

УДК 532.529

© 2004 г. В. М. АЛИПЧЕНКОВ, Л. И. ЗАЙЧИК

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ ЧАСТИЦ В АНИЗОТРОПНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Представлена статистическая модель для континуального описания транспорта и дисперсии инерционных частиц в анизотропных сдвиговых турбулентных потоках. Модель основана на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности скорости частиц. Отличие от предыдущих статистических кинетических моделей заключается в учете анизотропии лагранжевых автокорреляционных функций и временных масштабов турбулентности. Развита модель используется для расчета пульсаций скоростей дисперсной фазы в однородном сдвиговом потоке. Полученные результаты сравниваются с известными из литературы данными прямого численного моделирования.

*Ключевые слова:* анизотропный турбулентный поток, частицы, функция плотности вероятности, статистическая модель, кинетическое уравнение.

**1. Корреляционные функции и временные масштабы.** Лагранжевы корреляции пульсаций скорости несущего потока играют определяющую роль при описании взаимодействия частиц с турбулентными вихрями, а следовательно, и при моделировании переноса и дисперсии частиц в турбулентных потоках. В изотропной турбулентности лагранжевы корреляционный момент второго порядка обычно определяется как

$$B_{Lij}(\tau) = \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{R}(t - \tau), t - \tau) \rangle = \langle u'_i u'_j \rangle \Psi_L(\tau), \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{x}, \quad \langle u'_i u'_j \rangle = u'^2 \delta_{ij} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{R}$  – вектор траектории элемента сплошной среды,  $u'^2$  – интенсивность пульсации скорости сплошной среды,  $\Psi_L(\tau)$  – скалярная автокорреляционная функция, характе-

ризуемая интегральным временным масштабом турбулентности  $T_L = \int_0^{\infty} \Psi_L(\tau) d\tau$ . Наибо-

лее часто используемой в литературе аппроксимацией для автокорреляционной функции является экспоненциальная зависимость

$$\Psi_L(\tau) = \exp(-\tau T_L^{-1}) \quad (1.2)$$

Формула (1.2) хорошо описывает экспериментальные данные и результаты прямого численного моделирования при относительно больших числах Рейнольдса за исключением малых значений  $\tau/T_L$ . В изотропной турбулентности временной масштаб  $T_L$  может быть выражен через кинетическую энергию турбулентности  $k$  и скорость ее диссипации  $\epsilon$  при помощи соотношения  $T_L = 4k/3C_0\epsilon$ , где  $C_0$  – постоянная Колмогорова в лагранжевой структурной функции второго порядка. Величина  $C_0$  зависит от числа Рейнольдса при конечных его значениях, однако является универсальной константой в пределе больших чисел Рейнольдса.

В анизотропной турбулентности естественным обобщением (1.1) является соотношение

$$B_{Lij}(\tau) = \langle u'_i u'_k \rangle \Psi_{Lkj}(\tau) \quad (1.3)$$

В соответствии с (1.3) тензорная автокорреляционная функция определяется как [1]

$$\Psi_{Lkj}(\tau) = \langle u'_i u'_k \rangle^{-1} B_{Lij}(\tau)$$

где  $\langle u'_i u'_k \rangle^{-1}$  обозначает обратный тензор к напряжениям Рейнольдса. Основываясь на  $\Psi_{Lij}(\tau)$ , можно определить лагранжевы интегральные временные масштабы

$$T_{Lij} = \int_0^{\infty} \Psi_{Lij}(\tau) d\tau$$

В изотропной турбулентности автокорреляционная функция и временные масштабы представляются в виде

$$\Psi_{Lij}(\tau) = \Psi_L(\tau) \delta_{ij}, \quad T_{Lij} = T_L \delta_{ij} \quad (1.4)$$

Таким образом, в изотропной турбулентности статистика Лагранжа характеризуется скалярной автокорреляционной функцией  $\Psi_L(\tau)$  и соответственно единственным временным масштабом  $T_L$ . Напротив, в анизотропном турбулентном поле статистика Лагранжа описывается тензорами  $\Psi_{Lij}(\tau)$  и  $T_{Lij}$ , которые могут быть анизотропными и несимметричными. Следовательно, теоретические модели для расчета переноса и дисперсии частиц в реальных турбулентных потоках должны учитывать анизотропию масштабов турбулентности. Действительно, несколько известных лагранжевых моделей (например, [2–4]), основанных на расчете движения частиц по траекториям, принимают этот эффект во внимание. Однако практически все известные эйлеровы модели, базирующиеся на континуальном описании ансамбля частиц (дисперсной фазы), хотя и учитывают анизотропию турбулентных напряжений, используют допущение об изотропности автокорреляционной функции и тем самым полностью игнорируют эффект анизотропии масштабов турбулентности. В действительности же учет анизотропии  $T_{Lij}$  при моделировании переноса и дисперсии частиц оказывается не менее важным, чем анизотропии  $\langle u'_i u'_k \rangle$ .

Цель настоящей статьи – дальнейшее развитие континуального подхода к моделированию движения и дисперсии инерционных частиц в турбулентных потоках. Развиваемый метод основан на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности распределения скорости частиц в случайном гауссовом поле. Представленная в [5, 6] кинетическая модель расширяется с целью учета анизотропии временных масштабов турбулентности. В качестве примера приложения развиваемой модели рассматривается движение частиц в однородном сдвиговом турбулентном потоке.

**2. Основные уравнения.** Движение небольшой тяжелой частицы в турбулентном потоке описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{R}_p}{dt} = \mathbf{v}_p, \quad \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R}_p, t) - \mathbf{v}_p}{\tau_p} + \mathbf{F} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{R}_p$  и  $\mathbf{v}_p$  – координата и скорость частицы,  $\mathbf{u}(\mathbf{R}_p, t)$  – скорость сплошной среды в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{R}_p(t)$ ,  $\tau_p$  – время динамической релаксации частицы,  $\mathbf{F}$  – ускорение внешней силы, действующей на частицу (например, силы тяжести).

Одноточечная функция плотности вероятности скорости частиц вводится как

$$P = \langle p \rangle = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p(t)) \rangle \quad (2.2)$$

где осреднение выполняется по ансамблю случайных реализаций поля скорости несущей сплошной среды. Согласно (2.2), функция плотности вероятности  $P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  определяется как плотность вероятности частицы находиться в точке  $\mathbf{x}$  со скоростью  $\mathbf{v}$  в момент времени  $t$ . Дифференцируя (2.2) по времени с учетом (1.2), получим транспортное уравнение для функции плотности вероятности

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \left[ \left( \frac{U_k - v_k}{\tau_p} + F_k \right) P \right] = -\frac{1}{\tau_p} \frac{\partial \langle u'_k p \rangle}{\partial v_k} \quad (2.3)$$

Члены в левой части уравнения (2.3) описывают эволюцию во времени и конвекцию в фазовом пространстве  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , в то время как член в правой части характеризует взаимодействие между частицами и турбулентными вихрями несущего потока. Для замыкания уравнения (2.3) необходимо определить корреляцию между пульсациями скорости сплошной среды и плотностью вероятности скорости частицы  $\langle u'_k p \rangle$ . С этой целью поле скорости сплошной среды моделируется случайным гауссовым процессом с известными корреляционными моментами. В этом случае, привлекая формулу Фурутцу–Новикова для случайных гауссовых функций [7], получаем

$$\langle u'_i p \rangle = \iint \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_k(\mathbf{x}_1, t_1) \rangle \left\langle \frac{\delta p(\mathbf{x}, t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_1 dt_1} \right\rangle d\mathbf{x}_1 dt_1 \quad (2.4)$$

$$\left\langle \frac{\delta p(\mathbf{x}, t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_1 dt_1} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle p(\mathbf{x}, t) \frac{\delta R_{pj}(t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_1 dt_1} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial v_j} \left\langle p(\mathbf{x}, t) \frac{\delta v_{pj}(t)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_1 dt_1} \right\rangle$$

Для нахождения функциональных производных в (2.4) используются решения уравнений (2.1), представленные в форме интегралов вдоль траектории частицы

$$\mathbf{R}_p(t) = \int_0^t \mathbf{v}_p(t_1) dt_1, \quad \mathbf{v}_p(t) = \int_0^t \varphi(t-t_1) [\mathbf{u}(\mathbf{R}_p(t_1), t_1) + \tau_p \mathbf{F}] dt_1, \quad \varphi(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \quad (2.5)$$

где  $\varphi(t)$  обозначает функцию Грина.

Применяя оператор функционального дифференцирования к (2.5), получаем систему интегральных уравнений относительно функциональных производных

$$\begin{aligned} \frac{\delta R_{pi}(t)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_1 dt_1} &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_p(t_1)) \int_{t_1}^t \varphi(t-t_2) dt_2 + \\ &+ \iint_{t_1 t_2}^t \varphi(t-t_3) dt_3 \frac{\partial u_i(\mathbf{R}_p(t_2), t_2)}{\partial x_n} \frac{\delta R_{pn}(t_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_1 dt_1} dt_2 \\ \frac{\delta v_{pi}(t)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_1 dt_1} &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_p(t_1)) \varphi(t-t_1) H(t-t_1) + \\ &+ \int_{t_1}^t \varphi(t-t_2) \frac{\partial u_i(\mathbf{R}_p(t_2), t_2)}{\partial x_n} \frac{\delta R_{pn}(t_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_1 dt_1} dt_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $H(x)$  – функция Хевисайда:  $H(x < 0) = 0, H(x > 0) = 1$ .

Для решения уравнений (2.6) используется итерационная процедура, примененная ранее в [5, 6]. Далее, осредняя функциональные производные с учетом плотности вероятности скорости частиц, представим выражение (2.4) в виде

$$\begin{aligned}
 \langle u'_i p \rangle = & \\
 = & - \int_{t_1}^t \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_k(\mathbf{R}_p(t_1), t_1) \rangle \int_{t_1}^t \left[ \delta_{jk} \varphi(t-t_2) + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \int_{t_2}^t \varphi(t-t_3) \int_{t_2}^{t_3} \varphi(t_3-t_4) dt_4 dt_3 \right] dt_2 dt_1 \frac{\partial P}{\partial x_j} - \\
 & - \int_{t_1}^t \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_k(\mathbf{R}_p(t_1), t_1) \rangle \left[ \delta_{jk} \varphi(t-t_1) + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \int_{t_1}^t \varphi(t-t_2) \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t_2-t_3) dt_3 dt_2 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t \varphi(t-t_3) \int_{t_2}^{t_3} \varphi(t_3-t_4) dt_4 dt_3 dt_2 \right] dt_1 \frac{\partial P}{\partial v_j} = -\tau_p G_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial P}{\partial x_j} - F_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial P}{\partial v_j}
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь величины  $G_{ij}$  и  $F_{ij}$  обозначают интегралы от вторых корреляционных моментов пульсаций скорости сплошной среды вдоль траекторий частиц. С целью вычисления этих интегралов лагранжев корреляционный момент пульсаций скорости сплошной среды вдоль траекторий частиц

$$B_{Lp ij}(\tau) = \langle u'_i(\mathbf{x}) u'_j(\mathbf{R}_p(t-\tau), t-\tau) \rangle, \quad \mathbf{R}_p(t) = \mathbf{x}$$

представляется в виде

$$B_{Lp ij}(\tau) = \left[ \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial t} + V_n \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial x_n} + \frac{\partial \langle u'_i u'_k v'_n \rangle}{\partial x_n} \right) \right] \Psi_{Lpkj}(\tau) \quad (2.8)$$

Величина  $\Psi_{Lp ij}(\tau)$  в (2.8) обозначает лагранжеву автокорреляционную функцию пульсаций скорости сплошной среды, определенную вдоль траектории частицы. Выражение (2.8) содержит дополнительный транспортный член, введенный в [8], по сравнению с аппроксимацией (1.3). Этот дополнительный член учитывает эффект переноса вследствие нестационарности турбулентных напряжений несущего потока, а также конвективного и диффузионного переноса пульсаций скорости сплошной среды вдоль траектории частицы. Таким образом, аппроксимация (2.8) подразумевает, что имеют место два механизма формирования  $B_{Lij}(\tau)$  в нестационарной неоднородной турбулентности, т.е. лагранжев корреляционный момент, во-первых, определяется локально через эйлеров одноточечный момент второго порядка  $\langle u'_i u'_j \rangle$  и, во-вторых, учитывает изменение  $\langle u'_i u'_j \rangle$  во времени и перенос со средней и пульсационной скоростями. В стационарной однородной турбулентности второй механизм отсутствует. Транспортный член дает заметный вклад в (2.8) только для относительно малоинерционных частиц, время релаксации которых меньше характерного временного макромасштаба турбулентности. Скорости движения таких частиц незначительно отличаются от скорости несущего потока, поэтому в дальнейшем вместо (2.8) будет использоваться аппроксимация

$$\begin{aligned}
 B_{Lp ij}(\tau) = & \left( \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{\tau}{2} \frac{D \langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} \right) \Psi_{Lpkj}(\tau) \\
 \frac{D \langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} = & \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial t} + U_n \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial x_n} + \frac{\partial \langle u'_i u'_k u'_n \rangle}{\partial x_n}
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следует отметить, что корреляционные моменты пульсаций скорости несущего потока, вычисленные вдоль траекторий частиц, совпадают с обычными корреляциями Лагранжа, определенными вдоль траекторий элементов сплошной среды, только в предельном случае безынерционных частиц. Это различие между лагранжевыми корреляциями, вычисленными вдоль траекторий инерционных и безынерционных частиц, связывается в литературе с эффектами инерционности и пересечения траекторий [9–12]. Эффект инерционности обусловлен различием между масштабами турбулентности Лагранжа и Эйлера, а эффект пересечения траекторий связан с осредненным скоростным скольжением между частицами и несущим потоком. Учет влияния этих факторов может быть осуществлен в (2.9) через автокорреляционную функцию путем замены  $T_{Lij}$  на времена взаимодействия частиц с турбулентными вихрями (т.е. масштабы пульсаций скорости несущего потока, вычисленные вдоль траекторий частиц)

$$T_{Lp ij} = \int_0^{\infty} \Psi_{Lp ij}(\tau) d\tau.$$

Подставляя (2.9) в (2.7) и ограничиваясь при учете неоднородности потока членами с пространственными производными не выше второго порядка, получаем представление для корреляции между пульсациями скорости сплошной среды и плотностью вероятности скорости частиц

$$\begin{aligned} \langle u_i' p \rangle = & -\langle u_i' u_j' \rangle \left( f_{jk} \frac{\partial P}{\partial v_k} + \tau_p g_{jk} \frac{\partial P}{\partial x_k} + \tau_p l_{jk} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial v_n} + \tau_p^2 h_{jk} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial x_n} + \tau_p^2 h_{jk} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial V_l}{\partial x_n} \frac{\partial P}{\partial v_l} \right) + \\ & + \frac{\tau_p D \langle u_i' u_j' \rangle}{2} \left( f_{1jk} \frac{\partial P}{\partial v_k} + \tau_p g_{1jk} \frac{\partial P}{\partial x_k} + \tau_p l_{1jk} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial v_n} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Коэффициенты  $f_{ij}$ ,  $g_{ij}$ ,  $l_{ij}$ ,  $h_{ij}$ ,  $f_{1ij}$ ,  $g_{1ij}$ ,  $l_{1ij}$  характеризуют степень вовлечения частиц в турбулентное движение сплошной среды. При использовании матричных обозначений эти коэффициенты записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{\tau_p} \int_0^t \Psi_{Lp}(\tau) \exp\left(-\frac{\mathbf{I}\tau}{\tau_p}\right) d\tau, \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{T}_L}{\tau_p} - \mathbf{f}, \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\tau_p} \int_0^t \Psi_{Lp}(\tau) \tau \exp\left(-\frac{\mathbf{I}\tau}{\tau_p}\right) d\tau \\ \mathbf{l} &= \mathbf{g} - \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{h} = \mathbf{f}_1 + \frac{1}{2} \int_0^t \Psi_L(\tau) \tau d\tau - 2\mathbf{g}, \quad \mathbf{g}_1 = \frac{1}{\tau_p} \int_0^t \Psi_{Lp}(\tau) \tau d\tau - \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 &= \frac{1}{\tau_p} \int_0^t \Psi_{Lp}(\tau) \tau^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{I}\tau}{\tau_p}\right) d\tau, \quad \mathbf{l}_1 = \mathbf{g}_1 - \mathbf{f}_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. При пренебрежении анизотропией временных масштабов турбулентности, т.е. при использовании допущения (1.4), тензорные коэффициенты вовлечения становятся скалярными функциями от параметра инерционности частиц. Для определения тензорных коэффициентов вовлечения необходимо задать вид автокорреляционной функции. Аналогично (1.2) автокорреляционную функцию представим экспоненциальной зависимостью

$$\Psi_{Lp}(\tau) = \exp(-\tau \mathbf{T}_{Lp}^{-1}) \quad (2.12)$$

где  $\mathbf{T}_{Lp}^{-1}$  является обратной матрицей по отношению к  $\mathbf{T}_{Lp}$ . С учетом (2.12) коэффициенты вовлечения (2.11) для значений времени, много больших характерного вре-

менного макромасштаба турбулентности, принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (\mathbf{I} + \tau_p \mathbf{T}_{Lp}^{-1})^{-1}, \quad \mathbf{g} = (\tau_p^{-1} \mathbf{T}_{Lp})(\mathbf{I} + \tau_p \mathbf{T}_{Lp}^{-1})^{-1}, \quad \mathbf{f}_1 = (\mathbf{I} + \tau_p \mathbf{T}_{Lp}^{-1})^{-2} \\ \mathbf{l} &= (\tau_p^{-1} \mathbf{T}_{Lp})(\mathbf{I} + \tau_p \mathbf{T}_{Lp}^{-1})^{-2}, \quad \mathbf{h} = (\tau_p^{-1} \mathbf{T}_{Lp})^2 (\mathbf{I} + \tau_p \mathbf{T}_{Lp}^{-1})^{-2}, \quad \mathbf{g}_1 = (\tau_p^{-1} \mathbf{T}_{Lp})^2 - (\mathbf{I} + \tau_p \mathbf{T}_{Lp}^{-1})^{-2} \\ \mathbf{f}_2 &= 2(\mathbf{I} + \tau_p \mathbf{T}_{Lp}^{-1})^{-3}, \quad \mathbf{l}_1 = (\mathbf{I} + 3\tau_p \mathbf{T}_{Lp}^{-1})(\tau_p^{-1} \mathbf{T}_{Lp})^2 (\mathbf{I} + \tau_p \mathbf{T}_{Lp}^{-1})^{-3} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подстановка (2.10) в (2.3) приводит к кинетическому уравнению для ФПВ распределения скорости частиц в анизотропном неоднородном турбулентном потоке

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + v_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \left[ \left( \frac{U_k - v_k}{\tau_p} + F_k \right) P \right] &= \\ = \langle u_i' u_j' \rangle \left[ \frac{f_{jk}}{\tau_p} \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_k} + g_{jk} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial v_k} + l_{jk} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_n} + \tau_p h_{jk} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x_n \partial v_i} + \frac{\partial V_l}{\partial x_n} \frac{\partial^2 P}{\partial v_l \partial v_i} \right) \right] - & \\ - \frac{1}{2} \frac{D \langle u_i' u_j' \rangle}{Dt} \left( f_{1jk} \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_k} + \tau_p g_{1jk} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial v_k} + \tau_p l_{1jk} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_n} \right) & \end{aligned} \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) описывает конвекцию и диффузию частиц в фазовом пространстве. Моделирование турбулентности при помощи случайного гауссового процесса позволило выразить взаимодействие частиц с турбулентными вихрями в виде дифференциального (диффузионного) оператора второго порядка. Этот диффузионный оператор учитывает анизотропию временных масштабов турбулентности через коэффициенты вовлечения. Если пренебречь анизотропией масштабов турбулентности и влиянием транспортного члена в (2.9), то (2.14) переходит в кинетическое уравнение, представленное в [5, 6]. Без учета также членов с градиентами осредненных скоростей из (2.14) следует уравнение для функции плотности вероятности распределения скорости частиц в однородном бессдвиговом турбулентном потоке [13, 14].

В результате интегрирования (2.14) по подпространству скоростей получается система уравнений для одноточечных статистических моментов ФПВ. Соответствующие уравнения для концентрации  $\Phi$ , осредненной скорости  $V_i$  и вторых моментов пульсаций скоростей (турбулентных напряжений)  $\langle v_i' v_j' \rangle$  дисперсной фазы имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi V_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \frac{U_i - V_i}{\tau_p} + F_i - \frac{D_{pik} \partial \ln \Phi}{\tau_p \partial x_k} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_k} &= - \langle v_i' v_k' \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \langle v_j' v_k' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \\ + \langle u_i' u_k' \rangle \left( l_{kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} - g_{kn} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \right) + \langle u_j' u_k' \rangle \left( l_{kn} \frac{\partial U_i}{\partial x_n} - g_{kn} \frac{\partial V_i}{\partial x_n} \right) &+ \\ + \frac{(\langle u_i' u_k' \rangle f_{kj} + \langle u_j' u_k' \rangle f_{ki} - 2 \langle v_i' v_j' \rangle)}{\tau_p} - \frac{1}{2} \left( \frac{D \langle u_i' u_k' \rangle}{Dt} f_{1kj} + \frac{D \langle u_j' u_k' \rangle}{Dt} f_{1ki} \right) - & \\ - \frac{\tau_p}{2} \left[ \frac{D \langle u_i' u_k' \rangle}{Dt} \left( l_{1kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} - g_{1kn} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \right) + \frac{D \langle u_j' u_k' \rangle}{Dt} \left( l_{1kn} \frac{\partial U_i}{\partial x_n} - g_{1kn} \frac{\partial V_i}{\partial x_n} \right) \right] & \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\Phi = \int P dv, \quad V_i = \frac{1}{\Phi} \int v_i P dv, \quad \langle v'_i v'_j \rangle = \frac{1}{\Phi} \int (v_i - V_i)(v_j - V_j) P dv \quad (2.18)$$

$$D_{pij} = \tau_p \left( \langle v'_i v'_j \rangle + \langle u'_i u'_k \rangle g_{kj} + \tau_p \langle u'_i u'_k \rangle h_{kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) - \frac{\tau_p^2 D \langle u'_i u'_k \rangle}{2} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} g_{1kj}$$

Здесь  $D_{pij}$  – коэффициент турбулентной диффузии частиц. В предельном случае безынерционных частиц (пассивной примеси) коэффициент диффузии представим как

$$D_{ij} = \lim_{\tau_p \rightarrow 0} D_{pij} = \langle u'_i u'_k \rangle T_{Lkj} + \langle u'_i u'_k \rangle T_{Lkn} T_{Lni} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} - \frac{1}{2} \frac{D \langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} T_{Lkn} T_{Lni} \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) без учета последнего транспортного члена согласуется с известным соотношением для тензора диффузии в однородной турбулентности с постоянной скоростью сдвига [15].

С целью замыкания системы уравнений (2.15)–(2.17) привлекается градиентная алгебраическая аппроксимация для третьих моментов [6], вытекающая из соответствующего дифференциального уравнения при пренебрежении в нем транспортными членами и градиентами осредненной скорости, а также при использовании квазиггауссовой гипотезы для четвертых моментов

$$\langle v'_i v'_j v'_k \rangle = -\frac{1}{3} \left( D_{pin} \frac{\partial \langle v'_j v'_k \rangle}{\partial x_n} + D_{pjn} \frac{\partial \langle v'_i v'_k \rangle}{\partial x_n} + D_{pkn} \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_n} \right)$$

Корреляционные моменты пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз могут быть получены непосредственно из (2.10)

$$\langle u'_i v'_j \rangle = \frac{1}{\Phi} \left( \int \langle u'_i p \rangle v_j dv - V_j \int \langle u'_i p \rangle dv \right) = \langle u'_i u'_k \rangle \left[ f_{kj} + \tau_p \left( l_{kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} - g_{kn} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \right) \right] - \frac{\tau_p D \langle u'_i u'_k \rangle}{2} \left[ f_{1kj} + \tau_p \left( l_{1kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} - g_{1kn} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \right) \right] \quad (2.20)$$

**3. Однородный сдвиговый поток.** Рассмотрим перенос частиц в однородном турбулентном потоке с постоянной скоростью сдвига при отсутствии внешних сил. На основе представленной в предыдущем разделе кинетической модели для функции плотности вероятности рассчитываются турбулентные напряжения дисперсной фазы  $\langle v'_i v'_j \rangle$ , а также корреляционные моменты пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз  $\langle u'_i v'_j \rangle$ .

Вследствие однородности поля скорости несущего турбулентного потока тройные моменты пульсаций скоростей частиц обращаются в нуль и, следовательно, могут быть получены точные решения уравнений для вторых моментов. Таким образом сдвиговые течения имеют фундаментальное значение для верификации турбулентных моделей переноса и дисперсии частиц. Кроме того, дополнительной мотивацией для тестирования развиваемой модели в однородном потоке с постоянной скоростью сдвига является наличие результатов численного моделирования как лагранжевых характеристик турбулентности сплошной среды [16, 17], так и пульсационного движения частиц [18–20].

Концентрация дисперсной фазы предполагается достаточно малой, чтобы влияние частиц на турбулентность можно было не учитывать. Вследствие однородности потока из (2.15) и (2.16) следует, что концентрация частиц в пространстве не изменяется,

а градиенты сплошной и дисперсной фаз равны. Эти градиенты задаются соотношением

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = S\delta_{i1}\delta_{j2}, \quad (3.1)$$

где  $S$  – скорость сдвига.

С учетом (3.1) из (2.17) получается система уравнений для турбулентных напряжений дисперсной фазы

$$\begin{aligned} \frac{d\langle v_1^2 \rangle}{dt} &= -2S(\langle v_1 v_2 \rangle + \langle u_1^2 \rangle f_{1,12} + \langle u_1' u_2' \rangle f_{1,22}) + \frac{2}{\tau_p}(\langle u_1^2 \rangle f_{11} + \langle u_1' u_2' \rangle f_{21} - \langle v_1^2 \rangle) - \\ &- \left( \frac{d\langle u_1^2 \rangle}{dt} f_{1,11} + \frac{d\langle u_1' u_2' \rangle}{dt} f_{1,21} \right) + \tau_p S \left( \frac{d\langle u_1^2 \rangle}{dt} f_{2,12} + \frac{d\langle u_1' u_2' \rangle}{dt} f_{2,22} \right) \\ \frac{d\langle v_2^2 \rangle}{dt} &= \frac{2}{\tau_p}(\langle u_1' u_2' \rangle f_{12} + \langle u_2^2 \rangle f_{22} - \langle v_2^2 \rangle) - \left( \frac{d\langle u_1' u_2' \rangle}{dt} f_{1,12} + \frac{d\langle u_2^2 \rangle}{dt} f_{1,22} \right) \\ \frac{d\langle v_3^2 \rangle}{dt} &= \frac{2}{\tau_p}(\langle u_3^2 \rangle f_{33} - \langle v_3^2 \rangle) - \frac{d\langle u_3^2 \rangle}{dt} f_{1,33} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle v_1 v_2 \rangle}{dt} &= -S(\langle v_2^2 \rangle + \langle u_1' u_2' \rangle f_{1,12} + \langle u_2^2 \rangle f_{1,22}) + \\ &+ \frac{1}{\tau_p}[\langle u_1^2 \rangle f_{12} + \langle u_1' u_2' \rangle (f_{11} + f_{22}) + \langle u_2^2 \rangle f_{21} - 2\langle v_1 v_2 \rangle] - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{d\langle u_1^2 \rangle}{dt} f_{1,12} + \frac{d\langle u_1' u_2' \rangle}{dt} (f_{1,11} + f_{1,22}) + \frac{d\langle u_2^2 \rangle}{dt} f_{2,21} \right) + \\ &+ \frac{\tau_p S}{2} \left( \frac{d\langle u_1' u_2' \rangle}{dt} f_{2,12} + \frac{d\langle u_2^2 \rangle}{dt} f_{2,22} \right) \end{aligned}$$

Нулевые корреляционные моменты пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз, согласно (2.20), определяются выражениями

$$\begin{aligned} \langle u_1' v_1 \rangle &= \langle u_1^2 \rangle f_{11} + \langle u_1' u_2' \rangle f_{21} - \tau_p S (\langle u_1^2 \rangle f_{1,12} + \langle u_1' u_2' \rangle f_{1,22}) - \\ &- \frac{\tau_p}{2} \left( \frac{d\langle u_1^2 \rangle}{dt} f_{1,11} + \frac{d\langle u_1' u_2' \rangle}{dt} f_{1,21} \right) + \frac{\tau_p^2 S}{2} \left( \frac{d\langle u_1^2 \rangle}{dt} f_{2,12} + \frac{d\langle u_1' u_2' \rangle}{dt} f_{2,22} \right) \\ \langle u_2' v_2 \rangle &= \langle u_1' u_2' \rangle f_{12} + \langle u_2^2 \rangle f_{22} - \frac{\tau_p}{2} \left( \frac{d\langle u_1' u_2' \rangle}{dt} f_{1,12} + \frac{d\langle u_2^2 \rangle}{dt} f_{1,22} \right) \\ \langle u_3' v_3 \rangle &= \langle u_3^2 \rangle f_{33} - \frac{\tau_p}{2} \frac{d\langle u_3^2 \rangle}{dt} f_{1,33} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\langle u_1' v_2 \rangle = \langle u_1^2 \rangle f_{12} + \langle u_1' u_2' \rangle f_{22} - \frac{\tau_p}{2} \left( \frac{d\langle u_1^2 \rangle}{dt} f_{1,12} + \frac{d\langle u_1' u_2' \rangle}{dt} f_{1,22} \right)$$



$$\langle u'_2 v'_1 \rangle = \langle u'_1 u'_2 \rangle f_{11} + \langle u'_2{}^2 \rangle f_{21} - \tau_p S (\langle u'_1 u'_2 \rangle f_{1,12} + \langle u'_2{}^2 \rangle f_{1,22}) - \\ - \frac{\tau_p}{2} \left( \frac{d \langle u'_1 u'_2 \rangle}{dt} f_{1,11} + \frac{d \langle u'_2{}^2 \rangle}{dt} f_{1,21} \right) + \frac{\tau_p^2 S}{2} \left( \frac{d \langle u'_1 u'_2 \rangle}{dt} f_{2,12} + \frac{d \langle u'_2{}^2 \rangle}{dt} f_{2,22} \right)$$

В целом ряде физических и численных экспериментов было установлено, что в потоке с постоянной скоростью сдвига, так же как и в других однородных однофазных турбулентных течениях, когда можно пренебречь процессами конвективного и диффузионного переноса пульсаций скорости, при больших временах достигается равновесное состояние. Это равновесное состояние характеризуется постоянными значениями всех компонент тензора анизотропии  $b_{ij}$  и других безразмерных корреляционных моментов более высокого порядка. Аналогично двухфазное течение считается равновесным, когда конвекция и диффузия не играют роли, а тензоры анизотропии пульсаций скорости частиц  $b_{pij}$  и корреляций пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз  $b_{fpij}$  не изменяются во времени. Тензоры анизотропии определяются как

$$b_{ij} = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{\langle u'_k u'_k \rangle} - \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad b_{pij} = \frac{\langle v'_i v'_j \rangle}{\langle v'_k v'_k \rangle} - \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad b_{fpij} = \frac{\langle u'_i v'_j \rangle}{\langle u'_k v'_k \rangle} - \frac{\delta_{ij}}{3}$$

Таким образом, равновесное состояние интерпретируется как асимптотическое решение системы уравнений при больших временах, когда течение становится автономным. Это решение не зависит от начальных условий и требует, чтобы вторые моменты пульсаций скорости и скорость диссипации энергии турбулентности экспоненциально росли во времени

$$\langle u'_i u'_j \rangle \sim \langle v'_i v'_j \rangle \sim \langle u'_i v'_j \rangle \sim \varepsilon \sim \exp(\chi t) \\ \chi = \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{P}{\varepsilon} - 1 \right), \quad P = -\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{3.4}$$

где  $P$  – генерация турбулентной энергии.

Тензор лагранжевых временных масштабов турбулентности определяется, согласно результатам прямого численного моделирования (DNS) [16, 17], приведенным в [1]

$$\mathbf{T}_L = \frac{k}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0.44 & -0.06 & 0 \\ -0.11 & 0.22 & 0 \\ 0 & 0 & 0.24 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

С целью анализа влияния анизотропии временных масштабов на пульсационное движение частиц результаты, полученные с использованием (3.5), будут сравниваться с расчетами, соответствующими изотропному лагранжевому масштабу турбулентности

$$T_{Lij} = T_L \delta_{ij}, \quad T_L = \frac{1}{3} T_{Lkk} \tag{3.6}$$

где, в соответствии с (3.5),  $T_L = 0.3k/\varepsilon$ .

В рассматриваемом однородном турбулентном потоке с постоянной скоростью сдвига при отсутствии действия массовых сил осредненные скорости обеих фаз совпадают. Таким образом эффект пересечения траекторий отсутствует и единственной причиной различия между корреляциями пульсаций скорости сплошной среды, вычисленными вдоль траекторий инерционных и безынерционных частиц, является разница между масштабами турбулентности Лагранжа и Эйлера. Примем, что при

отсутствии эффекта пересечения траекторий влияние инерционности частиц на времена их взаимодействия с турбулентными вихрями такое же, как и в изотропной турбулентности. Тогда тензоры времен взаимодействия частицы–турбулентность и лагранжевых макромасштабов могут быть связаны соотношением

$$T_{Lp} = F(\text{St})T_L \quad (3.7)$$

где функция  $F(\text{St})$  учитывает влияние числа Стокса, характеризующего инерционность частиц.

В [12] представлена аналитическая зависимость для  $T_{Lp}/T_L$  в однородной изотропной турбулентности

$$F(\text{St}) = \frac{T_{Lp}}{T_L} = \frac{T_E}{T_L} - \frac{(T_E T_L^{-1} - 1)}{(1 + \text{St})^{0.4(1 + 0.01\text{St})}} \quad (3.8)$$

Здесь  $\text{St} = \tau_p/T_E$  – число Стокса,  $T_E$  – временной масштаб Эйлера. Формула (3.8) получена при значении параметра турбулентности  $m = 1$ , где  $m = u'T_E/L$ ,  $u' \equiv (2k/3)^{1/2}$  – интенсивность пульсаций скорости в изотропной турбулентности,  $L$  – пространственный макромасштаб. Согласно [12],  $T_E/E_L = 2.81$  при  $m = 1$ .

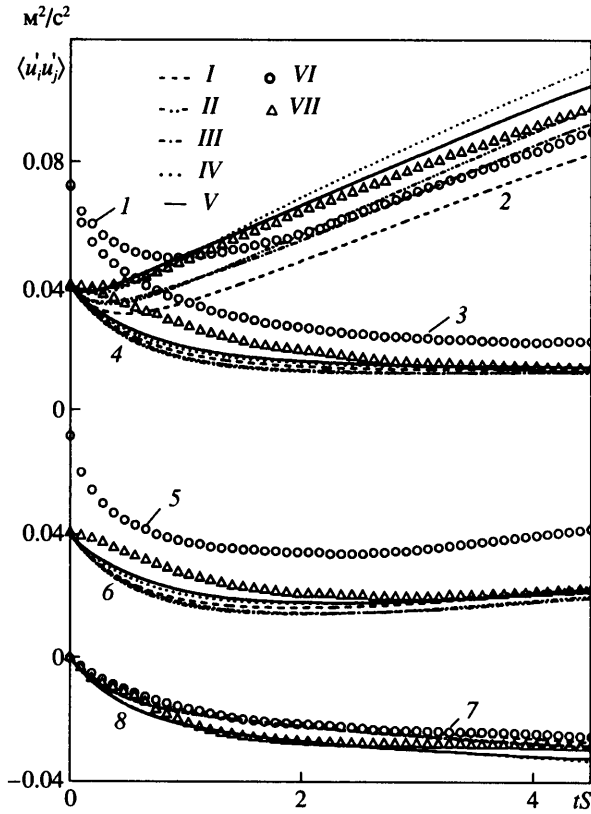
В [21] время взаимодействия частиц с турбулентными вихрями в изотропной турбулентности определяется на основе гипотезы Коррзина о возможности независимо осреднения эйлеровых пульсаций скорости сплошной среды и смещений частиц [22]. Полученная зависимость  $F(\text{St})$  при  $m \leq 1$  может быть представлена в виде

$$F(\text{St}) = \frac{T_{Lp}}{T_L} = 1 + \left(\frac{T_E}{T_L} - 1\right) \left[ \frac{\text{St}}{1 + \text{St}} - \frac{5\text{St}^2 m}{4(1 + \text{St})^2(2 + \text{St})} \right], \quad \frac{T_E}{T_L} = \frac{3(1 + m)^2}{(3 + 2m)} \quad (3.9)$$

Следует отметить, что при  $m = 1$  зависимости  $F(\text{St})$ , по (3.8) и (3.9), оказываются достаточно близкими.

С целью анализа влияния отдельных физических факторов в аппроксимации (2.9) расчеты проведены на основе нескольких моделей, включающих или не включающих физические эффекты анизотропии лагранжевых временных масштабов, нестационарности турбулентности сплошной среды (в однородном сдвиговом потоке конвективный и диффузионный перенос отсутствует, поэтому транспортный эффект обусловлен только нестационарностью) и инерционности частиц. Модель I предполагает, что лагранжевы масштабы изотропные (3.6) без влияния нестационарности турбулентности (т.е. пренебрегает транспортным членом в (2.9)) и не включает влияние инерционности частиц на время взаимодействия с турбулентностью ( $F(\text{St}) = 1$ ). Модель II учитывает анизотропию временных масштабов турбулентности на основе (3.5), но не описывает эффекты нестационарности несущего потока и инерционности частиц. Модель III включает анизотропию временных масштабов и нестационарность турбулентной среды без учета влияния инерционности частиц на времена взаимодействия с турбулентностью. Модель IV рассматривает анизотропию масштабов и инерционность частиц без эффекта нестационарности. Наконец, модель V является наиболее полной, так как включает влияние всех трех факторов: анизотропию временных масштабов, эффекты нестационарности и инерционности.

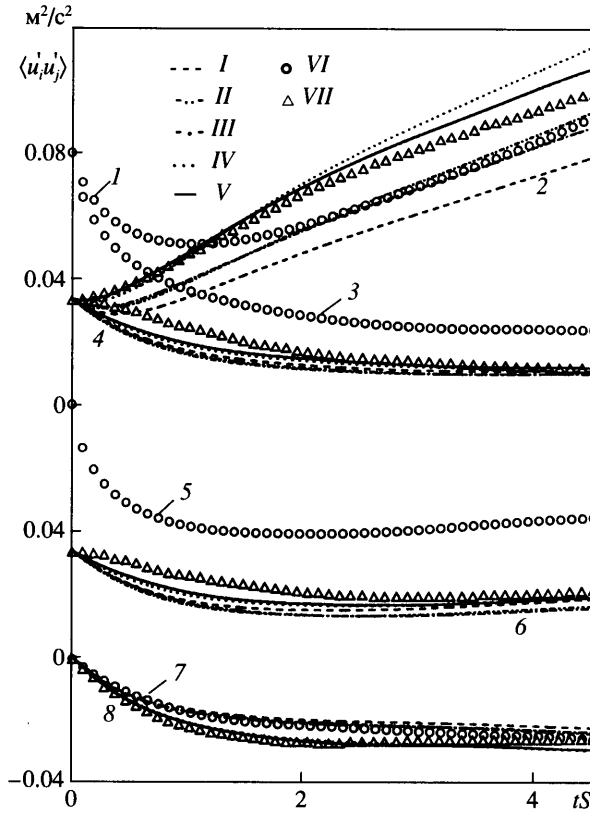
Рассмотрены два примера развивающихся во времени однородных сдвиговых течений, соответствующих численным расчетам на основе метода крупных вихрей (LES) [18, 19]. Напряжения Рейнольдса несущей сплошной среды определены из расчетов [18, 19]. Начальные условия соответствуют изотропным состояниям. Средняя скорость сдвига в обоих потоках одинакова и равна  $50 \text{ с}^{-1}$ , однако инерционности частиц различны.



Фиг. 1. Изменения во времени нормальных и касательной компонент турбулентных напряжений сплошной и дисперсной фаз: I – V – модели I – V; VI, VII – расчеты [18]; 1 –  $\langle u_1'^2 \rangle$ ; 2 –  $\langle v_1'^2 \rangle$ ; 3 –  $\langle u_2'^2 \rangle$ ; 4 –  $\langle v_2'^2 \rangle$ ; 5 –  $\langle u_3'^2 \rangle$ ; 6 –  $\langle v_3'^2 \rangle$ ; 7 –  $\langle u_1' u_2' \rangle$ ; 8 –  $\langle v_1' v_2' \rangle$

В [18] отношение плотностей дисперсной и сплошной сред  $\rho_p/\rho$  равнялось 2000 и рассматривались частицы с диаметром  $d_p = 60$  мкм, в [19]  $\rho_p/\rho = 43$  и  $d_p = 656$  мкм.

На фиг. 1 и 2 представлены изменения во времени нормальных и касательной компонент турбулентных напряжений сплошной и дисперсной фаз. Наихудшее общее согласие с результатами LES дает модель I, а наилучшее согласие – модель V, учитывающая влияние всех трех факторов. Отметим, что зависимости (3.8) и (3.9), описывающие влияние инерционности частиц на времена взаимодействия с турбулентностью, приводят к практически совпадающим результатам. Учет анизотропии временных масштабов турбулентности и эффекта инерционности приводит к увеличению анизотропии пульсаций скорости частиц за счет роста продольной составляющей пульсаций. Напротив, транспортный эффект, обусловленный нестационарностью турбулентности, немного уменьшает интенсивность продольных пульсаций скорости частиц и тем самым сглаживает анизотропию пульсаций скорости дисперсной фазы. Включение анизотропии временных масштабов в расчетную модель позволяет воспроизвести такой интересный эффект как превышение интенсивности продольных пульсаций скорости частиц  $\langle v_1'^2 \rangle$  над продольными пульсациями скорости несущей среды  $\langle u_1'^2 \rangle$ . Это явление, как отмечалось в [6, 20, 23, 24], связано с генерацией про-



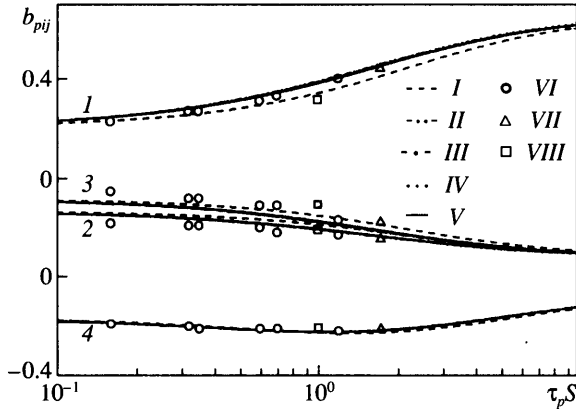
Фиг. 2. Изменения во времени нормальных и касательной компонент турбулентных напряжений сплошной и дисперсной фаз: I – V – модели I – V; VI, VII – расчеты [19]; 1 –  $\langle u_1'^2 \rangle$ ; 2 –  $\langle v_1'^2 \rangle$ ; 3 –  $\langle u_2'^2 \rangle$ ; 4 –  $\langle v_2'^2 \rangle$ ; 5 –  $\langle u_3'^2 \rangle$ ; 6 –  $\langle v_3'^2 \rangle$ ; 7 –  $\langle u_1' u_2' \rangle$ ; 8 –  $\langle v_1' v_2' \rangle$

дольных пульсаций скорости частиц за счет сдвига скорости и объясняется отсутствием мелкомасштабной диссипации турбулентной энергии в дисперсной фазе.

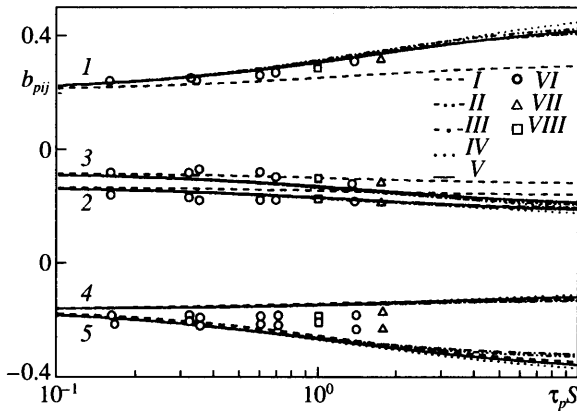
Ненулевые компоненты тензоров анизотропии  $b_{pij}$  и  $b_{fpij}$ , соответствующие равновесному асимптотическому решению (3.4) систем уравнений (3.2) и (3.3), представлены на фиг. 3 и 4. Также показаны результаты численных расчетов, полученные на основе метода крупных вихрей [18, 19] и прямого моделирования (DNS) [20], для максимальных значений времени, когда течение можно считать близким к равновесному. Турбулентные характеристики сплошной среды задавались в соответствии с экспериментальными данными для однородного сдвигового потока [25]:

$$b_{11} = 0.21, \quad b_{22} = -0.13, \quad b_{33} = -0.08, \quad b_{12} = -0.16, \quad Sk/\epsilon = 5, \quad P/\epsilon = 1.6.$$

На фиг. 3 изображены компоненты тензора анизотропии пульсаций скорости частиц в зависимости от безразмерного времени релаксации  $\tau_p S$ . Значения  $b_{pij}$  при  $\tau_p S = 0$  соответствуют значениям компонент тензора анизотропии пульсаций скорости сплошной среды  $b_{ij}$ . Из фиг. 3 следует, что анизотропия пульсаций скорости частиц возрастает с увеличением их инерционности и значения продольной компоненты пульсаций скорости высокоинерционных частиц значительно превышают соответствующие значения в поперечном и трансверсальном направлениях. Этот рост анизотропии обусловлен вкладом сдвига скорости в генерацию продольных пульсаций ско-



Фиг. 3. Нормальные и касательная компоненты тензора анизотропии пульсаций скорости частиц: *I* – *V* – модели *I* – *V*, *VI* – LES [18], *VII* – LES [19], *VIII* – DNS [20], *1* –  $b_{p11}$ ; *2* –  $b_{p22}$ ; *3* –  $b_{p33}$ ; *4* –  $b_{p12}$



Фиг. 4. Нормальные и касательные компоненты тензора анизотропии пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз: *I* – *V* – модели *I* – *V*, *VI* – LES [18], *VII* – LES [19], *VIII* – DNS [20], *1* –  $b_{fp11}$ ; *2* –  $b_{fp22}$ ; *3* –  $b_{fp33}$ ; *4* –  $b_{fp12}$ ; *5* –  $b_{fp21}$

рости дисперсной фазы. Из фиг. 3 также видно, что учет анизотропии временных масштабов приводит к небольшому увеличению анизотропии пульсаций скоростей по сравнению со значениями, предсказываемыми квазиизотропной моделью *I*. Фигура 3 демонстрирует немонотонное изменение касательной компоненты тензора анизотропии в зависимости от инерционности частиц: вначале  $b_{p12}$  уменьшается с ростом величины  $\tau_p S$ , достигая минимума при  $\tau_p S \approx 1$ , а далее увеличивается, стремясь к предельному значению при  $\tau_p S \rightarrow \infty$ . В целом, как следует из фиг. 3, хотя влияние анизотропии временных масштабов на  $b_{p12}$  невелико, учет этого эффекта приводит к несколько лучшему согласию с результатами численного моделирования [18, 19]. Также видно, что эффект нестационарности турбулентности и влияние инерционности частиц на времена их взаимодействия с турбулентными вихрями практически полностью элиминируются.

Фигура 4 показывает компоненты тензора анизотропии пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз в зависимости от произведения  $\tau_p S$ . Как видно из фиг. 4,

хотя все модели качественно одинаково описывают разницу между диагональными компонентами  $b_{frij}$ , модели, учитывающие неизотропность временных масштабов, предсказывают ббольшую анизотропию корреляций пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз и немного лучше согласуются с численными расчетами [18–20]. Из фиг. 4 следует, что, несмотря на достаточно существенное отличие от результатов численного моделирования [18–20], все модели качественно правильно воспроизводят асимметрию тензора корреляций пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз, проявляющуюся в большем абсолютном значении касательной компоненты  $\langle u'_2 v'_1 \rangle$  по сравнению с  $\langle u'_1 v'_2 \rangle$ .

**Заключение.** Развита статистическая модель для континуального описания движения и дисперсии инерционных частиц в анизотропных сдвиговых турбулентных потоках. Модель основана на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности скорости частиц и учитывает анизотропию лагранжевых автокорреляционных функций и временных масштабов турбулентности. Анализ движения дисперсной фазы в однородном сдвиговом потоке свидетельствует, что модели, учитывающие анизотропию временных масштабов турбулентности, дают лучшее согласие с данными прямого численного моделирования и предсказывают ббольшую анизотропию как пульсаций скорости частиц, так и корреляций пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз по сравнению с моделью, основанной на изотропных временных масштабах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-02-16520).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pope S.B. Stochastic Lagrangian models of velocity in homogeneous turbulent shear flow // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 5. P. 1696–1702.
2. Berlemont A., Desjonquères P., Gouesbet G. Particle Lagrangian simulation in turbulent flows // Intern. J. Multiphase Flow. 1990. V. 16, № 1. P. 19–34.
3. Zhou Q., Leschziner M.A. Modelling particle dispersion in anisotropic turbulence // Proc. 3rd ECCOMAS Computer Fluid Dynamics Confer. Paris, 1996. P. 577–583.
4. Pascal P., Oesterlé B. On the dispersion of discrete particles moving in a turbulent shear flow // Intern. J. Multiphase Flow. 2000. V. 26. № 2. P. 293–325.
5. Зайчик Л.И. Моделирование движения частиц в неоднородном турбулентном потоке на основе уравнения для функции плотности вероятности // ПИММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 132–138.
6. Zaichik L.I. A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 6. P. 1521–1534.
7. Кляцкин В.И. Статистические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
8. Derevich I.V. Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 1. Model development // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2000. V. 43. № 19. P. 3709–3723.
9. Yudine M.I. Physical consideration on heavy-particle diffusion // Adv. in Geophysics. N. Y.; L.: Acad. Press, 1959. V. 6. P. 185–191.
10. Csanady G.T. Turbulent diffusion of heavy-particles in the atmosphere // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. № 3. P. 201–208.
11. Reeks M.W. On the dispersion of small particles suspended in an isotropic turbulent fluid // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. Pt 3. P. 529–546.
12. Wang L.-P., Stock D.E. Dispersion of heavy particles in turbulent motion // J. Atmos. Sci. 1993. V. 50. № 13. P. 1897–1913.
13. Деревич И.В., Зайчик Л.И. Осаждение частиц из турбулентного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 96–104.
14. Reeks M.W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 3. P. 446–456.

15. Riley J.J., Corrsin S. The relation of turbulent diffusivities to Lagrangian velocity statistics for the simplest shear flow // *J. Geophys. Res.* 1974. V. 79. № 12. P. 1768–1771.
16. Sawford B.L., Yeung P.K. Eulerian acceleration statistics as a discriminator between Lagrangian stochastic models in uniform shear flow // *Phys. Fluids*. 2000. V. 12. № 8. P. 2033–2045.
17. Sawford B.L., Yeung P.K. Lagrangian statistics in uniform shear flow: Direct numerical simulation and Lagrangian stochastic models // *Phys. Fluids*. 2001. V. 13. № 9. P. 2627–2634.
18. Simonin O., Deutsch E., Boivin M. Large eddy simulation and second-moment closure model of particle fluctuating motion in two-phase turbulent shear flows // *Select. Papers 9th Intern. Symp. Turbulent Shear Flows* / Ed. F. Durst et al. Berlin etc.: Springer, 1995. P. 85–115.
19. Laviéville J., Simonin O., Berlemont A., Chang Z. Validation of inter-particle collision models based on large eddy simulation in gas-solid turbulent homogeneous shear flow // *Proc. 7th Int. Symp. on Gas-Particle Flows, ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, 1997, FEDSM97-3623*.
20. Taulbee D.B., Mashayek F., Barré C. Simulation and Reynolds stress modeling of particle-laden turbulent shear stress // *Intern. J. Heat Fluid Flow*. 1999. V. 20. № 4. P. 368–373.
21. Зайчик Л.И., Алипченков В.М. Время взаимодействия сталкивающихся частиц с турбулентными вихрями // *Теплофизика и аэромеханика*. 1999. Т. 6. № 4. С. 529–537.
22. Corrsin S. Progress report on some turbulent diffusion research // *Adv. in Geophysics*. N. Y.; L.: Acad. Press, 1959. V. 6. P. 161–184.
23. Liljegren L.M. The effect of a mean fluid velocity gradient on the streamwise velocity variance of a particle suspended in a turbulent flow // *Intern. J. Multiphase Flow*. 1993. V. 19. P. 471–484.
24. Reeks M.W. On the constitutive relations for dispersed particles in nonuniform flows. 1: Dispersion in a simple shear flow // *Phys. Fluids A*. 1993. V. 5. № 3. P. 750–761.
25. Tavoularis S., Karnik U. Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformly sheared turbulence // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 204. P. 457–478.

Москва

Поступила в редакцию  
18.XII.2003