

УДК 532.517

© 2004 г. С. В. МАНУЙЛОВИЧ

## ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛНЫ ТОЛЛМИНА–ШЛИХТИНГА НАД СТЫКОМ ЖЕСТКОЙ И ПОДАТЛИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Теоретически изучен процесс прохождения волной неустойчивости области стыка жесткой и податливой панели. Задача исследована с использованием трех различных методов на примере течения в плоском канале, содержащем секции с упругими стенками. В рамках первого подхода рассматриваемая задача с помощью решения задачи о восприимчивости течения к локальным вибрациям стенок сводится к решению интегродифференциального уравнения для комплексной амплитуды колебаний стенок. Показано, что на стыке жесткой и упругой секций канала амплитуда волны неустойчивости меняется скачком. Для расчета величины скачка предложен второй, аналитический метод исследования процесса распространения возмущений, основанный на представлении решения в виде суперпозиции мод локально-однородной задачи. Этот метод применяется также для вычисления характеристик устойчивости течений в каналах, содержащих одну или несколько упругих секций, а также составленных из периодически чередующихся жестких и податливых секций. Третий способ использует представление искомого решения в виде суммы локального вынужденного решения и суперпозиции ортогональных мод течения в канале с жесткими стенками. Последний метод может использоваться для расчета собственных значений и собственных функций задачи устойчивости для течения в канале со стенками равномерной податливости.

*Ключевые слова:* устойчивость, восприимчивость к вибрации, податливая поверхность.

Идея ламинаризации течений жидкости с помощью податливости обтекаемой поверхности [1] остается актуальной и в настоящее время [2]. Основной механизм затягивания ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на податливой поверхности заключается в стабилизирующем воздействии упругости стенки: удачный выбор параметров податливости позволяет практически полностью подавить рост неустойчивых возмущений. Поскольку оптимальные величины физических характеристик стенки зависят от параметров невозмущенного течения (в частности, от числа Рейнольдса), в [3] было предложено использовать для гашения волн неустойчивости набор податливых панелей конечного размера, характеристики каждой из которых настроены на оптимальное подавление возмущений в местном течении над панелью. В этой связи приобретает значение исследование взаимодействия волн неустойчивости с податливыми участками конечной протяженности. Для случая плоского течения Пуазейля такая задача исследовалась в [3] методом прямого численного моделирования, что потребовало проведения большого объема вычислений.

В математическом отношении задача о прохождении волны неустойчивости над эластичной панелью тесно связана с проблемой описания линейного этапа ламинарно-турбулентного перехода, поскольку в обоих случаях основную трудность при описании эволюции возмущений представляет продольная неоднородность соответствующих краевых задач. Именно в связи с проблемой описания процесса распространения возмущений в продольно-неоднородных течениях в [4] была изучена эволюция возмущений в плоском течении Пуазейля между стенками неоднородной податливости. Задача [4] исследовалась с помощью двух методов. В первом подходе в качестве вспомогательного использовалось решение задачи о восприимчивости течения Пуазейля к вибрации стенок канала [5]. В результате задача расчета прохождения волны неустойчивости через секцию канала переменной податливости свелась к решению интеграль-

ного уравнения для неизвестной формы колебаний стенок. Другой подход базировался на методе вариации постоянных и состоял в представлении процесса распространения возмущений в виде независимого усиления (затухания) нормальных мод локально-однородной задачи и их рассеяния друг в друга на местной неоднородности. На основе этого подхода в [4] построено аналитическое решение задачи о трансформации волны неустойчивости в области стыка жесткой и податливой секции и объяснено скачкообразное изменение амплитуды волны неустойчивости при внезапном изменении податливости стенок.

Поскольку основная цель [4] – разработка нового метода исследования устойчивости продольно-неоднородных течений, там использовался простейший модельный закон податливости, при котором смещение стенки пропорционально местному возмущению давления. В связи с тем что проблема ламинаризации течений жидкости в податливых границах представляет самостоятельный интерес [2], в данной работе исследуется прохождение волны неустойчивости через секцию канала, стенки которой характеризуются законом податливости довольно общего вида [6]. Несмотря на то, что методы [4] не могут быть непосредственно обобщены на случай, когда стенки секций обладают натяжением и сопротивлением изгибу, аналогия с явлением восприимчивости течения к вибрации обтекаемой поверхности и метод разложения по собственным функциям и в данном случае оказываются эффективными и позволяют построить аналитическое решение задачи о трансформации волны неустойчивости при ее рассеянии в области стыка жесткой и податливой секций канала.

В работе исследованы как сходство, так и качественные особенности процессов эволюции неустойчивых возмущений, обусловленные различиями в законах податливости упругих панелей. Некоторые результаты данного исследования кратко изложены в [7].

**1. Постановка задачи о возмущенном течении в канале с податливыми стенками.** Будем изучать нестационарные двумерные возмущения плоского течения Пуазейля в канале, содержащем секцию с упругими стенками. В качестве основных единиц измерения будем использовать полуширину канала, скорость невозмущенного течения на его оси и плотность жидкости (жидкость предполагается несжимаемой). Вычисленное по этим параметрам число Рейнольдса обозначим  $R$ .

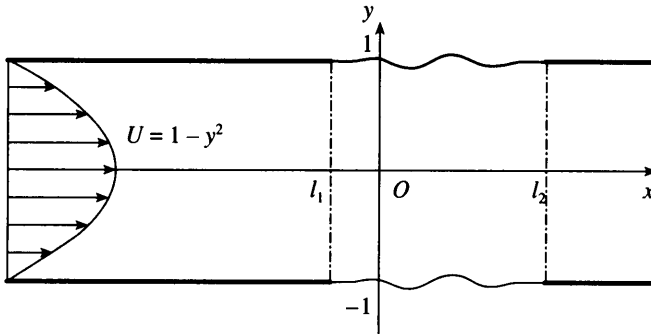
Введем декартову систему отсчета с началом на оси канала, координату  $x$  будем отсчитывать в направлении невозмущенного течения, а  $y$  – перпендикулярно стенкам (фиг. 1). Безразмерное время обозначим  $t$ . Возмущения потока будем считать малыми; в этом случае компоненты возмущенного движения

$$\varepsilon q(x, y) \exp(-i\omega t) + \text{с.с.} + O(|\varepsilon|^2), \quad |\varepsilon| \ll 1$$

соответствующие различным частотам  $\omega > 0$ , могут изучаться независимо друг от друга.

Комплексные амплитуды пульсаций компонент вектора скорости, давления и завихренности  $q_{1, 2, 3, 4} = v_y, v_x, p, r$  удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ -i\omega v_x + (1 - y^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} - 2yv_y + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial y} \\ -i\omega v_y + (1 - y^2) \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial x} \\ r &= \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.1}$$



Фиг. 1. Схема течения

Введение в качестве дополнительной неизвестной функции возмущения завихренности  $r$  приводит линеаризованную систему уравнений Навье–Стокса к виду (1.1), содержащему только первые производные по переменным  $x, y$ , что удобно при формулировке условий ортогональности собственных решений задачи (см. разд. 2).

Будем считать что возмущения течения порождаются волной неустойчивости (волной Толлмина–Шлихтинга). Поскольку эта волна является антисимметричной модой, в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь антисимметричных возмущений, удовлетворяющих условиям

$$v_x(x, 0) = p(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

на оси канала. Заметим, что раздельное исследование симметричных и антисимметричных возмущений возможно лишь в случае симметричного невозмущенного течения и одинаковых граничных условий на верхней и нижней стенках канала. В этой связи будем считать, что обе стенки характеризуются одним и тем же законом податливости. Это позволяет формулировать краевую задачу в полосе  $-\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq 1$ .

Возмущения течения сопровождаются антисимметричными поперечными колебаниями упругих стенок; соответствующая форма верхней стенки имеет вид

$$y_w = 1 + [\varepsilon f(x) \exp(-i\omega t) + \text{c.c.}] + O(|\varepsilon|^2) \quad (1.3)$$

где  $f(x)$  – продольное распределение комплексной амплитуды колебаний.

При изучении эволюции возмущений будем использовать закон податливости [6], согласно которому колебания границ обусловлены пульсациями давления  $p_w = p(x, 1)$  и описываются с учетом упругости стенок  $K$ , их инерции  $M$ , демпфирования  $D$ , натяжения  $T$  и сопротивления изгибу  $B$ :

$$B \frac{d^4 f}{dx^4} - T \frac{d^2 f}{dx^2} + (K - \omega^2 M - i\omega D) f = p_w \quad (1.4)$$

Основная цель данной работы – исследование процесса трансформации волны Толлмина–Шлихтинга в окрестностях стыков жестких и податливых секций канала. Для этого рассмотрим задачу об эволюции возмущений в канале, содержащем податливую секцию конечной протяженности. Будем предполагать, что упругая секция занимает промежуток  $l_1 \leq x \leq l_2$  (вне рассматриваемого промежутка  $f \equiv 0$ ). Стыки гибких и неподвижных участков стенок будем считать жесткими:

$$f(l_1) = f(l_2) = \frac{df}{dx}(l_1) = \frac{df}{dx}(l_2) = 0 \quad (1.5)$$

На обтекаемой поверхности (1.3) скорость возмущенного течения равна скорости точек стенки. Записывая это условие в линейном по  $\epsilon$  приближении, получим граничные условия, налагаемые на возмущение на верхней стенке

$$v_y(x, 1) = -i\omega f(x), \quad v_x(x, 1) = 2f(x) \quad (1.6)$$

Для завершения постановки задачи и описания предлагаемых методов ее решения необходимо исследовать структуру возмущений течения Пуазейля в канале со стенками равномерной податливости.

**2. Устойчивость течения Пуазейля между стенками однородной податливости. Ортогональность собственных функций.** В случае постоянной податливости стенок канала ( $l_{1,2} = \mp\infty$ ) задача (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) является однородной по продольной переменной, и произвольное возмущение течения имеет вид суперпозиции ее собственных решений вида

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_n(y) \exp(i\alpha_n x) \quad (2.1)$$

Комплексное волновое число  $\alpha_n$  моды и соответствующая ему комплексная функция  $\mathbf{q}_n$  удовлетворяют задаче на собственные значения, записанной в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{q}_n}{dy} + i\alpha_n \mathbf{H}\mathbf{q}_n + \mathbf{G}\mathbf{q}_n = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

$$q_{n1}(1) + i\omega\sigma_n q_{n3}(1) = q_{n2}(1) - 2\sigma_n q_{n3}(1) = q_{n2}(0) = q_{n3}(0) = 0$$

где  $\sigma_n$  – комплексная постоянная, обратная импедансу  $Z$  закона податливости (1.4) для соответствующей моды

$$\sigma_n = 1/Z(\alpha_n), \quad Z(\alpha) = K - \omega^2 M - i\omega D + \alpha^2 T + \alpha^4 B$$

а не равные 0 элементы матриц  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  определяются соотношениями

$$H_{12} = -H_{21} = 1, \quad H_{34} = 1/R, \quad H_{43} = -R, \quad H_{31} = 1 - y^2, \quad H_{42} = -R(1 - y^2)$$

$$G_{24} = -1, \quad G_{31} = -i\omega, \quad G_{41} = 2yR, \quad G_{42} = i\omega R$$

Поскольку течение ограничено в поперечном направлении, спектр  $\{\alpha_n\}$  задачи (2.2) дискретный и бесконечный.

При расчете спектра течения Пуазейля в податливых границах будем использовать вспомогательную функцию  $\varphi(y; \alpha)$  – решение неоднородной краевой задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда

$$\left(1 - y^2 - \frac{\omega}{\alpha}\right) \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \alpha^2\varphi\right) + 2\varphi = \frac{1}{i\alpha R} \left(\frac{d^4\varphi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \alpha^4\varphi\right) \quad (2.3)$$

$$\varphi(1) = \frac{\omega}{\alpha}, \quad \frac{d\varphi}{dy}(1) = 2, \quad \frac{d\varphi}{dy}(0) = \frac{d^3\varphi}{dy^3}(0) = 0$$

Универсальная функция  $\varphi$  не зависит от параметров податливости; с ее помощью собственное решение задачи (2.2), удовлетворяющее условию нормировки  $p_n(1) = 1$ , может быть представлено в виде

$$v_{yn} = -i\sigma_n \alpha_n \varphi_n, \quad v_{xn} = \sigma_n \frac{d\varphi_n}{dy}, \quad r_n = \sigma_n \left(\frac{d^2\varphi_n}{dy^2} + \alpha_n^2 \varphi_n\right)$$

$$p_n = \frac{\sigma_n}{i\alpha_n R} \left(\frac{d^3\varphi_n}{dy^3} - \alpha_n^2 \frac{d\varphi_n}{dy}\right) - \sigma_n \left(1 - y^2 - \frac{\omega}{\alpha_n}\right) \frac{d\varphi_n}{dy} - 2\sigma_n y \varphi_n$$

где  $\varphi_n = \varphi(y; \alpha_n)$ . Соответствующее собственное значение  $\alpha_n$  является корнем дисперсионного соотношения

$$\Phi(\alpha_n) = i\alpha_n R \left[ \frac{d^3 \varphi}{dy^3}(1; \alpha_n) - 2\alpha_n^2 \right]^{-1} = \sigma_n \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) содержит параметры податливости стенок в явном виде; его корни рассчитывались методом, аналогичным [4].

Опишем кратко классификацию мод. Будем считать, что все параметры податливости отличаются от заданных в  $\beta$  раз ( $1 \leq \beta < \infty$ ). Предельный переход  $\beta \rightarrow \infty$  проявляет разделение мод на два класса. Бесконечное число мод, называемых далее гидродинамическими, стремится к корням дисперсионного соотношения  $\Phi(\alpha) = 0$  для течения в канале с жесткими стенками [5]. Волновые числа этих мод будем обозначать  $\alpha_n$  и  $\alpha'_n$  для случаев жестких и податливых стенок соответственно ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ), причем под модой с номером  $n = 1$  будем подразумевать моду Толлмина–Шлихтинга. Четыре моды (флаттерные) стремятся к корням биквадратного уравнения  $Z(\alpha) = 0$ , описывающего свободные ( $p_w \equiv 0$ ) колебания мембраны (1.4); волновые числа этих мод обозначим  $\alpha_n^o$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ).

Приведем вычисленные значения волновых чисел для мод, наиболее важных в изучаемых здесь процессах (в данной работе все расчеты выполнены для  $R = 12000$ ,  $\omega = 0.24$ , а в случае податливой секции – для  $K = 0.5$ ,  $M = 2$ ,  $D = 0.1$ ,  $T = 0.1$ ,  $B = 0.15$ ). При анализе структуры возмущений течения Пуазейля в канале с жесткими стенками наибольшее значение имеют пять гидродинамических мод [4]  $\alpha_{1,2,3,4,5}$  (моды расположены в порядке возрастания номера):

$$1.032 - i0.0093, \quad -0.310 - i0.817, \quad -0.364 + i0.833, \quad 0.503 + i0.627, \quad 0.590 + i0.399$$

В случае податливых стенок им соответствуют моды  $\alpha'_{1,2,3,4,5}$ :

$$0.934 + i0.0084, \quad -0.696 - i0.356, \quad -0.616 + i0.320, \quad 0.547 + i0.566, \quad 0.622 + i0.436$$

Кроме того, колебания течения в податливых границах характеризуются четырьмя дополнительными флаттерными модами  $\alpha^o_{1,2,3,4}$ :

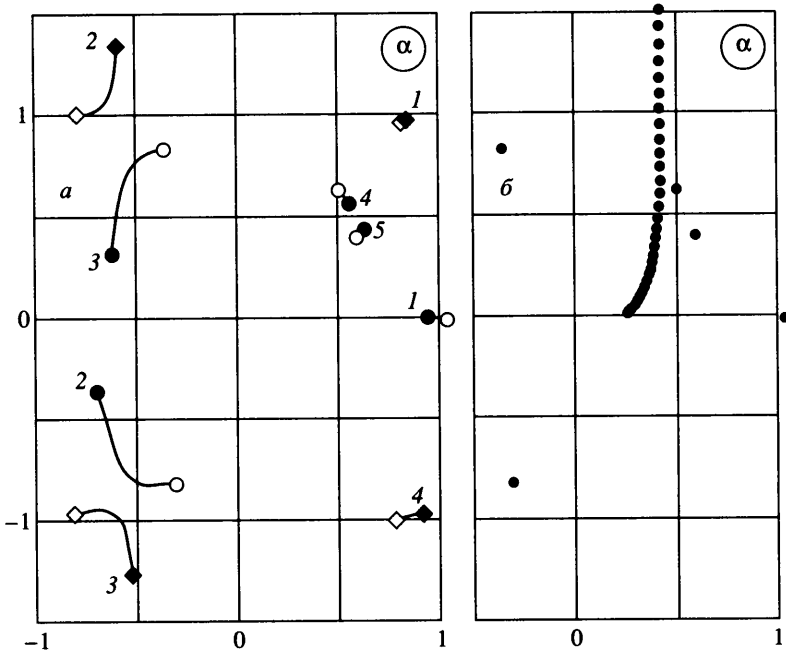
$$0.843 + i0.981, \quad -0.587 + i1.338, \quad -0.526 - i1.263, \quad 0.907 - i0.971$$

Положение описанных мод на комплексной плоскости и их траектории при изменении  $\beta$  от 1 до  $\infty$  показаны на фиг. 2, а. Поведение моды Толлмина–Шлихтинга иллюстрирует стабилизирующее воздействие податливых свойств стенок канала ( $\text{Im}\alpha_1 < 0$ ,  $\text{Im}\alpha'_1 > 0$ ).

Два метода из трех, применяемых в данной работе для анализа процесса прохождения волной неустойчивости области стыка жесткой и податливой секций канала, основаны на представлении возмущения в форме суперпозиции собственных решений (2.1). При расчете коэффициентов разложения удобно использовать свойства ортогональности собственных функций. В силу несамоспряженности оператора краевой задачи (2.2) для формулировки этих свойств необходимо ввести комплексные функции  $q_n^+$  – решения сопряженной задачи (звездочкой помечены комплексно сопряженные величины)

$$\frac{dq_n^+}{dy} + i\alpha_n^* \mathbf{H}^{*T} q_n^+ - \mathbf{G}^{*T} q_n^+ = 0 \quad (2.5)$$

$$q_{n3}^+(1) - i\omega \sigma_n q_{n1}^+(1) + 2\sigma_n q_{n2}^+(1) = q_{n4}^+(1) = q_{n1}^+(0) = q_{n4}^+(0) = 0$$



Фиг. 2. Спектры течения Пуазейля: *a* – поведение наиболее важных мод при изменении податливости границ (круглыми маркерами отмечены гидродинамические моды, ромбовидными – флаттерные, номера мод проставлены около положений, соответствующих  $\beta = 1$ ), *б* – моды течения в жестких границах

Собственные значения прямой (2.2) и сопряженной (2.5) задач совпадают. Что касается ортогональных свойств собственных функций, то в общем случае их не удастся сформулировать, поскольку собственное значение входит в краевые условия задач (2.2) и (2.5). Граничные условия не зависят от волнового числа моды только тогда, когда закон податливости характеризуется свойством “локальности”, т.е. когда уравнение (1.4) не содержит производных по продольной координате ( $T = B = 0$ ). В этом случае собственные функции задач (2.2) и (2.5) биортогональны:

$$(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{H}\mathbf{q}_m) = 0, \quad n \neq m \quad (2.6)$$

Здесь и далее используется обозначение операции скалярного произведения вектор-функций  $\mathbf{u}(y)$  и  $\mathbf{v}(y)$ :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=10}^4 \int_0^1 u_j^*(y) v_j(y) dy$$

В отличие от рассмотренного в [4] модельного случая  $M = D = T = B = 0$  описанный выше частный случай закона податливости значительно ближе к реальным свойствам податливых поверхностей, поскольку учитывает, наряду с упругостью, демпфирование и инерцию материала стенки. Несмотря на предельно упрощенный характер постановки [4], все полученные там результаты допускают непосредственное обобщение на случай  $M \neq 0, D \neq 0$  с помощью замены в [4] действительного параметра податливости  $\sigma = K^{-1}$  на комплексный  $\sigma = (K - \omega^2 M - i\omega D)^{-1}$ . Ниже рассматривается общий случай  $T \neq 0, B \neq 0$ , не описываемый в рамках такого обобщения.

**3. Расчет эволюции возмущения методом интегродифференциального уравнения.** Основная цель данной работы – исследование процесса взаимодействия волны неустойчивости с упругими панелями конечной протяженности. Предположим, что возмущения течения порождены набегающей волной Толлмина–Шлихтинга

$$q \sim q_1(y) \exp(i\alpha_1 x), \quad x \rightarrow -\infty \quad (3.1)$$

Задача в постановке аналогичной (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (1.6), (3.1) решалась в [3] с помощью конечно-разностного метода, что потребовало больших вычислительных затрат. Для сокращения объема вычислений в данной работе предлагается метод, использующий решение [5] задачи о восприимчивости плоского течения Пуазейля к локализованной вибрации стенок канала.

Представим возмущение течения в виде суперпозиции волны неустойчивости (3.1), распространяющейся в канале с жесткими стенками, и вынужденного возмущения, порождаемого антисимметричными колебаниями стенок податливой секции. В результате получим связь между пульсациями давления на верхней стенке  $p_w(x)$  и неизвестным пока распределением комплексной амплитуды колебаний стенок  $f(x)$ , задаваемую с помощью интегрального оператора Фурье

$$p_w = \exp(i\alpha_1 x) + I[f]$$

$$I[f] = \int_C \frac{dk}{2\pi\Phi(k)} \int_{l_1}^{l_2} f(\xi) \exp[ik(x - \xi)] d\xi \quad (3.2)$$

где контур интегрирования  $C$  обходит снизу полюс  $k = \alpha_1$ , соответствующий неустойчивой моде (не охватывая при этом другие полюса из нижней полуплоскости  $k$ ). Другую связь между величинами  $p_w$  и  $f$  дает закон податливости (1.4). Исключая из соотношений (1.4) и (3.2) возмущение давления, получим линейное неоднородное интегродифференциальное уравнение для определения неизвестной функции  $f(x)$ :

$$B \frac{d^4 f}{dx^4} - T \frac{d^2 f}{dx^2} + (K - \omega^2 M - i\omega D) f = \exp(i\alpha_1 x) + I[f] \quad (3.3)$$

Введем количественную характеристику изменения волны Толлмина–Шлихтинга при ее взаимодействии с податливой секцией – комплексный коэффициент прохождения  $P$ , равный отношению комплексных амплитуд прошедшей и набегающей волн:

$$P = 1 + i \left[ \frac{d\Phi}{d\alpha}(\alpha_1) \right]^{-1} \int_{l_1}^{l_2} f(x) \exp(-i\alpha_1 x) dx$$

Этот коэффициент может быть рассчитан после нахождения формы колебаний стенок; величина  $|P|$  дает отношение интенсивностей прошедшей и набегающей волн, а  $\arg P$  – сдвиг фаз между ними.

Интегральный оператор в уравнении (3.3) содержит функцию (2.4), не зависящую от параметров податливости. Вычисление этой функции с помощью решения задачи (2.3) фактически означает интегрирование задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (1.6), (3.1) по переменной  $y$ . Затабулированные значения функции  $\Phi$  могут затем использоваться для расчета эволюции возмущений в секции другой протяженности и с другими свойствами стенок.

Вычисление решения интегродифференциального уравнения (3.3) производилось с помощью его конечномерной аппроксимации путем замены неизвестной функции ее значениями в точках равномерного разбиения гибкой секции по переменной  $x$ . Дифференциальная часть

уравнения и граничные условия (1.5) аппроксимировались со вторым порядком точности, способ аппроксимации интегрального оператора изложен в [4]. В результате уравнение (3.3) сводилось к линейной неоднородной системе алгебраических уравнений, решение которой вычислялось методом Гаусса.

В качестве примера применения метода приведем результаты расчета процесса прохождения волной Толлмина–Шлихтинга податливой секции с границами  $l_1 = 10$ ,  $l_2 = 60$ . На фиг. 3, а показано продольное распределение комплексной амплитуды пульсаций давления на верхней стенке. Сплошная линия  $\text{Re} p_w$  соответствует продольному распределению возмущения давления в начальный момент времени, а штриховая  $\text{Im} p_w$  – спустя четверть периода колебаний. На фиг. 3, б изображена соответствующая кривая нарастания возмущения. Местоположение податливой секции отмечено штрих-пунктирными линиями. Слева и справа от гибкой секции (за исключением окрестностей стыков) возмущение представляет собой нарастающую волну, по параметрам очень близкую волне неустойчивости в канале с жесткими стенками бесконечной протяженности. Вычисление коэффициента прохождения дает  $|P| = 0.432$ ,  $\arg P = 1.659$ . Внутри секции возмущение также хорошо аппроксимируется затухающей волной Толлмина–Шлихтинга в канале со стенками однородной податливости.

Таким образом, процесс распространения возмущения может быть условно разделен на следующие стадии: слева на упругую секцию набегают волна Толлмина–Шлихтинга, соответствующая жестким стенкам, на левом стыке она трансформируется в ту же волну для канала со стенками однородной податливости, а на правом стыке происходит обратное преобразование. Этот схематический процесс проиллюстрирован на фиг. 3, б штриховыми линиями. На схеме видно, что амплитуда волны неустойчивости на стыках жестких и податливой секций меняется скачком (наиболее заметным на правом стыке).

**4. Метод разложения по собственным функциям локально-однородной задачи. Трансформация волны неустойчивости в области стыка жесткой и податливой секций.** Для более детального исследования процесса трансформации возмущения на стыках жестких и податливых панелей рассмотрим задачу о прохождении волной неустойчивости области стыка двух полубесконечных секций. Будем считать, что область  $x < 0$  занимает жесткая секция, а в области  $x > 0$  расположена гибкая секция, характеризующаяся упомянутыми выше параметрами.

Вниз по потоку от стыка возмущение представляет собой суперпозицию мод упругой секции. Для возмущения давления на верхней стенке имеем

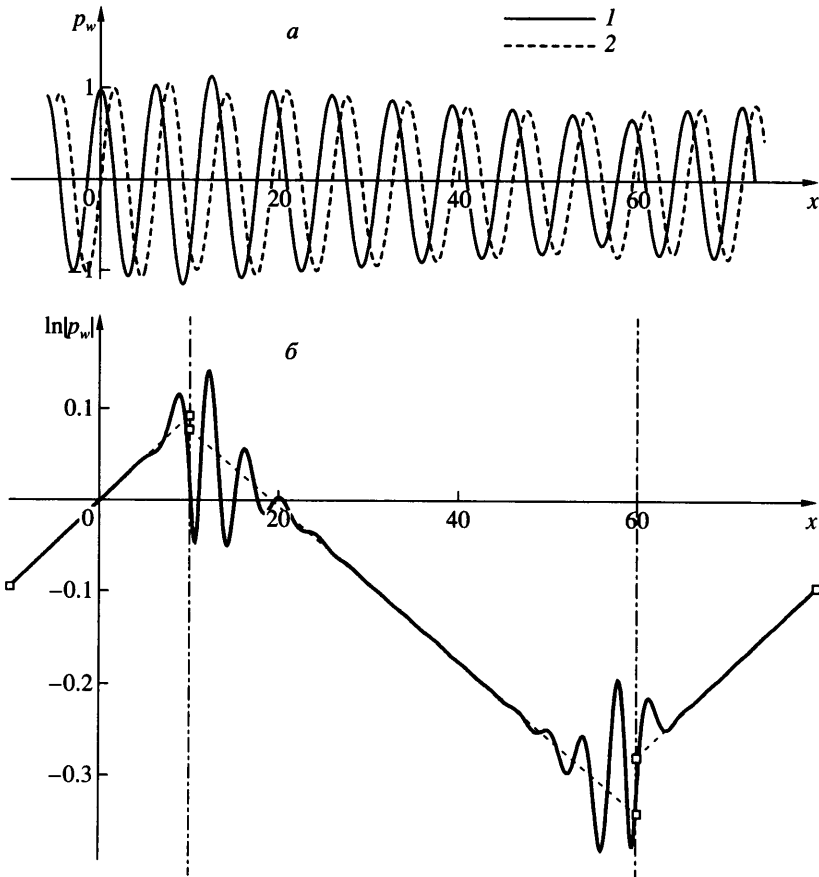
$$p_w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\prime} \exp(i\alpha_n^{\prime} x) + \sum_{n=1}^4 c_n^{\circ} \exp(i\alpha_n^{\circ} x), \quad x > 0 \quad (4.1)$$

Предположим, что структура возмущений при  $x > 0$  является заданной, т.е. коэффициенты  $c_n^{\prime}$ ,  $c_n^{\circ}$  разложения (4.1) считаются известными. Используя закон податливости (1.4), определим форму колебаний упругой секции (комплексные постоянные  $\sigma_n^{\prime\prime}$  соответствуют модам  $\alpha_n^{\prime\prime}$ )

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\prime} \sigma_n^{\prime} \exp(i\alpha_n^{\prime} x) + \sum_{n=1}^4 c_n^{\circ} \sigma_n^{\circ} \exp(i\alpha_n^{\circ} x)$$

С помощью решения задачи о вибраторе [5] по известной форме колебаний стенок может быть рассчитана структура возмущений во всем течении. Используя интегральную теорему Коши, получим выражение для возмущения давления на верхней стенке





Фиг. 3. Прохождение волны Толлмина–Шлихтинга через упругую секцию конечной протяженности: *a* – продольное распределение комплексной амплитуды (*1* –  $\text{Re} p_w$ , *2* –  $\text{Im} p_w$ ), *б* – кривая нарастания амплитуды возмущения

выше по течению от стыка, имеющее вид суммы мод течения Пуазейля в жестких границах:

$$p_w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(i\alpha_n x), \quad x < 0 \tag{4.2}$$

Таким образом, как вниз, так и вверх по потоку от стыка секций возмущение представляет собой суперпозицию мод локально-однородной задачи. Выражения для коэффициентов разложения (4.2), определяемые теоремой о вычетах, даются равенством

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}' \mathbf{c}' + \mathbf{S}^{\circ} \mathbf{c}^{\circ} \tag{4.3}$$

где  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{c}^{\circ}$  – векторы, составленные из наборов коэффициентов разложений (4.1) и (4.2) соответственно, а  $\mathbf{S}'$  и  $\mathbf{S}^{\circ}$  – матрицы рассеяния с элементами

$$S_{nm}^{\prime, \circ} = \frac{\sigma_m^{\prime, \circ}}{\alpha_m^{\prime, \circ} - \alpha_n} \left[ \frac{d\Phi}{d\alpha}(\alpha_n) \right]^{-1} \tag{4.4}$$

В отличие от [4] оператор (4.3) наряду с “квадратной” матрицей  $S'$ , описывающей рассеяние гидродинамических мод в гидродинамические, содержит “прямоугольную” матрицу  $S^\circ$  рассеяния четырех флаттерных мод в гидродинамические. По этой причине у оператора (4.3) не существует обратного, позволяющего по структуре течения в жесткой секции (4.2) вычислить структуру в податливой (4.1). Замыкают же задачу рассеяния соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma'_n c'_n + \sum_{n=1}^4 \sigma_n^\circ c_n^\circ = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma'_n \alpha'_n c'_n + \sum_{n=1}^4 \sigma_n^\circ \alpha_n^\circ c_n^\circ = 0 \quad (4.5)$$

следующие из условий (1.5), записанных для стыка  $l_1 = 0$  ( $l_2 = +\infty$ ). В соответствии с (4.5) комплексные амплитуды мод в податливой секции не являются независимыми и не могут быть заданы произвольно.

Приведем также другую форму выражений для матриц рассеяния:

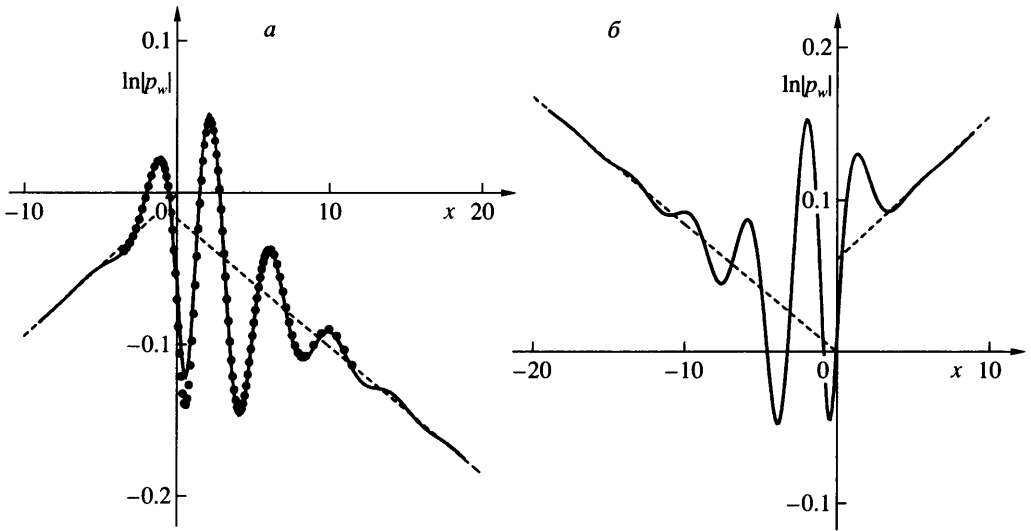
$$S_{nm}^{\prime, \circ} = \frac{(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{H} \mathbf{q}_m^{\prime, \circ})}{(\mathbf{q}_m^+, \mathbf{H} \mathbf{q}_n)} \quad (4.6)$$

Здесь  $\mathbf{q}_m^{\prime, \circ}$  собственные функции, соответствующие собственным значениям  $\alpha_m^{\prime, \circ}$ . Равенства (4.6), эквивалентные (4.4), получены с помощью соотношений ортогональности (2.6) и предположения о непрерывности возмущения, задаваемого разложением (4.2), (4.1), при  $x = 0$ :  $\mathbf{q}(-0, y) = \mathbf{q}(+0, y)$ .

Сформулируем задачу о трансформации волны Толлмина–Шлихтинга на стыке жесткой и податливой секций. Предположим, что слева на область стыка набегающая волна неустойчивости с амплитудой  $c_1 = 1$ . Комплексную амплитуду  $c'_1$  прошедшей волны назовем коэффициентом трансформации и обозначим  $S_1$ . На коэффициенты разложений (4.1), (4.2) при других модах будем накладывать условия, обеспечивающие затухание соответствующих возмущений вверх и вниз по потоку от стыка:  $c_n = 0$  при  $\text{Im} \alpha_n > 0$  и  $c'_n = 0$  при  $\text{Im} \alpha'_n < 0$ . Остальные коэффициенты так же, как и  $S_1$ , являются неизвестными. Они удовлетворяют линейной неоднородной системе алгебраических уравнений, определяемой равенствами (4.3), (4.5) и сформулированными условиями.

Решение поставленной задачи вычислялось с помощью конечномерной аппроксимации: расчет производился с учетом всех флаттерных и пяти упомянутых гидродинамических мод. Вычисленная кривая нарастания возмущения показана на фиг. 4, *a* сплошной линией. Здесь же для сравнения точками показаны результаты расчета эволюции возмущения в окрестности передней границы длинной податливой секции конечной протяженности ( $0 \leq x \leq 100$ ), выполненного методом интегрирования дифференциального уравнения (разд. 3). Сравнение показывает хорошее совпадение результатов. Улучшение точности в окрестности стыка может быть достигнуто с помощью учета большего числа гидродинамических мод. Эволюция компоненты возмущения, соответствующей неустойчивой моде (штриховая линия), демонстрирует незначительное скачкообразное уменьшение амплитуды волны неустойчивости в окрестности левого стыка податливой секции. Этот скачок определяется величиной  $|S_1| = 0.985$ , а значение  $\arg S_1 = 0.119$  характеризует сдвиг фаз между прошедшей и набегающей волной.

Задача о трансформации волны Толлмина–Шлихтинга при ее переходе из податливой секции в жесткую ( $l_1 = -\infty$ ,  $l_2 = 0$ ) формулируется аналогично. Результаты расчета для этого случая проиллюстрированы на фиг. 4, *б*; процесс трансформации волны характеризуется величинами  $|S_2| = 1.064$ ,  $\arg S_2 = 0.115$ .



Фиг. 4. Трансформация волны Толлмина–Шлихтинга на стыке полубесконечных жесткой и упругой секций: *a* – упругая секция справа, *б* – слева

Таким образом, для рассмотренной конфигурации течения правый стык податливой панели оказывает дополнительное дестабилизирующее воздействие, которое приблизительно в 4 раза больше, чем стабилизирующий эффект левого стыка. В обоих случаях практически отсутствует скачок фазы между набегающей и прошедшей волной.

Описанные процессы в качественном отношении отличаются от наблюдаемых при модельном законе податливости, когда учитывается лишь упругость стенок: как показано в [4], в этом случае стабилизирующий и дестабилизирующий эффекты левого и правого стыков приблизительно равны по абсолютной величине, так что суммарно они почти не оказывают дополнительного воздействия на характеристики устойчивости течения, в то время как в условиях данной работы стыки оказывают в целом дестабилизирующее воздействие. Для объяснения этого отличия предельно упрощим задачу о трансформации волны неустойчивости на стыке секций, произведя расчет с учетом лишь одной гидродинамической моды (моды Толлмина–Шлихтинга) и четырех флаттерных мод. В результате получим приближенные формулы для коэффициентов трансформации на левом и правом стыке:

$$S_1 \approx \left[ \frac{(\alpha_1^o - \alpha_1')(\alpha_2^o - \alpha_1')}{(\alpha_1^o - \alpha_1)(\alpha_2^o - \alpha_1)} S_{11}' \right]^{-1}, \quad S_2 \approx \frac{(\alpha_3^o - \alpha_1')(\alpha_4^o - \alpha_1')}{(\alpha_3^o - \alpha_1)(\alpha_4^o - \alpha_1)} S_{11}' \quad (4.7)$$

Вычисление коэффициентов трансформации по этим формулам дает  $|S_1| \approx 0.984$ ,  $|S_2| \approx 1.070$ , что практически совпадает с расчетом, учитывающим динамику пяти гидродинамических мод. При  $T = B = 0$  в формулах (4.7) сохраняется лишь последний множитель, и, следовательно, выполнено приближенное равенство  $S_1 S_2 \approx 1$ . Таким образом, не только в условиях постановки [4], но и с учетом инерции и демпфирования стенок скачки амплитуды волны неустойчивости на стыках приблизительно равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Учет натяжения и сопротивления изгибу качественно меняет ситуацию.

С помощью метода локально-однородной задачи может быть эффективно решена и задача о прохождении волны Толлмина–Шлихтинга через упругую секцию конечной

протяженности. Вычислим с помощью этого подхода коэффициент прохождения для податливой секции длины  $l$ . В силу инвариантности величины коэффициента прохождения относительно преобразования сдвига положим  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = l$ . В левой жесткой и в податливой секциях возмущение по-прежнему описывается разложениями (4.2), (4.1). В правой жесткой секции возмущение имеет вид

$$p_w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'' \exp[i\alpha_n(x-l)], \quad x > l \quad (4.8)$$

Соответствующий вектор  $\mathbf{c}''$  коэффициентов разложения удовлетворяет условию рассеяния на правом стыке, полностью аналогичному условию (4.3) для левого стыка

$$\mathbf{c}'' = \mathbf{S}'\mathbf{A}'\mathbf{c}' + \mathbf{S}^{\circ}\mathbf{A}^{\circ}\mathbf{c}^{\circ}, \quad A_{nm}'^{\circ} = \exp(i\alpha_n'^{\circ}l)\delta_{nm} \quad (4.9)$$

Здесь  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{A}^{\circ}$  – матрицы усиления (ослабления) гидродинамических и флаттерных мод в податливой секции длины  $l$  ( $\delta_{nm}$  – символ Кронеккера).

Для замыкания задачи выпишем в векторной форме условия (1.5), выставляемые на границах податливых панелей:

$$\mathbf{V}'\mathbf{c}' + \mathbf{V}^{\circ}\mathbf{c}^{\circ} = \mathbf{0}$$

$$B_{1m}'^{\circ} = \sigma_m'^{\circ}, \quad B_{2m}'^{\circ} = \sigma_m'^{\circ} \exp(i\alpha_m'^{\circ}l) \quad (4.10)$$

$$B_{3m}'^{\circ} = \alpha_m'^{\circ} \sigma_m'^{\circ}, \quad B_{4m}'^{\circ} = \alpha_m'^{\circ} \sigma_m'^{\circ} \exp(i\alpha_m'^{\circ}l)$$

Последовательно исключая из соотношений (4.3), (4.9), (4.10) векторы  $\mathbf{c}^{\circ}$ ,  $\mathbf{c}'$ , получим искомую связь между комплексными амплитудами мод в левой и правой жестких секциях канала

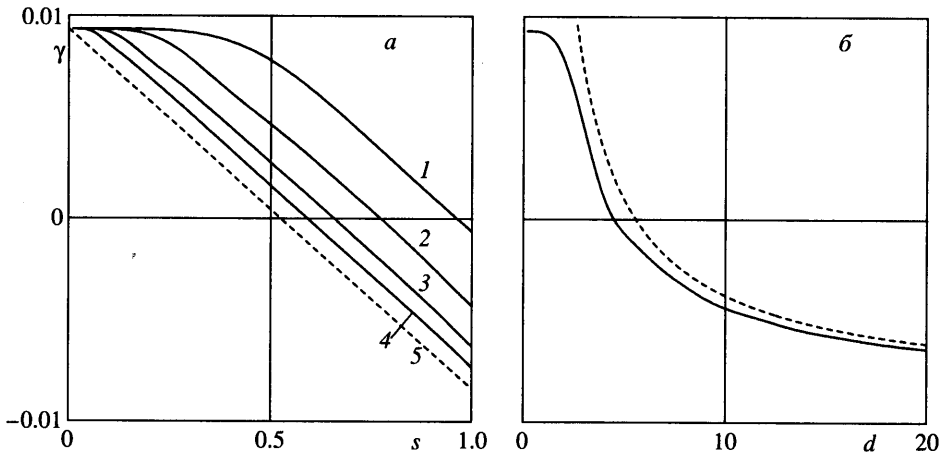
$$\mathbf{c}'' = \mathbf{P}\mathbf{c}, \quad \mathbf{P} = (\mathbf{S}'\mathbf{A}' - \mathbf{S}^{\circ}\mathbf{A}^{\circ}\mathbf{V}^{\circ-1}\mathbf{V}')(\mathbf{S}' - \mathbf{S}^{\circ}\mathbf{V}^{\circ-1}\mathbf{V}')^{-1}$$

где  $\mathbf{P}$  – бесконечномерная комплексная матрица перехода.

Постановка задачи о прохождении волны неустойчивости через податливую секцию конечной протяженности производится аналогично задаче о трансформации волны на стыке жесткой и податливой секций. Комплексные амплитуды набегающей и прошедшей волны Толлмина–Шлихтинга задаются равенствами  $c_1 = 1$ ,  $c_1'' = P \exp(i\alpha_1 l)$ , где  $P$  – подлежащий определению коэффициент прохождения. Остальные коэффициенты разложений (4.2), (4.8) либо являются неизвестными, либо полагаются равными 0 для обеспечения затухания соответствующих компонент решения вверх и вниз по потоку от упругой секции.

Сформулированный подход тестировался для податливых секций различной протяженности. Расчеты, проведенные с учетом динамики пяти гидродинамических мод, показали, что отличие вычисленных величин коэффициента прохождения от полученных по методике разд. 3 не превышает 0.5%, а время, требуемое для расчета, снижается в сотни раз. Предложенный метод допускает простое обобщение на случай нескольких податливых секций, разделенных жесткими участками: в качестве матрицы перехода такой системы секций следует использовать произведение  $\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_{j-1}\mathbf{P}_j$ , где  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_j$  – матрицы перехода для податливых секций, а  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{j-1}$  – матрицы усиления соответствующих жестких секций (порядковые номера секций возрастают вверх по потоку).

Заметим, что скорость роста (затухания) амплитуды волны Толлмина–Шлихтинга значительно меньше скоростей затухания всех остальных мод, поэтому в случае панелей протяженностью порядка длины волны неустойчивости процессы рассеяния



Фиг. 5. Зависимости инкремента волны Толлмина–Шлихтинга в канале со стенками периодической податливости: *a* – от относительной протяженности податливой секции при различных величинах периода для  $d = 5, 10, 20, 40, \infty$  (кривые 1–5), *б* – от величины периода для канала из упругих секций с жесткими неподвижными стыками

волны на стыках секций совершаются независимо, и для коэффициента прохождения податливой секции справедливо соотношение  $P \approx S_1 S_2 \exp[i(\alpha'_1 - \alpha_1)l]$ . Если для вычисления коэффициентов трансформации воспользоваться приближенными выражениями (4.7), полученными в приближении динамики одной гидродинамической моды, формула для комплексного коэффициента прохождения приобретает простой вид

$$P \approx \frac{(\alpha_1^\circ - \alpha_1)(\alpha_2^\circ - \alpha_1)(\alpha_3^\circ - \alpha_1)(\alpha_4^\circ - \alpha_1)}{(\alpha_1' - \alpha_1)(\alpha_2' - \alpha_1)(\alpha_3' - \alpha_1)(\alpha_4' - \alpha_1)} \exp[i(\alpha'_1 - \alpha_1)l] \quad (4.11)$$

не зависящий от элементов матриц рассеяния.

Рассмотрим теперь практически важный случай чередования податливых и жестких секций с периодом  $d$  (длина упругих участков по-прежнему равна  $l$ ). Будем считать, что внутри жестких секций комплексные амплитуды мод описываются бесконечномерной вектор-функцией  $c(x)$ . На концах произвольного отрезка длиной  $d$  эта функция в силу периодичности конфигурации канала удовлетворяет соотношению

$$c(x + d) = Fc(x), \quad F = AP, \quad A_{nm} = \exp[i\alpha_n(d - l)]\delta_{nm}$$

где  $F$  – матрица перехода для пары последовательных секций. Усиление (ослабление) возмущений течения в канале, составленном из таких пар, характеризуется мультипликаторами  $\rho_n$  – собственными числами матрицы перехода:  $Fc_n = \rho_n c_n$ .

Пусть  $\rho_1$  – мультипликатор, соответствующий неустойчивой моде. Введем обозначения  $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma$  для инкрементов нарастания волны неустойчивости в каналах с жесткими и гибкими стенками, а также в канале, составленном из чередующихся упругих и жестких секций:

$$\gamma_1 = -\text{Im}\alpha_1, \quad \gamma'_1 = -\text{Im}\alpha'_1, \quad \gamma = \frac{\ln|\rho_1|}{d}$$

На фиг. 5 показаны зависимости скорости роста возмущений  $\gamma$  от величины периода  $d$  (отношения суммарной длины пары соседних секций к полуширине канала) и от относительной протяженности податливых участков  $s = l/d$ . Расчеты производились в

пятимодовом приближении. На фиг. 5, *а* приведены кривые  $\gamma(s)$  для различных значений  $d$ . Результаты вычислений показывают, что при малой относительной длине податливых участков возмущения нарастают со скоростью, определяемой инкрементом нарастания волны Толлмина–Шлихтинга в канале с жесткими стенками ( $\gamma \rightarrow \gamma_1$  при  $s \rightarrow 0$ ). Из-за неподвижности точек упругих стенок в местах стыков и благодаря жесткости соединения секций в противоположном предельном случае  $s \rightarrow 1$  скорость изменения амплитуды возмущения не стремится к скорости  $\gamma'_1$  затухания волны в канале со стенками однородной податливости. Зависимость  $\gamma(d)$  для случая  $s = 1$  изображена на фиг. 5, *б* сплошной линией. Расчет показывает, что канал, составленный из узких податливых секций, ведет себя как жесткий ( $\gamma \rightarrow \gamma_1$  при  $s = 1, d \rightarrow 0$ ). Нейтральной устойчивостью характеризуется течение в канале, образованном податливыми секциями размером порядка длины волны Толлмина–Шлихтинга с неподвижными стыками.

При умеренной протяженности секций (порядка нескольких длин воли) рассеяние возмущений на соседних стыках происходит независимо и характеризуется коэффициентами трансформации  $S_1, S_2$ , а скорость роста возмущения описывается асимптотической формулой

$$\gamma = \gamma_1 + (\gamma'_1 - \gamma_1)s + \frac{1}{d} \ln |S_1 S_2| + o\left(\frac{1}{d}\right)$$

Для случая  $s = 1$  зависимость, соответствующая этой двучленной асимптотике, отмечена на фиг. 5, *б* штриховой линией. Сравнение с точным расчетом показывает, что асимптотическая формула хорошо описывает скорость роста волны неустойчивости даже в случае, когда жесткие секции имеют нулевую протяженность, а податливые имеют размер порядка длины волны. Проведенное сопоставление позволяет рекомендовать приближенную формулу (4.11) для инженерных расчетов скорости роста неустойчивых возмущений в течениях, границы которых состоят из нескольких панелей умеренной протяженности с различными свойствами податливости.

При дальнейшем увеличении  $d$  влияние процессов рассеяния на величину результирующего коэффициента усиления уменьшается, и скорость роста возмущения определяется относительной длиной податливой секции  $s$ , изменяясь от  $\gamma_1$  к  $\gamma'_1$  по линейному закону (штриховая линия на фиг. 5, *а*).

Таким образом, в данном разделе продемонстрирован эффективный аналитический метод исследования процессов эволюции возмущений в канале, содержащем податливые секции. Метод базируется на разложении искомого решения в ряд по собственным возмущениям течения, соответствующим местным характеристикам податливости стенок. Он позволяет естественным образом выставлять граничные условия вверх и вниз по потоку от исследуемой области течения при формулировке краевых задач. Основное преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что высокая точность расчета обеспечивается при сравнительно небольшом числе учитываемых мод. По-видимому, такая быстрая сходимость численного решения обусловлена тем, что локальная система собственных функций наилучшим образом подходит для описания местного поведения возмущений течения.

Недостатком метода является его неуниверсальность. Если соседние секции канала имеют различные параметры податливости, в рамках предлагаемой методики матрицу рассеяния удастся вычислить только в случае, когда закон податливости одной из секций обладает свойством локальности (см. разд. 2). По этой причине метод не применим к расчету эволюции возмущений в канале, упругие свойства стенок которого описываются законом общего вида ( $T \neq 0, B \neq 0$ ), а характеристики податливости зависят от продольной переменной.

**5. Метод разложения по собственным функциям течения в жестких границах.** Для исследования более широкого класса задач предлагается использовать менее эффективный (с точки зрения вычислительных затрат), но универсальный метод разложения искомого решения в ряд по собственным функциям течения в канале с неподвижными стенками. Этот метод представляет собой обобщение метода вариации постоянных на случай системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных; он применялся и показал свою работоспособность при расчете вынужденных возмущений, порождаемых в течении Гамеля стационарными и нестационарными двумерными неровностями стенок расширяющегося канала [8].

Снова рассмотрим задачу о распространении волны Толлмина-Шлихтинга в податливой секции конечного размера (при этом параметры податливости могут зависеть от  $x$ ). Будем искать решение задачи в виде

$$\mathbf{q} = f(x)\mathbf{q}_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\mathbf{q}_n(y) \quad (5.1)$$

Первое слагаемое (5.1) представляет собой вынужденное возмущение, рассчитанное в локально-однородном приближении (оно не является частным решением задачи (1.1), (1.2), (1.6)!):

$$v_{y0} = -i\omega, \quad v_{x0} = 2y, \quad p_0 = \omega^2 y, \quad r_0 = 2$$

Бесконечная сумма в правой части (5.1) представляет собой суперпозицию мод течения Пуазейля в жестких границах; комплексные коэффициенты разложения так же, как и форма колебаний стенок, являются неизвестными функциями, подлежащими определению.

Для вывода системы уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты  $c_n$  и функция  $f$ , запишем систему (1.1) в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{G} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

подставим в нее разложение (5.1), скалярно умножим полученное векторное равенство слева на  $\mathbf{q}_n^+$  и проинтегрируем результат по  $y$  от 0 до 1. С учетом соотношений ортогональности (2.6) получим бесконечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dc_n}{dx} = i\alpha_n c_n + b_n \frac{df}{dx}, \quad b_n = \frac{(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{H} \mathbf{q}_0)}{(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{H} \mathbf{q}_n)} \quad (5.2)$$

Система (5.2) представляет явление распространения возмущений в податливой секции в форме эволюции нормальных мод течения в жестком канале. Эта эволюция характеризуется двумя процессами, идущими параллельно: распределенной генерацией мод на вибрирующих стенках (второе слагаемое в правой части системы (5.2)) и их независимой эволюцией в однородном течении (первое слагаемое).

Правая часть системы (5.2) содержит функцию  $f$ , в отличие от [8] не известную заранее. Для замыкания задачи воспользуемся законом податливости (1.4), правая часть которого вычислена с помощью разложения (5.1):

$$B \frac{d^4 f}{dx^4} - T \frac{d^2 f}{dx^2} + (K - \omega^2 M - i\omega D) f = \omega^2 f + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (5.3)$$

Введем “расширенную” вектор-функцию  $\mathbf{f}(x)$  с компонентами  $f_n = d^{(-n)}f/dx^{(-n)}$ ,  $n = -3, -2, -1, 0$ ;  $f_n = c_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . В результате задача (5.2), (5.3) приобретает вид бесконечномерной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (в общем случае – с переменными коэффициентами):

$$\frac{d\mathbf{f}}{dx} = \mathbf{T}\mathbf{f} \quad (5.4)$$

Ненулевые компоненты матрицы  $\mathbf{T}$  определяются равенствами

$$T_{nn} = i\alpha_n, \quad T_{n,-1} = b_n, \quad T_{-3,n} = 1/B \quad (n \geq 1)$$

$$T_{n+1,n} = 1 \quad (-3 \leq n \leq -1)$$

$$T_{-3,-2} = T/B, \quad T_{-3,0} = [\omega^2(1+M) + i\omega D - K]/B$$

Система (5.4) описывает широкий класс возмущений течения в канале с податливой секцией, характеризуемый бесконечным числом линейно независимых решений. Для завершения формулировки задачи о прохождении волны Толлмина–Шлихтинга через податливую секцию в рамках предлагаемого подхода и для обеспечения единственности решения необходимо выставить краевые условия на границах секции

$$f_1(l_1) = \exp(i\alpha_1 l_1), \quad f_0(l_1) = f_{-1}(l_1) = f_0(l_2) = f_{-1}(l_2) = 0 \quad (5.5)$$

$$\operatorname{Im}\alpha_n > 0: f_n(l_1) = 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_n < 0: f_n(l_2) = 0 \quad (n \geq 2)$$

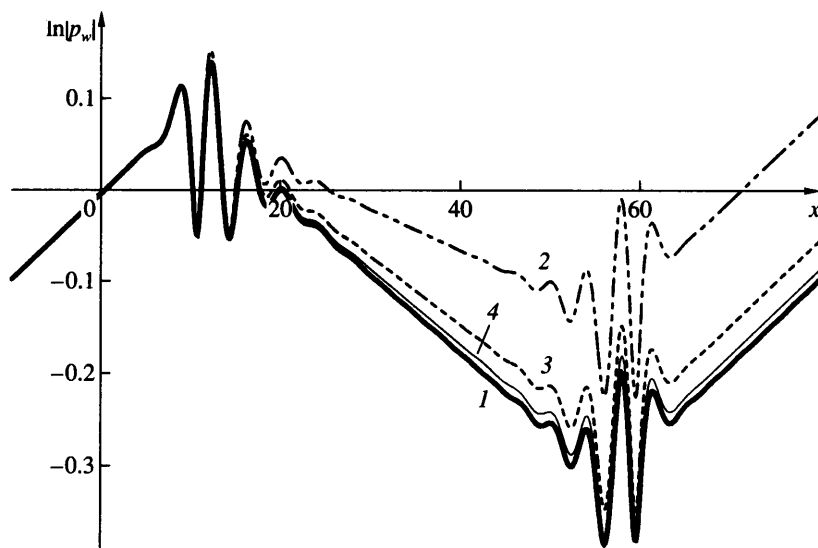
В качестве иллюстрации применения метода приведем результаты численного исследования процесса прохождения волны неустойчивости через податливую секцию, параметры которой совпадают с описанными в разд. 1, 3. Спектр течения Пуазейля в жестких границах показан на фиг. 2, б. На фиг. 6 изображены кривые нарастания возмущения, вычисленные с учетом динамики различного числа мод. Сплошной жирной линией 1 отмечены результаты точного расчета, выполненного методом интегриродифференциального уравнения. Линией 2 показан расчет с помощью пяти основных гидродинамических мод (отдельно стоящие точки на фиг. 2, б). Хотя в качественном отношении поведение кривых 1 и 2 идентично, расчет в пятимодовом приближении приводит к количественно неудовлетворительным результатам. Как и при прямом численном моделировании, эта особенность связана с плохой адаптацией метода к точному описанию такой тонкой характеристики, как скорость нарастания волны неустойчивости (в силу того, что  $|\operatorname{Im}\alpha_1| \ll \operatorname{Re}\alpha_1$ ). В отличие от метода локально-однородной задачи, для точного описания скорости роста волны Толлмина–Шлихтинга необходимо производить вычисления с учетом большого числа мод. Примеры таких расчетов продемонстрированы на фиг. 6: кривая 3 получена с учетом 50 мод ( $\max \operatorname{Im}\alpha_n \approx 3$ ), а кривая 4 – с учетом 91 моды ( $\max \operatorname{Im}\alpha_n \approx 10$ ). Численное интегрирование краевой задачи (5.4), (5.5) производилось методом Рунге–Кутты с применением процедуры ортогонализации Годунова [9].

Предложенная методика может быть использована и для вычисления характеристик устойчивости течения Пуазейля в канале со стенками однородной упругости. При постоянных параметрах податливости линейно независимые решения системы (5.4) имеют экспоненциальный вид с волновыми числами, совпадающими с характеристиками мод течения в упругом канале:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n \exp(i\alpha'_n x), \quad \mathbf{T}\mathbf{f}_n = i\alpha'_n \mathbf{f}_n$$

Подчеркнем, что решение задачи на собственные значения для “расширенной” матрицы  $\mathbf{T}$  позволяет рассчитать как гидродинамические, так и флаттерные моды (благо-





Фиг. 6. Эволюция волны Толлмина–Шлихтинга в податливой секции, рассчитанная с помощью разложения по модам течения в жестких границах: 1 – точный расчет методом интегродифференциального уравнения, 2–4 – расчет с учетом динамики 50, 50 и 91 нормальной моды

даря наличию в системе (5.4) четырех добавочных уравнений с номерами  $n = -3, -2, -1, 0$ , задающих закон движения стенок). Так, при расчете с учетом 91 моды вычисленное значение  $\alpha'_0 = 0.844 + i0.980$  отличается от волнового числа  $\alpha'_1$  первой флаттерной моды лишь третьим знаком. Для моды, соответствующей волне Толлмина–Шлихтинга, получаем  $\alpha'_1 = 0.934 + i0.0082$ , что дает ошибку  $\sim 3\%$  по декременту затухания. Именно этим и объясняется более медленное убывание кривой 4 внутри податливой секции по сравнению с точным расчетом 1 (см. фиг. 6).

**Закключение.** Теоретически изучена эволюция волны неустойчивости плоского течения Пуазейля в канале, содержащем упругие секции. С помощью решения задачи восприимчивости течения к локализованным вибрациям стенок исследуемая задача сводится к решению интегродифференциального уравнения для комплексной амплитуды колебаний податливой секции, индуцируемых набегающей волной. На стыке секций различной податливости амплитуда волны неустойчивости изменяется скачком: при переходе из жесткой секции в упругую волна испытывает дополнительное стабилизирующее воздействие, вызванное внезапным увеличением податливости стенок, а обратный переход в жесткую секцию сопровождается значительно большим дестабилизирующим эффектом.

Для вычисления величины скачков амплитуды предложен аналитический метод исследования процесса распространения возмущений, основанный на представлении решения в виде суперпозиции мод, соответствующих местным характеристикам податливости стенок. Метод демонстрирует высокую точность аппроксимации изучаемых явлений при учете динамики всего пяти гидродинамических и четырех флаттерных мод. Этот подход использован также для вычисления характеристик устойчивости течений в каналах, имеющих одну или несколько податливых секций, а также составленных из периодически чередующихся жестких и упругих секций с жесткими неподвижными стыками.

Для инженерных расчетов предложен упрощенный вариант метода, учитывающий динамику единственной гидродинамической моды. Получены приближенные формулы для расчета усиления возмущений течения в канале, составленного из нескольких секций размером порядка длины волны неустойчивости с различными параметрами податливости. С помощью этого метода объяснены качественные особенности процессов эволюции возмущений внутри секций, характеризующихся различными законами податливости.

Проиллюстрирована возможность использования свободных возмущений течения в жестких границах в качестве базисных для описания характеристик устойчивости течения в канале со стенками неоднородной податливости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 02-01-00149, 04-01-00632) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1984.2003.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kramer M.O.* Boundary layer stabilization by distributed damping // *J. Aeronaut. Sci.* 1957. V. 24. № 6. P. 459–460.
2. Flow past Highly Compliant Boundaries and in Collapsible Tubes: Proceedings IUTAM Symp. Warwick, United Kingdom, 2001. Dordrecht etc.: Kluwer, 2003. 336 p.
3. *Davies C., Carpenter P.W.* Numerical simulation of the evolution of Tollmien–Schlichting waves over finite compliant panels // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 335. P. 361–392.
4. *Мануйлович С.В.* Распространение возмущений в плоском течении Пуазейля между стенками неоднородной податливости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 4. С. 29–46.
5. *Мануйлович С.В.* О восприимчивости плоского течения Пуазейля к вибрации стенок канала // *Изв. РАН. МЖГ.* 1992. № 4. С. 12–19.
6. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt 1. Tollmien–Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 155. P. 465–510.
7. *Мануйлович С.В.* Трансформация волны неустойчивости при резком изменении податливости границ // *Докл. АН.* 2004. Т. 396. № 5. С. 349–353.
8. *Мануйлович С.В.* О возмущениях течения Гамеля, вызванных неровностью стенок канала // *Изв. РАН. МЖГ.* 2004. № 4. С. 48–64.
9. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук.* 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.

Москва  
e-mail: manu@resp.aerocentr.msk.su

Поступила в редакцию  
19.XII.2003