

СВОБОДНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗ ВОДОТОКОВ

Рассматривается свободная фильтрация из естественных и искусственных водотоков, имеющих криволинейные профили. С помощью представления на плоскости переменной Жуковского осевых форм профилей водотока уравнением семейства лемнискат и с использованием метода конформных отображений получено строгое гидромеханическое решение задачи свободной фильтрации из водотока. Приведены расчетные зависимости для определения всех необходимых параметров фильтрационного потока и построения криволинейных профилей водотоков. Для случая круговой основы формы профиля водотока на плоскости переменной Жуковского указанные зависимости совпадают с известными точными их значениями.

Ключевые слова: свободная фильтрация, фильтрационные потери, конформные отображения, основы формы профиля водотока.

Свободная фильтрация из водотоков (рек, каналов, водоемов, накопителей и др.) (фиг. 1) возникает в случаях достаточно глубокого залегания грунтовых вод, наличия сильнопроницаемого дренажного прослоя в толще грунтов основания и т.д. При этом важное значение для проектирования водотоков и оценки их влияния на окружающую среду имеет правильное определение основных параметров свободной фильтрации, таких как фильтрационный расход, положение депрессионной поверхности, значения напоров и скоростей фильтрации и др.

В связи со значительной протяженностью рассматриваемых водотоков фильтрацию из них в большинстве случаев можно рассматривать как плоскую.

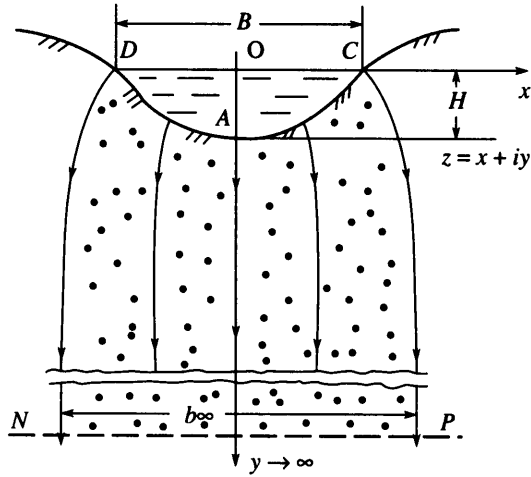
Расчетами свободной фильтрации из водотоков занимались многие исследователи, но первыми эту задачу в гидромеханической постановке с использованием полуобратного приема рассмотрели Ведерников В.В. [1], Kozeny J. [2] и Павловский Н.Н. [3]. В [1, 3] задавалась круговая основа формы профиля водотока в плоскости переменной Жуковского Н.Е. [4, с. 155]:

$$\theta = z - iw = (x + \psi) + i(y - \varphi) = \theta_1 + i\theta_2 \quad (1)$$

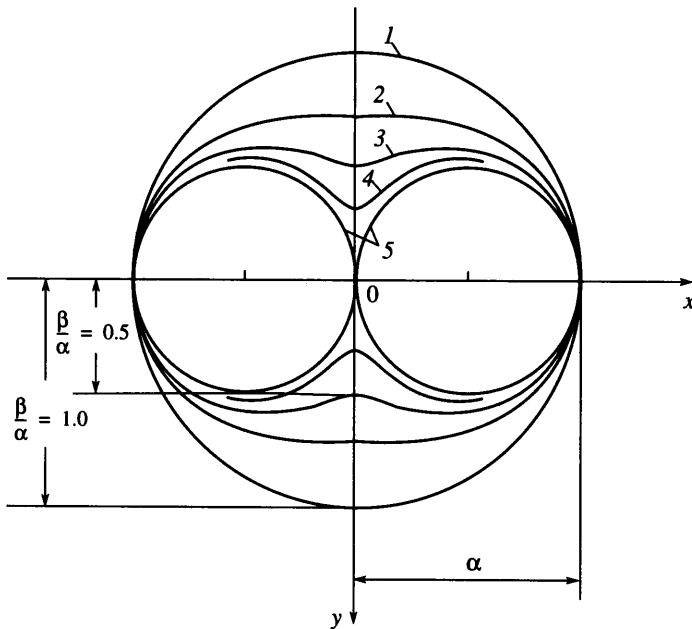
Здесь $z = x + iy$ – комплексная координата в плоскости фильтрации (фиг. 1); $w = \varphi + i\psi$ – плоскость приведенного комплексного потенциала φ напорной функции, ψ функции тока $w = w_a/k$; $\varphi = \varphi_a/k$ и $\psi = \psi_a/k$, где величины с индексом a – физические значения этих параметров [3, с. 425, 439], k – коэффициент фильтрации, θ_2 и θ_1 задают линии равного давления (пьезометрическую высоту) и ортогональные им линии (сопряженную высоту давления) [1, 4].

Область комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$, соответствующая принятому расположению координатных осей в области фильтрации z , представлена горизонтальной положительной полуполосой, ширина которой равна приведенному фильтрационному расходу $Q = Q_a/k$ с мнимой осью ψ , направленной вниз.

В частности, для круговой основы формы в виде полукруга в [1, 3] получены решения задачи свободной фильтрации из канала с последующим построением его криволинейного профиля. Основной недостаток указанных решений: для заданного отношения B/H , где B и H – ширина по урезу воды и глубина по оси канала, они дают только один вариант криволинейного профиля водотока в виде укороченной циклоиды (дуги трохойды) [4–6]. Между тем при одном и том же значении B/H реальные профили водотоков могут иметь множество разных очертаний, что предопределяет и раз-



Фиг. 1. Схема свободной фильтрации из водотока



Фиг. 2. Графики обратных эллипсов (уравнение (2)): $\beta/\alpha = 1; \sqrt{0.5}; 0.5; 0.3; 0$ (кривые 1–5)

личные характеристики их фильтрационных потоков. Так, например, величины расходов фильтрации при этом могут различаться до 40%.

Цель настоящей работы – восполнение в некоторой степени указанного пробела.

Рассмотрим уравнение семейства лемнискат, которое можно получить инверсией эллипса (т.е. множество полученных при этом замкнутых кривых является “обратными эллипсами”) (фиг. 2):

$$(x^2 + y^2)^2 - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 = 0 \tag{2}$$

где α и β являются горизонтальной (ось x) и вертикальной (ось y) полуосями “обратных эллипсов”.

При $\beta = 0$ уравнение (2) дает две соприкасающиеся на оси x окружности с диаметрами α . При изменении β в интервале $0 \leq \beta \leq \alpha$ указанные окружности, сливаясь между собой, “дорастают” до общей окружности диаметром 2α (при $\alpha = \beta$). Значение $\beta = \sqrt{0.5}\alpha$ соответствует граничной лемнискате при переходе от “овала с талией” [7] к овалу.

Аналогичные обратные эллипсы, но вытянутые вдоль оси y , получаются при изменении параметра α в интервале $0 \leq \alpha \leq \beta$.

При конформном отображении инверсией внутренние области указанных лемнискат переводятся на внешности эллипсов. Учитывая это свойство, примем за основу формы водотока в нижней полуплоскости переменной Жуковского в виде области, ограниченной кривой (фиг. 3, а)

$$\theta_2 = \sqrt{\frac{(2\theta_1^2 - \beta^2)^2 - 4\theta_1^2(\theta_1^2 - \alpha^2) - (2\theta_1^2 - \beta^2)}{2}} \quad (3)$$

При этом имеем (фиг. 1 и 3):

Точки	x	y	ψ	φ	θ_1	θ_2
С:	$B/2$	0	$-Q/2$	0	$-\frac{(Q-B)}{2} = -\alpha$	0
Д:	$-B/2$	0	$Q/2$	0	$\frac{(Q-B)}{2} = \alpha$	0
А:	0	H	0	0	0	$H = \beta$

Из этих зависимостей найдем выражение для определения фильтрационного расхода в виде

$$Q = B + 2H\alpha/\beta \quad (4)$$

При $\alpha/\beta = 1$ (для круговой основы формы профиля водотока) из (4) получаем формулы [1–3, 5, 6, 8].

Максимальная ширина фильтрационного потока на значительной (бесконечной) глубине b_∞ (при градиенте напора равном 1) равна (фиг. 1) $b_\infty = Q$.

Точки P и N имеют координаты (фиг. 1 и 3)

$$x = \pm b_\infty/2 = \pm Q/2; \quad y = \infty; \quad \psi = \mp Q/2; \quad \varphi = \infty; \quad \theta_1 = 0; \quad \theta_2 = 0$$

где верхние знаки для точки P , а нижние – для точки N .

Если полученную таким образом область в нижней полуплоскости θ конформно отобразим отрицательной инверсией $\zeta_0 = -1/\theta$ на область $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$, то получим верхнюю полуплоскость области ζ_0 с вырезанным полуэллипсом $C - A - D$ (фиг. 3, б), полуоси которого $a = 1/\alpha$; $b = 1/\beta$.

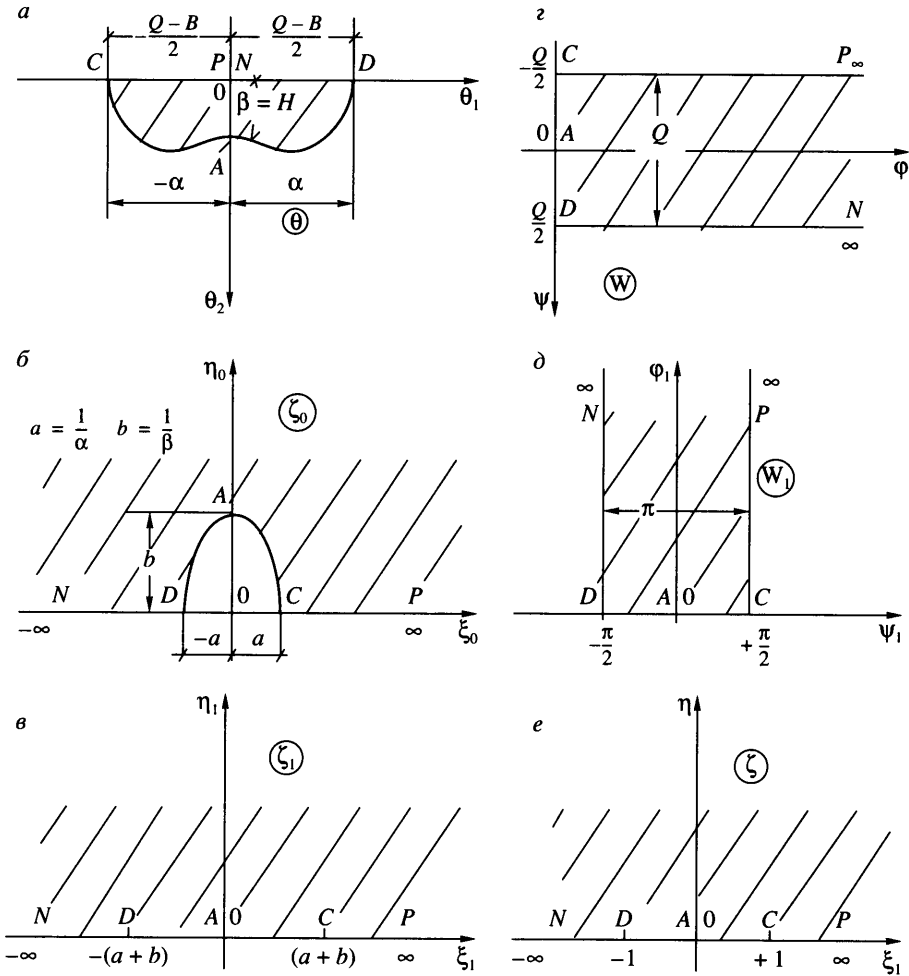
При этом указанные выше точки имеют координаты:

точки C и D : $\theta = \mp\alpha$; $\zeta_0 = \pm 1/\alpha = \pm a$; точка A : $\theta = i\beta$; $\zeta_0 = i/\beta = ib$; точки P и N : $\theta = 0$; $\zeta_0 = \pm\infty$, где верхние знаки для точек C и P , а нижние – для точек D и N .

Область $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ с вырезанным полуэллипсом $C - A - D$ отобразим на верхнюю полуплоскость $\zeta_1 = \zeta_1 + i\eta_1$, (фиг. 3, в) [9]:

$$\zeta_1 = \zeta_0 + \frac{(a+b)b}{\zeta_0 \pm \sqrt{\zeta_0^2 + b^2 - a^2}}$$

где верхний знак – для $\xi_0 \geq 0$, а нижний – для $\xi_0 < 0$.



Фиг. 3. Схема последовательных конформных отображений

Связь области $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ с областью приведенного комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ (фиг. 3, з) устанавливается путем последовательных конформных отображений их на вспомогательные комплексные области $w_1 = \psi_1 + i\phi_1$ (фиг. 3, д) и $\zeta = \xi + i\eta$ (фиг. 3, е) с помощью функций $w_1 = i(\pi/Q)w$; $\zeta = \sin w_1$ и $\zeta = \zeta_1/(a+b)$.

В результате получим

$$w = \varphi + i\psi = i\frac{Q}{\pi} \arcsin \left[\frac{1}{\theta(a+b)} + \frac{b}{1/\theta \mp \sqrt{1/\theta^2 + b^2 - a^2}} \right] \quad (5)$$

Здесь верхний знак – для $\theta_1 \leq 0$, а нижний – для $\theta_1 > 0$.

Отделяя вещественную и мнимую части зависимости (5) имеем

$$\varphi = \frac{Q}{\pi} \operatorname{arch} \frac{M}{2}; \quad \psi = -\frac{Q}{\pi} \arcsin \frac{2\xi}{M} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 M &= \sqrt{(1+\xi)^2 + \eta^2} + \sqrt{(1-\xi)^2 + \eta^2}; \quad \xi = \xi_1/(a+b); \quad \eta = \eta_1/(a+b) \\
 \xi_1 &= \xi_0 + \frac{b(a+b)(\xi_0 \pm \lambda_1)}{(\xi_0 \pm \lambda_1)^2 + (\eta_0 + \lambda_2)^2}; \quad \eta_1 = \eta_0 - \frac{b(a+b)(\eta_0 + \lambda_2)}{(\xi_0 \pm \lambda_1)^2 + (\eta_0 + \lambda_2)^2} \\
 \lambda_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} + \delta_1}{2}}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} - \delta_1}{2}}; \quad \delta_1 = \xi_0^2 - \eta_0^2 + b^2 - a^2 \quad \delta_2 = 2\xi_0\eta_0 \\
 \xi_0 &= -\frac{\theta_1}{\theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \eta_0 = \frac{\theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \theta_1 = x + \psi; \quad \theta_2 = y - \varphi
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь верхние знаки – для $\xi_0 \geq 0$, а нижние – для $\xi_0 < 0$.

При $\eta = 0$ получим

$$M = 2; \quad \psi = -Q/\pi \arcsin \xi; \quad \varphi = 0 \quad (|\xi| \leq 1)$$

$$M = 2|\xi|; \quad \psi = \mp Q/2; \quad \varphi = Q/\pi \operatorname{arch} |\xi| \quad (|\xi| > 1)$$

Здесь верхний знак – для $\xi > 0$, а нижний – для $\xi < 0$.

Полученные расчетные зависимости позволяют решать множество различных задач свободной фильтрации из водотоков, в том числе:

1. Построение различных криволинейных очертаний профилей водотока для заданной величины B/H , соответствующих принятым значениям как фильтрационного расхода Q и максимальной ширины растекания фильтрационного потока b_∞ , так и отношения α/β .

2. Построение гидродинамической сетки и определение основных параметров фильтрационного потока (напоров, расходов, скоростей фильтрации, давлений и т.д.) во всей области фильтрации для рассчитанного криволинейного профиля водотока.

3. Подбор расчетного профиля водотока с максимальным приближением к реальному желаемому очертанию [8] с последующим нахождением для него необходимых фильтрационных характеристик.

При построении профиля водотока и депрессионных поверхностей формулы (6), (7) упрощаются:

$$\varphi = \eta_1 = \eta = 0; \quad \psi = -Q/\pi \arcsin \xi \quad \theta_2 = \eta_0 = \eta_1 = \eta = 0;$$

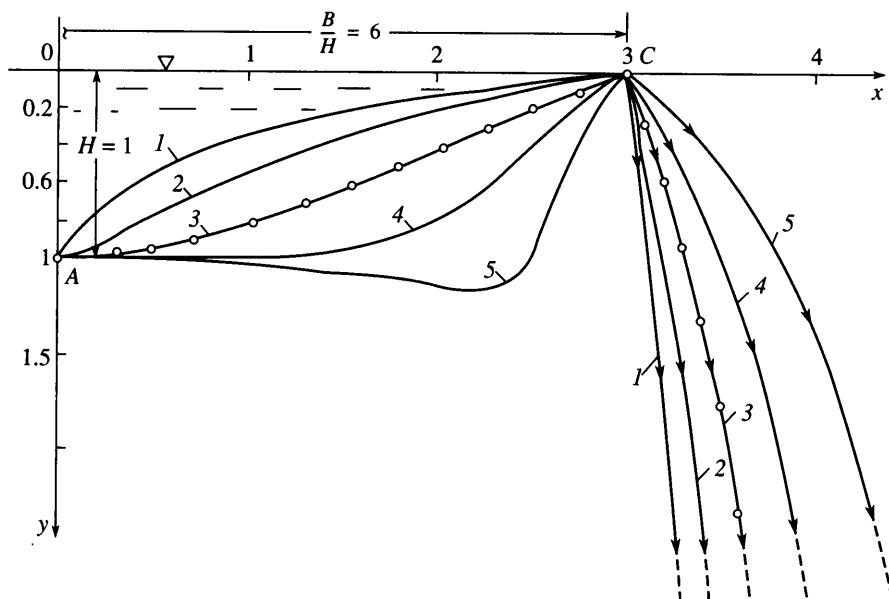
$$\varphi = Q/\pi \operatorname{arch} |\xi|; \quad \psi = \mp Q/2$$

Здесь верхний знак – для $\xi > 0$, а нижний – для $\xi < 0$.

В случае $\alpha = \beta$ уравнение (2) в плоскости переменной Жуковского Н.Е. дает круговую основу формы, расчетные зависимости (6), (7) совпадают с решениями [1, 3].

На фиг. 4 приведены очертания профилей и депрессионных поверхностей, построенные по формулам (6), (7) для правой половины симметричного водотока с отношением $B/H = 6$ при $\alpha/\beta = 0.5; \sqrt{0.5}; 1.0; \sqrt{2}; 2.0$ и значениях фильтрационных расходов $Q = 7.0; 7.414; 8.0; 8.828; 10.0$.

Как следует из фиг. 4, очертание профиля водотока оказывает значительное влияние на параметры фильтрационного потока из него. В частности, для рассмотренного случая водотока с $B/H = 6$ при различных его профилях ($\alpha/\beta = 0.5$ и 2.0) увеличение величины расхода и ширины растекания фильтрационного потока составляет 42.8%.



Фиг. 4. Расчетные очертания криволинейных профилей водотока при $B/H = 6$ и $\alpha/\beta = 0.5$; $\sqrt{0.5}$; 1.0; $\sqrt{2}$; 2.0 (кривые 1–5)

Заключение. Получено точное решение задачи свободной фильтрации для семейства симметричных профилей водотока при заданном отношении ширины к глубине, прообразом которых на плоскости переменной Жуковского служит семейство лемнискат. Определены все параметры фильтрационного потока. Для частного случая прообраза круговой основы формы результаты построенного решения совпадают с известными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ведерников В.В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Гостройиздат, 1939. 248 с.
2. Kozeny J. Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss – und Kanalversickerung // Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1931. Bd 26. H. 3. S. 28–31.
3. Павловский Н.Н. Собрание сочинений. Т. 2. Движение грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 771 с.
4. Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
5. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
6. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
7. Микиша А.М., Оролов В.Б. Толковый математический словарь. Основные термины. М.: Рус. яз., 1988. 242 с.
8. Кочина П.Я. Гидродинамика и теория фильтрации. М.: Наука, 1991. 351 с.
9. Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А. Конформные отображения физико-топологических моделей. Киев: Наук. думка, 1990. 374 с.