуцированное возмущение давления может вызывать развитие нестационарных же возмущений в основной части пограничного слоя. А условие взаимодействия с внешним набегающим потоком (1.12) определяет линию DB при $\Delta x \sim M_\infty \delta$.

Справа от линии $OABE$ при ббльших значениях h_w или меньших значениях Δx толщина пограничного слоя изменяется в основном за счет изменения толщины области 3. Здесь процессы развития нестационарных возмущений должны определяться изменениями в этой пристеночной области, где мала продольная компонента скорости $u \ll 1$. И поэтому здесь должны находиться режимы развития медленных пристеночных возмущений. А условие взаимодействия с внешним набегающим потоком (1.12) определяет линию BF при $\Delta x \sim (M_\infty \delta)^{3/4} h_w^{\omega+1/2}$.

В точке B на схеме фиг. 2 реализуется наиболее общий режим развития медленных пристеночных возмущений в гиперзвуковом пограничном слое около охлаждаемой поверхности, так как здесь существенны все члены соотношения (1.12). При смещении от этой точки влево (по линии DB) или вправо (по линии BF) уменьшается соответственно роль областей 3 или 2 в развитии возмущений. При смещении по линии BAO вниз к точке A ослабляется взаимодействие с внешним набегающим потоком и становится несущественным член в левой части соотношения (1.12). Это означает, что толщина пограничного слоя в первом приближении не должна изменяться, а возмущение давления будет определяться из условия взаимной компенсации изменения толщин областей 3 и 2

$$\Delta y^{(3)} + \Delta \Delta y^{(2)} \approx 0$$

В точке A , когда характерная протяженность возмущенной области течения становится соизмеримой с толщиной пограничного слоя $\Delta x \sim \delta$, будет необходимо дополнительно учитывать изменение возмущения давления поперек пограничного слоя (т.е. влияние вертикального градиента давления $\partial p / \partial y$ на течение в области 2).

При смещении от точки B вверх к точке E по линии BE член в левой части соотношения (1.12) становится больше всех других по порядку величины. Это означает, что для исследуемой модели течений на линии BE выше точки B нет нетривиальных режимов развития возмущений.

3. Далее рассматривается режим развития возмущений, соответствующий точке B на схеме фиг. 2. В этом случае характерная протяженность возмущенной области течения (или длина волны возмущений) значительно превосходит толщину пограничного слоя $\Delta x \sim M_\infty \delta \gg \delta$. Предполагается сначала, что пристеночная область 3 – основная в развитии возмущений и что нестационарное самоиндуцированное возмущение давления $\Delta p/p \ll 1$ вызывает нестационарные же возмущения функций течения в этой области. Тогда из сопоставления порядков величин нестационарных и конвективных членов уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim u \frac{\partial u}{\partial x}$$

в области 3 получается оценка для масштаба времени

$$\Delta t \sim h_w^{(\omega-1)/3} \Delta x^{2/3} \quad (3.1)$$

Использование теперь известного метода сращиваемых асимптотических разложений (см., например [19]) позволяет получить, что течение в области 3 в первом приближении будет описываться нестационарными уравнениями несжимаемого пограничного слоя [16]

$$\rho_w \left(\frac{\partial u_3}{\partial t_3} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right) + \frac{dp_3}{dx_3} = \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0, \quad \mu_w = A, \quad (\gamma - 1)\rho_w = 1$$

где цифрой снизу отмечены внутренние переменные рассматриваемой области течения.

На поверхности пластины должны выполняться обычные условия непротекания и прилипания

$$u_3 = v_3 = 0 \quad (y_3 = 0) \quad (3.3)$$

Начальные условия получаются из сращивания с пристеночной частью невозмущенного пограничного слоя (1.7)

$$u_3 \rightarrow \frac{C}{A} y_3, \quad v_3 \rightarrow 0, \quad p_3 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty) \quad (3.4)$$

Внешние краевые условия получаются из сращивания с решением в квазистационарной области 2

$$u_3 \rightarrow \frac{C}{A} (y_3 - D) \quad (y_3 \rightarrow -\infty) \quad (3.5)$$

$$p_3(t_3, x_3) = p_2(t_3, x_2), \quad x_3 = x_2$$

где $D = D(t_3, x_3)$ – толщина вытеснения области 3.

Изменение толщины квазистационарной области 2 определяется следующим соотношением:

$$\Delta \Delta y^{(2)} \sim \frac{\delta \Delta x^{2/3}}{h_w^{(2\omega+1)/3}} p_2 L, \quad L = \int_0^\infty \left(\frac{1}{M_0^2} - 1 \right) dy_2 \quad (3.6)$$

где $M_0 = M_0(y_2)$ – профиль числа Маха в невозмущенном пограничном слое. Интеграл L может принимать положительные или отрицательные значения, когда пограничный слой в целом ведет себя как дозвуковой или сверхзвуковой поток соответственно, что определяет характер распространения возмущений [17, 20].

И, наконец, сращивание асимптотических разложений в квазистационарных областях 2 и 1 позволяет получить условие для определения самоиндуцированного возмущения давления

$$p_3 = \frac{dD}{dx_3} + L \frac{dp_3}{dx_3} \quad (3.7)$$

$$p_2(t_3, x_2) = p_1(t_3, x_1, 0), \quad x_2 = x_1$$

которое замыкает краевую задачу (3.2)–(3.5). Здесь, как и в соотношении (1.12), первый член в его правой части учитывает вклад пристеночной области 3, второй – вклад основной части пограничного слоя (области 2), а член слева появляется из-за взаимодействия внешней границы пограничного слоя с набегающим гиперзвуковым потоком.

4. Для последующего анализа краевой задачи (3.2)–(3.5), (3.7) целесообразно произвести аффинное преобразование переменных. Для этого переменные $t_3, x_3, y_3, u_3, v_3, p_3$ и D относятся к величинам $A/C^{3/2}, A(\gamma-1)^{1/2}/C^{5/4}, A(\gamma-1)^{1/2}/C^{3/4}, C^{1/4}(\gamma-1)^{1/2}, C^{3/4}(\gamma-1)^{1/2}, C^{1/2}$ и $A(\gamma-1)^{1/2}/C^{3/4}$ соответственно, у всех переменных для простоты опускается индекс 3, а для толщины вытеснения пристеночной области $3D$ сохраняется ее прежнее обозначение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$u = v = 0 \quad (y = 0), \quad u \rightarrow y - D \quad (y \rightarrow \infty)$$

$$u \rightarrow y, \quad v \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 0, \quad D \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$p = \frac{dD}{dx} + N_2 \frac{dp}{dx}, \quad N_2 = \frac{LC^{5/4}}{A(\gamma-1)^{1/2}}$$

Здесь параметр N_2 учитывает влияние изменения толщины основной части пограничного слоя области 2 и может принимать положительные или отрицательные значения в зависимости от знака интеграла L (3.6). В точке B (фиг. 2) $|N_2| \approx 1$, и уменьшение величины $|N_2|$ означает смещение по линии BF к точке F .

Решение краевой задачи (4.1) представляется в виде малых возмущений (волн по времени t и продольной координате x) относительно течения в пристеночной части невозмущенного пограничного слоя: $u = v = p = D = 0$

$$p = \alpha \frac{\exp(\lambda t + kx)}{1 - N_2 k}, \quad v = \alpha k f \exp(\lambda t + kx) \quad (4.2)$$

$$u = y - \alpha \frac{df}{dy} \exp(\lambda t + kx), \quad D = \alpha \frac{\exp(\lambda t + kx)}{k}$$

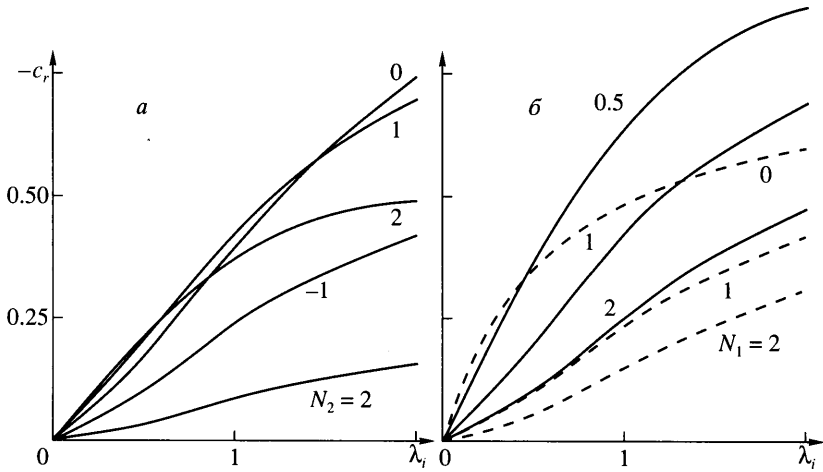
где $f = f(y)$ – комплексная функция действительного переменного, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ и $k = k_r + ik_i$ – комплексные постоянные (λ_r и k_r – инкременты амплитуд возмущений по времени и продольной координате, λ_i – частота, k_i – волновое число), α – комплексная амплитуда волны ($|\alpha| \ll 1$). Соотношения (4.2) позволяют преобразовать краевую задачу (4.1) к обыкновенному дифференциальному уравнению [12, 16], решение которого выражается через функции Эйри $Ai(z)$ и для которого можно получить следующее дисперсионное выражение:

$$(1 - N_2 k) Ai' \left(\frac{\lambda}{k^{2/3}} \right) + k^{4/3} \int_{\lambda/k^{2/3}}^{\infty} Ai(z) dz = 0 \quad (4.3)$$

где выбор $k_r > 0$ обеспечивает выполнение необходимого условия затухания возмущений вверх по потоку при $x \rightarrow -\infty$.

Исследование дисперсионных ветвей (4.3) при $N_2 = 0$, когда возмущение давления создается только за счет изменения толщины пристеночной области 3, выполнено в [12, 15]. Изменение толщины основной части пограничного слоя области 2 учитывалось в [21] при изучении течений, когда самоиндуцированный и внешний градиенты давления одинаковы по порядку величины. Дисперсионное соотношение (4.3) (для $N_2 < 0$) получается также при учете влияния энтропийного слоя на распространение нестационарных возмущений в пограничном слое [22, 23].

Свойства дисперсионных кривых для соотношения (4.3) подробно исследованы в [16]. Их поведение показывает, в целом, что воздействие дозвуковой основной части пограничного слоя при $N_2 > 0$ ослабляет затухание возмущений вверх по потоку и их рост



Фиг. 3. Зависимости отрицательной величины скорости распространения волны $-c_r$ нейтральных по времени возмущений ($\lambda_r = 0$) от частоты λ_i : при различных значениях параметра N_2 (а) или параметра N_1 , указанных у кривых, сплошные кривые – дозвуковая область 2, штриховые кривые – сверхзвуковая область 2 (б)

вниз по потоку, уменьшает их волновое число k_i , а сверхзвуковая основная часть пограничного слоя при $N_2 < 0$ производит обратное воздействие.

На фиг. 3, а показаны зависимости отрицательной величины скорости распространения волны возмущений c_r ,

$$c_r = -\frac{\lambda_r k_r + \lambda_i k_i}{k_r^2 + k_i^2}, \quad c = -\frac{\lambda}{k} = c_r + ic_i \quad (4.4)$$

от частоты λ_i для основного практически важного типа развития нейтральных по времени возмущений (при $\lambda_r = 0$). При всех значениях параметра N_2 величина скорости отрицательная $c_r < 0$ (точка при $\lambda_i = 0$, где $c_r = 0$, соответствует стационарному случаю). Это означает, что для исследуемого режима медленные пристеночные возмущения распространяются от турбулентного участка пограничного слоя, который находится ниже по потоку, навстречу основному течению. Усиление роли сверхзвуковой области 2 ($N_2 < 0$) способствует уменьшению скорости распространения возмущений вверх по потоку. Повышение же влияния дозвуковой области 2 ($N_2 > 0$) приводит к незначительному увеличению скорости при умеренных значениях частоты $\lambda_i \leq 1$ и существенному ее уменьшению при больших значениях λ_i .

5. Если же переменные краевой задачи (3.2)–(3.5), (3.7) $t_3, x_3, y_3, u_3, v_3, p_3$ и D отнести к величинам $A^3(\gamma - 1)/L^2 C^4$, $A^4(\gamma - 1)^2/L^3 C^5$, $A^2(\gamma - 1)/L C^2$, $A(\gamma - 1)/L C$, $|L|C^2/A$, $A^2(\gamma - 1)/L^2 C^2$ и $A^2(\gamma - 1)/|L|C^2$ соответственно, у всех переменных опять опустить индекс 3, а для толщины вытеснения пристеночной области 3 D сохранить ее прежнее обозначение, то уравнения и краевые условия преобразуются к прежнему виду (4.1), а условие для определения самоиндуцированного возмущения давления примет следующую форму

$$N_1 p = \frac{dD}{dx} \pm \frac{dp}{dx}, \quad N_1 = \frac{A^4(\gamma - 1)^2}{L^4 C^5} \quad (5.1)$$

где верхний или нижний знак относится к дозвуковой или сверхзвуковой области 2. Здесь параметр N_1 учитывает взаимодействие пограничного слоя с внешним набегаю-

щим потоком. В точке B (фиг. 2) $N_1 \approx 1$. При смещении по линии BAO вниз к точке A взаимодействие с внешним набегающим потоком ослабляется, параметр N_1 уменьшается, становится несущественным член в левой части соотношения (5.1) и возмущение давления будет определяться из условия взаимной компенсации изменения толщин областей 3 и 2: $D = \mp p$.

Повышение давления $p > 0$ должно тормозить вязкую пристеночную область 3 и вызывать увеличение ее толщины $D > 0$. Так как общая толщина пограничного слоя не должна изменяться, то, следовательно, должна уменьшаться толщина области 2. В дозвуковой невязкой области это, очевидно, приводит к падению давления $p < 0$, а в сверхзвуковой – к его повышению $p > 0$. Это означает, что условие компенсации $D = \mp p$ и соответствующее решение краевой задачи (4.1) могут реализоваться совместно только для сверхзвуковой области 2 (для дозвуковой области 2 возможно только тривиальное нулевое решение).

Возрастание параметра N_1 соответствует смещению от точки B вверх к точке E по линии BE . Однако, как было показано выше, здесь нет нетривиальных режимов развития возмущений, и поэтому параметр N_1 может принимать только конечные значения $N_1 \geq 1$.

Решение краевой задачи (4.1) (без условия для определения давления) и (5.1) представляется в виде малых возмущений (волн по времени t и по продольной координате x) относительно течения в пристеночной части невозмущенного пограничного слоя: $u = y$, $v = p = D = 0$

$$p = \alpha \frac{\exp(\lambda t + kx)}{N_1 \mp k}, \quad v = \alpha k f \exp(\lambda t + kx) \quad (5.2)$$

$$u = y - \alpha \frac{df}{dy} \exp(\lambda t + kx), \quad D = \alpha \frac{\exp(\lambda t + kx)}{k}$$

Соотношения (5.2) позволяют преобразовать (4.1) и (5.1) к обыкновенному дифференциальному уравнению и получить для него схожее дисперсионное выражение

$$(N_1 \mp k) \text{Ai}'\left(\frac{\lambda}{k^{2/3}}\right) + k^{4/3} \int_{\lambda/k^{2/3}}^{\infty} \text{Ai}(z) dz = 0 \quad (5.3)$$

решение которого необходимо рассматривать также при $k_r > 0$.

Асимптотическое представление функции Эйри $\text{Ai}(z)$ при $|z| \gg 1$ на комплексной плоскости z с вырезанной отрицательной вещественной полуосью [24]

$$\text{Ai}(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \quad (5.4)$$

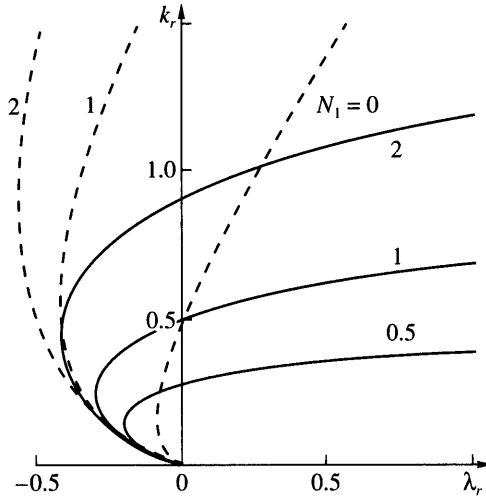
позволяет получить при $|\lambda/k^{2/3}| \gg 1$ асимптотический вид соотношения (5.3)

$$k^2 \pm \lambda k - N_1 \lambda = 0$$

и его приближенные решения для дозвуковой или сверхзвуковой в целом основной части пограничного слоя области 2

$$k \approx N_1 - \frac{N_1^2}{\lambda} \quad (|\lambda| \gg 4N_1), \quad k \approx N_1^{1/2} \lambda^{1/2} - \frac{\lambda}{2} \quad (|\lambda| \ll 4N_1) \quad (5.5)$$

$$k \approx \lambda + N_1 \quad (|\lambda| \gg 4N_1), \quad k \approx N_1^{1/2} \lambda^{1/2} + \frac{\lambda}{2} \quad (|\lambda| \ll 4N_1) \quad (5.6)$$



Фиг. 4. Зависимости пространственного инкремента k_r от временного инкремента λ_r при различных значениях параметра N_1 , указанных у кривых, и нулевых значениях волнового числа и частоты $k_i = \lambda_i = 0$. Сплошные кривые – дозвуковая область 2, штриховые кривые – сверхзвуковая область 2

Соотношения (5.5) или (5.6) показывают еще раз, что нетривиальное решение задачи (4.1), (5.1) при $N_1 \rightarrow 0$ или условия взаимной компенсации изменения толщин областей 3 и 2 $D = \mp p$ возможно только для сверхзвуковой области 2.

Решения (5.2), (5.3) при $\lambda_i = k_i = 0$, когда возмущения изменяются только экспоненциально по времени t и по продольной координате x , могут быть интерпретированы как бегущие волны со скоростью распространения $c_r = -\lambda_r/k_r$. Дисперсионные кривые для соотношения (5.3) представлены на фиг. 4, где показаны зависимости пространственного инкремента k_r от временного инкремента λ_r при различных значениях параметра N_1 . Видно, что и точное численное нетривиальное решение для соотношения (5.3) при условии взаимной компенсации изменений толщин областей 3 и 2 возможно только для сверхзвуковой области 2.

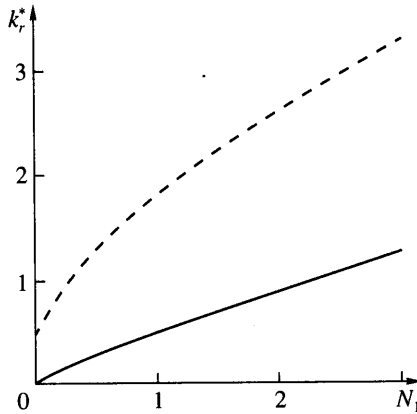
Для стационарных течений при $\lambda_r = 0$ из соотношения (5.3) можно получить трансцендентное уравнение для определения величины $k_r = k_r^*$

$$k_r^{*4/3} + \frac{3^{2/3}}{\Gamma(1/3)}(\pm k_r^* - N_1) = 0 \quad (5.7)$$

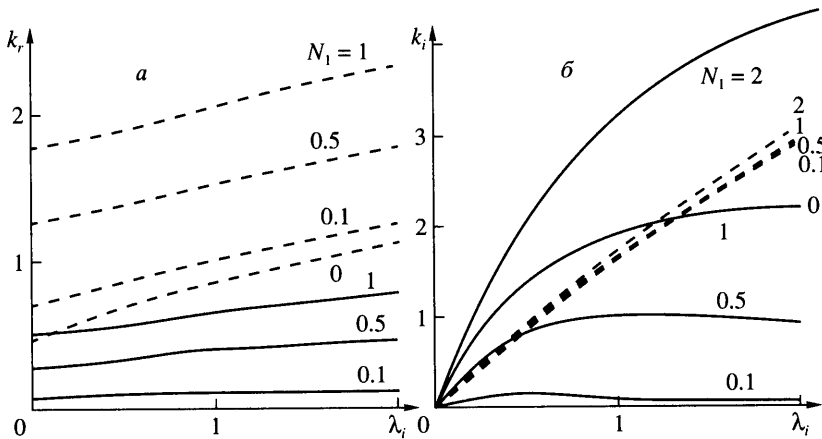
где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Результаты численного решения (5.7) представлены на фиг. 5. Из вида кривых на фиг. 4 и 5 следует, что усиление взаимодействия пограничного слоя с внешним гиперзвуковым потоком (рост параметра N_1) приводит к увеличению значений k_r и для дозвуковой и сверхзвуковой области 2, и к соответствующему ослаблению распространения возмущений вверх по потоку и к более сильному их росту вниз по потоку. Таким образом, возмущенное течение в целом все более приобретает черты сверхзвукового течения (даже при дозвуковой области 2).

Часть кривых на фиг. 4 при $\lambda_r > 0$ соответствует возмущениям, которые распространяются вверх по потоку, так как для них $c_r = -\lambda_r/k_r < 0$, а другая их часть при $\lambda_r < 0$ и $c_r > 0$ – возмущениям, которые сносятся вниз по потоку. Вообще же соотношение (5.3) допускает решение при

$$(N_1 \mp k) \text{Ai}'\left(\frac{\lambda}{k^{2/3}}\right) < 0$$



Фиг. 5. Зависимости пространственного инкремента k_r^* от параметра N_1 для стационарных течений ($k_i = \lambda_r = \lambda_i = 0$), сплошная кривая – дозвуковая область 2, штриховая кривая – сверхзвуковая область 2



Фиг. 6. Дисперсионные кривые для нейтральных по времени возмущений ($\lambda_r = 0$) при различных значениях параметра N_1 , указанных у кривых, сплошные кривые – дозвуковая область 2, штриховые кривые – сверхзвуковая область 2: $k_r(\lambda_i)$ (а) и $k_i(\lambda_i)$ (б), значения k_i для дозвуковой области 2 увеличены в 10 раз

Поэтому, очевидно, возможно еще существование ветвей дисперсионных кривых при $\lambda_r < 0$ и $\lambda_r/k_r^{2/3} < 0$ (см. также [15]).

Дисперсионные кривые для нейтральных по времени возмущений при нулевом значении временного инкремента $\lambda_r = 0$ представлены на фиг. 6. Изменение параметра N_1 оказывает на зависимости пространственного инкремента k_r от частоты λ_i такое же воздействие, что и на кривые на фиг. 4 и 5. Для растущих по времени возмущений при $\lambda_r > 0$ все штриховые кривые (для сверхзвуковой области 2) соответственно смещаются вверх, а сплошные кривые (для дозвуковой области 2) практически остаются на месте.

Заметна очень слабая зависимость величины волнового числа k_i от параметра N_1 для сверхзвуковой области 2 и стремление решения к тривиальному нулевому при дозву-

ковой области 2 и уменьшении величины N_1 (значения k_i для дозвуковой области 2, сплошные линии, увеличены в 10 раз). Для растущих по времени возмущений при $\lambda_r > 0$ все штриховые кривые смещаются очень незначительно, а все сплошные кривые располагаются соответственно ниже.

На фиг. 3, б показаны зависимости отрицательной величины скорости распространения волны возмущений c_r от частоты λ_i для нейтральных по времени возмущений ($\lambda_r = 0$). При всех значениях параметра N_1 величина скорости отрицательная $c_r < 0$ (точка при $\lambda_i = 0$, где $c_r = 0$, соответствует стационарному случаю). Это означает, что и для исследуемого режима компенсации медленные пристеночные возмущения также распространяются от турбулентного участка пограничного слоя, который находится ниже по потоку, навстречу основному течению. Заметно, что усиление взаимодействия пограничного слоя с внешним гиперзвуковым потоком (рост параметра N_1) приводит к уменьшению скорости распространения возмущений вверх по потоку при дозвуковой или сверхзвуковой области 2.

Заключение. Выявлены основные механизмы развития пристеночных возмущений в гиперзвуковом пограничном слое, построена схема возмущенного течения, сформулированы соответствующие краевые задачи, найдены определяющие параметры подобия и выполнен анализ основных свойств решений в линейном приближении. Показано, что медленные пристеночные возмущения распространяются от участка турбулентного течения навстречу набегающему потоку.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 04-01-00474) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-2001.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Линь Цзя-цзяо*. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
2. *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verhandl. III Intern. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. Leipzig: Teubner, 1905. S. 484–491.
3. *Нейланд В.Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
4. *Stewartson K., Williams P.G.* Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
5. *Messiter A.F.* Boundary layer near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
6. *Нейланд В.Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
7. *Гогин Л.В., Нейланд В.Я., Степанов Г.Ю.* Теория двумерных отрывных течений // Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика. М.: ВИНТИ, 1975. Т. 8. С. 5–73.
8. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 456 с.
9. *Schneider W.* Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. Pt 3. P. 465–485.
10. *Brown S.N., Daniels P.G.* On the viscous flow about the trailing edge of a rapidly oscillating plate // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. Pt 4. P. 743–761.
11. *Рыжов О.С.* Уравнение нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 4. С. 780–783.
12. *Рыжов О.С., Терентьев Е.Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 1007–1023.
13. *Рыжов О.С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околосзвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
14. *Smith F.T.* On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 366. № 1724. P. 91–109.

15. Жук В.И., Рыжов О.С. О решениях дисперсионного уравнения из теории свободного взаимодействия пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1085–1088.
16. Боголепов В.В., Нейланд В.Я. Волны Толлмина–Шлихтинга в пограничном слое около охлаждаемой поверхности в гиперзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 69–81.
17. Нейланд В.Я. Особенности отрыва пограничного слоя на охлаждаемом теле и его взаимодействие с гиперзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 99–109.
18. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
19. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 311 с.
20. Crocco L. Considerations on the shock-boundary layer interaction // Proc. Conf. on High-Speed Aeronaut. Brooklin: Polytech. Inst. Brooklin, 1955. P. 75–112.
21. Кабин К.С., Липатов И.И. К теории устойчивости сверхзвуковых и гиперзвуковых пограничных слоев // Аэромеханика и газовая динамика. 2001. № 1. С. 3–10.
22. Соколов Л.А. Влияние энтропийного слоя на распространение нестационарных возмущений в пограничном слое // ПМТФ. 1983. № 2. С. 50–53.
23. Соколов Л.А. О влиянии энтропийного слоя на распространение нестационарных возмущений в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПМТФ. 1984. № 3. С. 51–53.
24. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. А. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва
E-mail: vld.bogol@mtu-net.ru

Поступила в редакцию
13.IV.2004